Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Examen partiel du 11 mai 2012 (1 heure 30)

Les notes de cours sont autorisées. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Pour ce contrôle des connaissances, on se propose d'étudier une équation hyperbolique issue de la modélisation du trafic routier. On se donne $\alpha > 0$ et la fonction régulière $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

(1) $$f(v) = v\,(\alpha - v)\,, \quad v \in \mathbb{R}\,.$$

On cherche une fonction $u(x,\,t)$ à valeurs scalaires solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(f\big(u(x,\,t)\big)\Big) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0.$$

On se donne aussi une fonction $u^0(\bullet)$ qui sera explicitée plus loin. La condition initiale pour la fonction u s'écrit sous la forme

(3) $$u(x,\,0) = u^0(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) On cherche dans cette question une solution du problème de Cauchy (2)(3) par la méthode des caractéristiques.

a) Montrer que la solution éventuelle $u(x,\,t)$ solution de (2)(3) est constante le long des courbes caractéristiques qui satisfont à

(4) $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f'\big(u(x,\,t)\big)\,.$$

b) En déduire que les courbes caractéritiques sont des droites.

c) Pour $(x,\,t)$ donné dans $\mathbb{R} \times [0,\,+\infty[$, écrire une équation d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ qui permet de trouver la droite caractéristique qui passe par ce point.

2) On se donne $X > 0$ et on précise la condition initiale (3) avec le choix

(5) $$u^0(y) = \begin{cases} \alpha\,, & y \leq 0 \\ \alpha - \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{y}{X}\,, & 0 \leq y \leq X \\ \dfrac{\alpha}{2}\,, & y \geq X\,. \end{cases}$$

a) Calculer les expressions algébriques vérifiées nécessairement par une solution $u(x,\,t)$ du problème de Cauchy (2)(3)(5) pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. On pourra séparer les cas $x + \alpha\, t \leq 0$, $-\alpha\, t \leq x \leq X$ et $x \geq X$.

b) Cette fonction est-elle définie pour tout $t > 0$?
c) Vérifier que la fonction proposée en 2-a) est effectivement solution de (2)(3)(5).

3) Reprendre l'ensemble de la question précédente en remplaçant la relation (5) par

$$(6) \qquad u^0(y) = \begin{cases} 0\,, & y \leq 0 \\ \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{y}{X}\,, & 0 \leq y \leq X \\ \dfrac{\alpha}{2}\,, & y \geq X\,. \end{cases}$$

On pourra séparer trois cas $x \leq \alpha\, t$, $\alpha\, t \leq x \leq X$ et $x \geq X$.

4) On fait tendre X vers zéro dans la seconde question, c'est à dire qu'on remplace la condition initiale (5) par la relation

$$(7) \qquad u^0(y) = \begin{cases} \alpha\,, & y < 0 \\ \dfrac{\alpha}{2}\,, & y > 0\,. \end{cases}$$

a) Proposer une solution faible autosemblable du problème de Cauchy (2)(3)(7) en “recollant” deux états constants et une fonction de la forme $v(\frac{x}{t})$ qu'on précisera.
b) A l'aide de résultats vus en cours, vérifier que la fonction proposée en 4-a) est effectivement une solution faible du problème de Caucly (2)(3)(7).

5) On adopte le même passage à la limite (faire tendre X vers zéro) pour la condition initiale (6). On introduit donc u^0 de la forme

$$(8) \qquad u^0(y) = \begin{cases} 0\,, & y < 0 \\ \dfrac{\alpha}{2}\,, & y > 0\,. \end{cases}$$

a) Proposer une solution faible du problème de Cauchy (2)(3)(8) en “juxtaposant” deux états constants séparés par une ligne de discontinuité qu'on précisera.
b) Vérifier pour cette question aussi, à l'aide de résultats du cours, que la fonction proposée à la question 5-a) est effectivement une solution faible du problème de Caucly (2)(3)(8).

6) On introduit l'entropie mathématique suivante

$$(9) \qquad \eta(u) = \frac{u^2}{2}\,, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

a) Calculer une expression du flux d'entropie ξ associé à l'entropie η introduite à la relation (9).
b) La solution faible du problème de Cauchy (2)(3)(8) introduite à la question 6-a) peut-elle être solution entropique ?

