

Exercices pour la séance numéro 01

Exercice 1) Exponentielle

A partir de la relation générale $\exp(x + y) = (\exp x) (\exp y)$, montrer qu'on a
 $\exp 0 = 1$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

Exercice 2) Trigonométrie

Etablir les relations suivantes

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} .\end{aligned}$$

Exercice 3) Fonction réciproque

Montrer la relation $\frac{d}{dx} \operatorname{Arccos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 4) Intégration par parties

On désigne par k un entier supérieur ou égal à 1. Etablir les relations

$$\int_0^1 \theta \cos(2k\pi\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^1 \theta \sin(2k\pi\theta) d\theta = -\frac{1}{2k\pi}.$$

Exercice 5) Changement de variables dans une intégrale

Montrer qu'on a les égalités suivantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y} dy = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Exercice 6) Intégrale généralisée

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ est convergente et qu'elle vaut π .

Exercice 7) Equation différentielle

On désigne par a un nombre réel. Montrer que l'équation d'évolution

$$\frac{du}{dt} + a u(t) = 0$$

jointe à la condition initiale $u(0) = u_0$ entraîne que l'on a nécessairement

$$u(t) = \exp(-at) u_0$$

pour tout réel t .