Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe"

novembre 2012, novembre 2015

**Exercices pour la séance numéro 06**

**Exercice 1) Calcul d'une transformée de Laplace**

Soit $\omega$ un nombre réel fixé et $H(\bullet)$ la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ pour $t > 0$ et $H(t) = 0$ pour $t \leq 0$. On pose $\varphi(t) = \exp(i\,\omega\,t)\,H(t)$. Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}\varphi$ de la fonction $\varphi$.

**Exercice 2) Changement d'échelle**

Soit $a$ un nombre réel strictement positif fixé. Etablir la relation de changement d'échelle $[\mathcal{L}(f(t\,a))](p) = \frac{1}{a}\,(\mathcal{L}f)\big(\frac{p}{a}\big)$. L'appliquer aux fonctions sinus et cosinus pour retrouver les expressions de $\mathcal{L}(H(t)\,\sin(\omega t))$ et $\mathcal{L}(H(t)\,\cos(\omega t))$ à partir des relations $[\mathcal{L}(H(t)\,\sin(t))](p) = \frac{1}{1+p^2}$ et $[\mathcal{L}(H(t)\,\cos(t))](p) = \frac{p}{1+p^2}$.

**Exercice 3) Dérivation et transformée de Laplace**

Etablir par récurrence les relations générales

$$[\mathcal{L}f^{(n)}(t)](p) = p^n\,(\mathcal{L}f)(p) - p^{n-1}\,f(0^+) - p^{n-2}\,f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

et $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}(\mathcal{L}f)(p) = (-1)^n\,[\mathcal{L}(t^n\,f(t))](p)\,.$

**Exercice 4) Calcul de quelques transformées de Laplace**

Avec les notations introduites à l'exercice 1, calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes : $f_1(t) = H(t)\,\exp(2\,t)\,\cos(\omega\,t)$, $f_2(t) = H(t-\frac{\pi}{3})\,\cos(t-\frac{\pi}{3})$, $f_3(t) = H(t)\,\cos(t-\frac{\pi}{3})$ et $f_4(t) = H(t)\,t\,\cos(3\,t)$.

**Exercice 5) Calcul de quelques originales**

Calculer les fonctions $f_j(t)$ dont la transformée de Laplace est donnée par les fonctions $F_j(p)$ suivantes :

$F_1(p) = \frac{1}{(p-2)\,(p-3)}$, $F_2(p) = \frac{1}{(p-1)^2\,(p-3)}$, $F_3(p) = \frac{p+1}{p^2+2\,p+5}$, $F_4(p) = \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}$.

Pour ce dernier cas, on pourra décomposer la fraction en éléments simples sous la forme $\frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} \equiv \frac{\alpha}{p+3\,i} + \frac{\beta}{p-3\,i} + \frac{\gamma}{(p+3\,i)^2} + \frac{\delta}{(p-3\,i)^2}$.

**Exercice 6) Equations différentielles**

Calculer pour $t > 0$ les solutions $y_j(t)$ des équations différentielles suivantes :

$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} + 4\,y_1(t) = t + 2\,,\ y_1(0) = 3\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}t^2} + y_2(t) = t\,,\ y_2(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}(0) = 0\,,$
$\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t} + y_3(t) = \sin t\,,\ y_3(0) = 0$ et la solution $(x(t),\,y(t))$ du système différentiel $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t) + 5\,y(t)\,,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(t) - 3\,y(t)\,,\ x(0) = 1\,,\ y(0) = 2.$