FD, mai 2012.

Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs “Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique”
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Quelques éléments pour un corrigé de l'examen partiel du 11 mai 2012.

1) a) On a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[u(x(t),\, t)\big] \,=\, \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,+\, \frac{\partial u}{\partial t} \,=\, 0$
b) Donc $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,=\, f'\big(u_0(y)\big)$ où $y \equiv x(0)$ est le pied de la caractéristique.
c) Une droite caractéristique a pour équation $x \,=\, y + t\, f'\big(u_0(y)\big)$ c'est à dire $x = \alpha\, t \,+\, y - 2\, t\, u_0(y)$ en tenant compte de l'expression (1) de la fonction f.
2) a) On a après quelques lignes de calcul

$$(10) \qquad u(x,\, t) \,=\, \begin{cases} \alpha\,, & x \leq -\alpha\, t \\ \frac{\alpha}{2}\, \frac{2\,X - x + t\,\alpha}{X + t\,\alpha}\,, & -\alpha\, t \leq x \leq X \\ \frac{\alpha}{2}\,, & x \geq X\,. \end{cases}$$

3) a) De façon analogue,

$$(11) \qquad u(x,\, t) \,=\, \begin{cases} 0\,, & x \leq \alpha\, t \\ \frac{\alpha}{2}\, \frac{x - t\,\alpha}{X - t\,\alpha}\,, & \alpha\, t \leq x \leq X \\ \frac{\alpha}{2}\,, & x \geq X\,. \end{cases}$$

4) a) On injecte la représentation $u(x,\, t) \,=\, v(\frac{x}{t})$ au sein de la relation (2) et il vient

$$(12) \qquad \frac{1}{t}\, v'\big(\frac{x}{t}\big)\, \Big(f'(v) - \frac{x}{t}\Big) \,=\, 0\,.$$

On recolle la détente $v(\frac{x}{t}) = \frac{1}{2}\,\big(\alpha - \frac{x}{t}\big)$ avec les deux états constants $v_g \,=\, \alpha$ et $v_d \,=\, \frac{\alpha}{2}$ et la fonction demandée s'écrit

$$(13) \qquad u(x,\, t) \,=\, \begin{cases} \alpha\,, & x \leq -\alpha\, t \\ \frac{1}{2}\,\big(\alpha - \frac{x}{t}\big)\,, & -\alpha\, t \leq x \leq 0 \\ \frac{\alpha}{2}\,, & x \geq 0\,. \end{cases}$$

5) a) La vitesse σ de la discontinuité est donnée par la relation de Rankine et Hugoniot $[f(u)] \,=\, \sigma\,[u]$. Comme $u_g \,=\, 0$ et $u_d \,=\, \frac{\alpha}{2}$ on en déduit $\sigma \,=\, \frac{\alpha}{2}$. La solution discontinue est donc

$$(14) \qquad u(x,\, t) \,=\, \begin{cases} 0\,, & x < \frac{\alpha}{2} t \\ \frac{\alpha}{2}\,, & x > \frac{\alpha}{2} t\,. \end{cases}$$

6) a) Le flux d'entropie ξ satisfait à l'identité $\xi' \equiv \eta'\, f'$. Donc $\xi(u) = \frac{\alpha}{2}\, u^2 - \frac{2}{3}\, u^3$ à une constante additive près.
b) Le calcul de la dissipation d'entropie $\mathcal{D} \,\equiv\, \xi_d - \xi_g - \sigma\,(\eta_d - \eta_g)$ à travers la discontinuité est facile compte tenu des valeurs $\eta_d \,=\, \frac{\alpha^2}{8}$, $\xi_d \,=\, \frac{\alpha^3}{24}$ et zéro à gauche. On en déduit que pour cette discontinuité, $\mathcal{D} = \frac{\alpha^3}{24} - \frac{\alpha}{2}\,\frac{\alpha^2}{8} \,=\, -\frac{\alpha^3}{48} \leq 0$ et la discontinuité peut être admissible du point de vue de la condition d'entropie.