Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" 27 novembre 2012

Exercices pour la séance numéro 09

Exercice 1) Dérivées de la valeur absolue
Soit $v(\bullet)$ la fonction "valeur absolue" : $v(t) = -t$ pour $t \leq 0$ et $v(t) = t$ pour $t \geq 0$. Calculer la dérivée de v au sens des distributions et montrer qu'elle coïncide avec la dérivée usuelle. Poursuivre la question précédente avec l'évaluation de la dérivée seconde de la fonction v au sens des distributions.

Exercice 2) Equation différentielle du premier ordre
Soit λ un nombre réel (ou complexe !) et $H(\bullet)$ la fonction de Heaviside. Calculer au sens des distributions l'expression $\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \lambda\big)\big(H(t)\, \exp(-\lambda\, t)\big)$. Comparer avec la solution $u(t)$ (qu'on précisera !) de l'équation différentielle du premier ordre $\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \lambda\big)\big(u(t)\big) = 0$, associée à la condition initiale $u(0) = 1$.

Exercice 3) Dérivée de la masse de Dirac
On rappelle que la masse de Dirac δ est définie par son action sur les fonctions-test : $< \delta\,,\, \varphi > = \varphi(0)$. On introduit un nombre réel strictement positif ε "petit" et on approche la masse de Dirac par la fonction χ_ε égale à la fonction porte P_ε multipliée par $\frac{1}{\varepsilon}$: $\chi_\varepsilon(t) = 1/\varepsilon$ pour $\mid t \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\chi_\varepsilon(t) = 0$ sinon. Calculer la dérivée de χ_ε au sens des distributions. Montrer que pour une fonction test φ assez régulière fixée, le nombre $< \chi'_\varepsilon\,,\, \varphi >$ converge si ε tend vers zéro vers un nombre qui ne dépend que de la fonction φ. Vérifier, en revenant à la définition de la dérivée d'une distribution, que cette limite est égale au nombre $< \delta'\,,\, \varphi >$.

Exercice 4) Equation différentielle du second ordre
Soit ω un nombre réel et $H(\bullet)$ la fonction de Heaviside. Calculer au sens des distributions l'expression $\big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\big)\big(H(t)\, \frac{\sin \omega\, t}{\omega}\big)$. Comparer avec la solution $\sigma(t)$ de l'équation différentielle du second ordre $\big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\big)\big(\sigma(t)\big) = 0$, associée aux conditions initiales $\sigma(0) = 0$, $\sigma'(0) = 1$,