Université Paris Sud — Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique — 02 octobre 2009

Minimisation et algorithme de Newton

1) Méthode du gradient pour une fonctionnelle quadratique.

- Soit $J:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction assez régulière. Afin de minimiser la fonction $J(\bullet)$ sur $\mathbb{R}^2$, on utilise la méthode du gradient qui consiste à se donner un point initial $u^0 \in \mathbb{R}^2$, un coefficient $\rho > 0$ et à calculer u^{k+1} à partir de u^k à l'aide de la relation suivante, qui définit l'algorithme du gradient simple :

(1) $\quad u^{k+1} \,=\, u^k \,-\, \rho\,\nabla J\big(u^k\big)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

- Programmer cet algorithme classique pour une fonction quadratique J de votre choix. On représentera à chaque itération d'une part l'état u^k et d'autre part le segment $\big[u^k\,,\,u^{k+1}\big]$.
- Pourquoi le paramètre $\rho > 0$ ne doit-il pas être choisi trop grand ?

2) Minima locaux

- On pose

(2) $\quad J(x,\,y) \,=\, -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2}\,y + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4+y^4}{4}$

Reprendre la première question avec cette fonction J (qui n'est pas quadratique !) et les valeurs suivantes des paramètres :

(3) $\quad u^0 \,=\, \Big(-3\,,\,\dfrac{1}{2}\Big)\,; \quad \rho = 0,06$

(4) $\quad u^0 \,=\, \Big(3\,,\,0\Big)\,; \quad \rho = 0,06\,.$

Que constate-t-on ?

• Montrer que, sauf pour un cas facile à traiter de façon analytique, la recherche des minima de la fonction J se remène à celle des zéros de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$(5) \quad f(x,\, y) \,=\, \begin{pmatrix} x^2 + x - y - 1 \\ -\frac{x^2}{2} + y + y^3 \end{pmatrix} .$$

• Déterminer tous les zéros de la fonction f à l'aide d'un algorithme de type "Newton"

$$(6) \quad u^{k+1} \,=\, u^k \,-\, \omega \left(\mathrm{d}f(u^k) \right)^{-1} \bullet f(u^k)\,,$$

où $0 < \omega \leq 1$ est un paramètre de relaxation qui sera fixé au mieux.

• Proposer une vérification graphique de ce résultat et une synthèse concernant l'étude globale des minima de la fonction J.

FD, 28 septembre 2009.