Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" octobre 2012

## Exercices pour la séance numéro 04

**Exercice 1) Signal intégrable**
On note $H(\bullet)$ la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ pour $t > 0$ et $H(t) = 0$ pour $t \leq 0$. Montrer que le signal défini pour $t$ réel par $h(t) = \frac{1}{RC} \exp\big(-\frac{t}{RC}\big)\, H(t)$ est un signal intégrable : $\int_{\mathbb{R}} |\,h(t)\,| \;\mathrm{d}t \,<\, \infty$.

**Exercice 2) Causalité**
On se donne une fonction $h(\bullet)$ et le filtre $T$ défini par son action sur un signal analogique $u$ : $Tu = h*u$. Montrer que si la réponse impulsionnelle $h$ est causale, c'est à dire $h(t) = 0$ dès que $t < 0$, il en est de même du filtre $T$.

**Exercice 3) Parité**
Soit $f$ une fonction paire et $g$ une fonction impaire. Montrer que le produit de convolution $f * g$ est impaire. Reprendre la question lorsque $f$ et $g$ sont toutes deux paires ou toutes deux impaires.

**Exercice 4) Dérivation**
Soient $f$ et $g$ deux signaux tels que le produit de convolution $f * g$ est bien défini. On suppose $f$ dérivable et le produit de convolution $f' * g$ défini. Quelle relation proposez-vous pour calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f * g\big)$ ?

**Exercice 5) Calcul d'un produit de convolution**
On se donne $a > 0$ et la porte $\chi$ par les conditions $\chi(t) = 1$ pour $-a < t < a$ et $\chi(t) = 0$ sinon. Calculer le produit de convolution $f = \chi * \sin$. Montrer que c'est une fonction impaire. Pouvait-on prévoir le résultat ? calculer d'une part la dérivée $f'$ et d'autre part la convolée $g = \chi * \cos$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Exercice 6) Un autre produit de convolution**
Si $\chi$ désigne la porte introduite à l'exercice précédent et sgn la fonction "signe" définie par $\mathrm{sgn}(t) = 1$ pour $t > 0$ et $\mathrm{sgn}(t) = -1$ pour $t \leq 0$, calculer le produit de convolution $\chi * \mathrm{sgn}$. Est-il continu ? Est-il dérivable ? Quelle est la valeur de la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\chi * \mathrm{sgn}\big)$ lorsqu'elle est définie ? Les fonction $\chi$ et sgn sont-elles continues ? dérivables ? Si on note $\chi'$ et $\mathrm{sgn}'$ les fonctions dérivées lorsqu'elles sont définies, calculer les produits de convolution $\chi' * \mathrm{sgn}$ et $\chi * \mathrm{sgn}'$. Que constatez-vous ?

**Exercice 7) Produit de convolution et équation différentielle**
On se donne deux réels $0 < a < b$. On pose $f(t) = \exp(-t\,a)\,H(t)$ où $H$ est la fonction de Heaviside définie au premier exercice de cette feuille. On pose aussi $g(t) = \exp(-t\,b)\,H(t)$. Calculer le procuit de convolution $f * g$ et représenter graphiquement cette fonction. Même question lorsque $b = a$. En déduire la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a\,y = 5\exp(-t\,a)$ avec la condition initiale $y(0) = 11$.