Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" 04 décembre 2012

## Exercices pour la séance numéro 10

**Exercice 1) Inversion de Fourier pour les distributions**
Soit $\mathcal{F}$ l'opérateur de Fourier et $\overline{\mathcal{F}}$ l'opérateur de Fourier conjugué. Rappeler leurs définitions lorsqu'ils opèrent sur des fonctions intégrables. Rappeler ce que valent les composées $\mathcal{F}_\circ\overline{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{F}}_\circ\mathcal{F}$ lorsque l'on travaille dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions très régulières à décroissance rapide. Sachant que pour une distribution $T$ et une fonction test $\varphi$ on a $< \mathcal{F}T \,,\, \varphi > \equiv < T \,,\, \mathcal{F}\varphi >$ et $< \overline{\mathcal{F}}T \,,\, \varphi > \equiv < T \,,\, \overline{\mathcal{F}}\varphi >$, montrer que pour toute distribution $T$, on a l'identité $\overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}T\big) = 2\pi\, T$. En déduire que $\overline{\mathcal{F}}_\circ\mathcal{F}$ est proportionnel à la transformation identité dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions.

**Exercice 2) Transformée de Fourier des fonctions circulaires**
Soit $a$ un réel. Rappeler le raisonnement qui permet de calculer les transformées de Fourier de l'exponentielle complexe et des fontions sinus et cosinus. Montrer que $\mathcal{F}\big(\exp(i\,a\,t)\big) = 2\,\pi\,\delta_a$, $\mathcal{F}\big(\cos(a\,t)\big) = \pi\,\big(\delta_a + \delta_{-a}\big)$, $\mathcal{F}\big(\sin(a\,t)\big) = \frac{\pi}{i}\,\big(\delta_a - \delta_{-a}\big)$.

**Exercice 3) Valeur principale de Cauchy**
Pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on pose

$$< \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} \,,\, \varphi > \equiv \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que cette limite existe bien et que l'on a $< \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} \,,\, \varphi > = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}\,\mathrm{d}t\,.$
Montrer que l'on a la relation $x\ \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = 1$ au sens des distributions en la testant sur $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sachant que $< x\ \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} \,,\, \varphi > \equiv <\ \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} \,,\, \psi >$ avec $\psi(t) = t\,\varphi(t)$.

**Exercice 4) Transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy**
On admet que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, \sin(\xi\,t)\,\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\ \varphi(\xi) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\sin(\xi\,t)\,.$$

Sachant que l'intégrale classique $\int_0^\infty \frac{\sin(\theta)}{\theta}\,\mathrm{d}\theta$ vaut $\frac{\pi}{2}$, montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\sin(\xi\,t)$ de l'identité précédente vaut $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(\xi)$, où $\mathrm{sgn}(\xi) = 1$ si $\xi > 0$ et $\mathrm{sgn}(\xi) = -1$ si $\xi < 0$. En déduire le calcul de la transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy : $\mathcal{F}\big(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\big) = -i\,\pi\ \mathrm{sgn}$.

**Exercice 5) Transformée de Fourier de la fonction de Heaviside**
Reprendre l'exercice précédent pour établir que $\overline{\mathcal{F}}\big(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\big) = i\,\pi\ \mathrm{sgn}$. En déduire que $\mathcal{F}\big(\mathrm{sgn}\big) = -2\,i\ \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$. Après avoir remarqué que la fonction de Heaviside peut s'écrire $H \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}$, en déduire sa transformée de Fourier : $\widehat{H} = \pi\,\delta - i\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.