Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs “Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique”
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Examen du 06 mai 2010 (2 heures)

Les notes de cours sont autorisées. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Dans ce problème, on étudie le **système de l'acoustique advective linéaire**.

On se donne deux constantes ρ_0 et c_0 strictement positives pour l'ensemble du problème et u_0 une constante dont le signe n'est pas fixé. Le système de l'acoustique advective linéaire est un système de type Saint Venant d'inconnues ρ (densité), u (vitesse normale) et v (vitesse tangentielle). Il s'écrit

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{c_0^2}{\rho_0} \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0\,. \end{array} \right.$$

1) Ecrire le système (1) sous la forme

$$(2) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = 0\,,$$

où W est le vecteur des inconnues $(\rho,\, u,\, v)^{\mathrm{t}}$ et A une matrice que l'on précisera.

2) Montrer que les trois valeurs propres λ_-, λ_0 et λ_+ de la matrice A s'écrivent

$$(3) \qquad \lambda_- \equiv u_0 - c_0, \quad \lambda_0 \equiv u_0, \quad \lambda_+ \equiv u_0 + c_0.$$

3) Calculer une valeur possible pour chacun des trois vecteurs propres r_-, r_0 et r_+.

4) Calculer les trois composantes φ_-, φ_0 et φ_+, d'un vecteur $W \equiv (\rho,\, u,\, v)^{\rm t}$ arbitraire :

(4) $$W \,=\, \varphi_- \, r_- \,+\, \varphi_0 \, r_0 \,+\, \varphi_+ \, r_+ \,.$$

• On se donne deux états arbitraires $W_g \equiv (\rho_g,\, u_g,\, v_g)^{\rm t}$ et $W_d \equiv (\rho_d,\, u_d,\, v_d)^{\rm t}$; on forme la condition initiale (discontinue) $W_0(x)$ selon

(5) $$W_0(x) \,=\, \left\{ \begin{array}{ll} W_g \,, & x < 0 \\ W_d \,, & x > 0 \,. \end{array} \right.$$

On cherche à résoudre le problème de Riemann associé au système (1), c'est à dire le système d'évolution (1) associé à la condition initiale

(6) $$W(x,\, 0) \,=\, W_0(x) \,, \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

5) Comment est-il possible de donner un sens au problème (1)(6) ?

6) Montrer qu'une solution du problème de Riemann (1)(6) peut s'écrire

(7) $$W(x,\, t) \,=\, \left\{ \begin{array}{ll} W_g \,, & x < \lambda_- \, t \\ W_1 \,, & \lambda_- \, t < x < \lambda_0 \, t \\ W_2 \,, & \lambda_0 \, t < x < \lambda_+ \, t \\ W_d \,, & x > \lambda_+ \, t \,. \end{array} \right.$$

7) Expliciter les trois composantes des deux états intermédiaires W_1 et W_2.

8) Expliciter le flux $\Phi(W_g,\, W_d)$ du schéma de Godunov relatif au système (1) avec des données (6). On pourra discuter la forme algébrique de cette expression en fonction du signe des trois valeurs propres précisées à la relation (2).

Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Proposition de corrigé de l'examen du 6 mai 2011.

1) La matrice A s'explicite sans difficulté :

(C1) $$A = \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 \\ c_0^2/\rho_0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} .$$

2) Les valeurs propres de la matrice A satisfont à la relation

(C2) $$(u_0 - \lambda)\Big((u_0 - \lambda)^2 - c_0^2\Big) = 0$$

ce qui montre la propriété proposéee.

3) On a clairement

(C2) $$r_- = (\rho_0,\, -c_0,\, 0)^{\mathrm{t}}\,, \quad r_0 = (0,\, 0,\, c_0)^{\mathrm{t}}\,, \quad r_+ = (\rho_0,\, c_0,\, 0)^{\mathrm{t}}.$$

4) Après un calcul élémentaire, on a

(C3) $$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{u}{c_0}\Big)\begin{pmatrix} \rho_0 \\ -c_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v}{c_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{u}{c_0}\Big)\begin{pmatrix} \rho_0 \\ c_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

(C4) $$\varphi_- = \frac{1}{2}\Big(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{u}{c_0}\Big)\,, \quad \varphi_0 = \frac{v}{c_0}\,, \quad \varphi_+ = \frac{1}{2}\Big(\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{u}{c_0}\Big)$$

avec les notations introduites plus haut.

5) Il est nécessaire d'utiliser la notion de solution faible, puisque la condition initiale (6) est discontinue. Voir le cours pour la définition précise.

6) Quand on introduit la représentation (4) au sein de l'équation (1), il vient

(C5) $$\frac{\partial \varphi_-}{\partial t} + \lambda_- \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial \varphi_+}{\partial t} + \lambda_+ \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} = 0\,,$$

et le problème de Riemann (1)(6) se réduit à trois équations d'advection découplées. La représentation (7) s'en déduit alors, compte tenu de ce qui a été vu en cours sur la résolution de l'équation d'advection pour le problème de Riemann. Si on décompose l'écart $W_d - W_g$ sur la base des vecteurs propres, c'est à dire

(C6) $$W_d - W_g = \alpha_- \, r_- + \alpha_0 \, r_0 + \alpha_+ \, r_+ \,,$$

on a simplement

(C7) $\quad W_1 \,=\, W_g + \alpha_- \, r_- \,, \quad W_2 \,=\, W_g + \alpha_- \, r_- + \alpha_0 \, r_0 \,=\, W_d - \alpha_+ \, r_+ \,.$

7) On explicite les deux états intermédiaires W_1 et W_2 à l'aide des relations (C4) et (C6). On a d'abord

$$\text{(C8)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_- &=& \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\rho_d - \rho_g}{\rho_0} - \dfrac{u_d - u_g}{c_0} \Big) \\ \alpha_0 &=& \dfrac{v_d - v_g}{c_0} \\ \alpha_+ &=& \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\rho_d - \rho_g}{\rho_0} + \dfrac{u_d - u_g}{c_0} \Big) \end{array} \right.$$

puis les composantes s'en déduisant sans difficulté :

$$W_1 \,=\, \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(\rho_g + \rho_d) - \dfrac{\rho_0}{2\,c_0}(u_d - u_g) \\ \dfrac{1}{2}(u_g + u_d) - \dfrac{c_0}{2\,\rho_0}(\rho_d - \rho_d) \\ v_g \end{pmatrix} , \quad W_2 \,=\, \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(\rho_g + \rho_d) - \dfrac{\rho_0}{2\,c_0}(u_d - u_g) \\ \dfrac{1}{2}(u_g + u_d) - \dfrac{c_0}{2\,\rho_0}(\rho_d - \rho_d) \\ v_d \end{pmatrix} .$$

8) Si $u_0 > c_0$, c'est à dire $\lambda_- > 0$, l'état de Godunov est égal à W_g donc $\Phi(W_g,\, W_d) \,=\, A\, W_g$. Si $u_0 < c_0$ et $u_0 > 0$, c'est à dire $\lambda_- < 0 < \lambda_0$, on a $\Phi(W_g,\, W_d) \,=\, A\, W_1$. Si $u_0 < 0$ et $u_0 > -c_0$, c'est à dire $\lambda_0 < 0 < \lambda_+$, le flux en $\frac{x}{t} = 0$ est donné par $\Phi(W_g,\, W_d) = A\, W_2$. Enfin pour $u_0 < -c_0$, c'est à dire $\lambda_+ < 0$, toutes les ondes sont décentrées sur la droite et $\Phi(W_g,\, W_d) = A\, W_d$.

FD, mai 2011.