Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs “Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique”
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Examen du 26 juin 2013 (2 heures)

Ondes de détente pour le “p-système”

Les notes de cours sont autorisées. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

• Dans tout le problème, on désigne par γ une constante strictement supérieure à 1. Pour v variable strictement positive, on pose $p(v) = \frac{1}{\gamma\, v^\gamma}$.

1) Démontrer rapidement que la fonction p est d'une part strictement décroissante et d'autre part strictement convexe sur l'intervalle $]0,\, +\infty[$.

• Le “p-système” pour la dynamique des gaz est défini par les équations

$$(1) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \;=\; 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \;+\; \frac{\partial}{\partial x}(p(v)) \;=\; 0$$

avec des variables $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ et deux fonctions inconnues $v(x,\, t)$ et $u(x,\, t)$ telles que la fonction $v(x,\, t)$ vérifie $v(x,\, t) \,>\, 0$.

2) Montrer que le système (1)(2) peut s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} \;+\; \frac{\partial}{\partial x} f(W) \;=\; 0$$

avec $W \equiv (v,\, u)^{\mathrm{t}}$ et $f(W) \in \mathbb{R}^2$ une fonction que l'on précisera. On fera attention au fait que la lettre v est “avant” la lettre u dans l'écriture proposée pour le vecteur W.

3) Calculer la matrice jacobienne $A(W) \equiv \mathrm{d}f(W)$. Montrer qu'elle admet deux valeurs propres $\lambda_1(W)$ et $\lambda_2(W)$ distinctes et opposées.

4) Expliciter une expression pour les vecteurs propres $r_j(W) \equiv (X_j,\, Y_j)$ de la matrice $A(W)$ introduite à la question précédente.

5) Montrer qu'un invariant de Riemann $\beta_j(v,\, u)$ pour le champ numéro j, c'est à dire, avec la notation introduite à la question précédente, une fonction telle que

$$(4) \qquad X_j \, \frac{\partial \beta_j}{\partial v} \;+\; Y_j \, \frac{\partial \beta_j}{\partial u} \;=\; 0\,, \qquad \forall\, u,\, v$$

peut être cherché sous la forme

(5) $\qquad \beta_j(v,\, u) = u + \varphi_j(v)\,.$

Préciser les fonctions $\varphi_1(v)$ et $\varphi_2(v)$.

- On s'intéresse ici aux solutions régulières auto-semblables du système (1)(2):

(6) $\qquad W(x,\, t) = V\Big(\dfrac{x}{t}\Big)\,, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0\,.$

6) Montrer que si la fonction V n'est pas constante, alors il existe un entier j égal à 1 ou 2 tel qu'il existe une fonction $\alpha_j(\xi)$ de sorte que

(7) $\qquad \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} \,=\, \alpha_j(\xi)\, r_j\big(V(\xi)\big)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,,$

(8) $\qquad \lambda_j\big(V(\xi)\big) \,=\, \xi\,.$

7) En déduire que si β_j est un invariant de Riemann pour le champ numéro j, alors la fonction composée $\xi \longmapsto \beta_j\big(V(\xi)\big)$ est constante.

8) Soit $W_0 \equiv (v_0,\, u_0)^{\mathrm{t}}$ un état fixé. On cherche une solution du système (1)(2) continue, de la forme (6) pour $q \leq \frac{x}{t} \leq r$ et telle que

(9) $\qquad W(x,\, 0) \,=\, \begin{cases} W_0 \ \text{ si } \dfrac{x}{t} \,<\, q \\ W_1 \quad \text{ si } \dfrac{x}{t} \,>\, r\,. \end{cases}$

Si on note $W_1 \equiv (v_1,\, u_1)^{\mathrm{t}}$ l'état final de cette onde de détente et qu'on suppose $j = 1$, montrer que l'on a

(10) $\qquad u_1 = u_0 + \dfrac{2}{\gamma - 1}\Big(v_0^{\frac{1-\gamma}{2}} - v_1^{\frac{1-\gamma}{2}}\Big)$

(11) $\qquad q = -\Big(\dfrac{1}{v_0}\Big)^{\frac{\gamma+1}{2}}\,, \quad r = -\Big(\dfrac{1}{v_1}\Big)^{\frac{\gamma+1}{2}}$

(12) $\qquad v_1 \geq v_0\,, \quad u_1 \geq u_0\,.$

9) Cette question est la suite de la précédente. Tracer dans le plan $(v_1,\, u_1)$ la courbe de tous les états W_1 en aval de l'état fixé W_0 dans une onde de détente pour le champ numéro 1. Montrer qu'on a toujours $u_1 < z_0$ pour une valeur z_0 que l'on précisera.

10) Montrer que l'onde de détente pour le champ numéro 1 proposée à la question numéro 8 est toujours une fonction constante dans le quadrant $\{t > 0,\, x \geq 0\}$.

11) Reprendre les trois questions précédentes en remplaçant $j = 1$ par $j = 2$ et la relation (9) par

(13) $\qquad W(x,\, 0) \,=\, \begin{cases} W_2 \ \text{ si } \dfrac{x}{t} \,<\, q \\ W_0 \quad \text{ si } \dfrac{x}{t} \,>\, r\,. \end{cases}$

FD, 2002, 2005, 2006, juin 2013.

Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Question de cours du 26 juin 2013 (1 heure)

Les notes de cours sont interdites. Il sera tenu compte de façon essentielle de la précision des définitions et des théorèmes énoncés ainsi que de la rigueur dans les arguments proposés lors des preuves.

1) Soit f une fonction régulière de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Quand dit-on que le système d'équations

$$(1) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big[f(W)\big] = 0$$

est hyperbolique ?

2) Si le système (1) est hyperbolique, qu'appelle-t-on solution faible ?

3) Si une solution faible $W(x,\, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, quelle relation est satisfaite à travers une courbe régulière de discontinuité de vitesse σ ? Justifier rapidement votre réponse.

4) Qu'appelle-t-on entropie mathématique pour le système (1) ? Si on note η une telle entropie mathématique, quelle est la relation satisfaite par le flux d'entropie assicié ζ ?

5) Si $(W_g,\, W_d)$ est un couple d'états tels qu'une discontinuité décrite à la question 3 est présente, rappeler pourquoi la condition d'entropie prend la forme

$$(2) \qquad \mathcal{D} \leq 0\,, \quad \text{avec } \mathcal{D} \equiv \zeta(W_d) - \zeta(W_g) - \sigma\,\Big(\eta(W_d) - \eta(W_g)\Big)\,.$$

FD, juin 2013.