Ecole Polytechnique
Sciences de l'Ingénieur et Calcul Scientifique
Cours de Mathématiques Appliquées

Rappels d'Analyse

François Dubois
Laurence Halpern
Patrick Joly
Professeurs chargés de Cours

janvier 2000.

Chapitre 1

Distributions

- Motivation
- Espaces de fonctions infiniment dérivables sur Ω
- Autour de la masse de Dirac
- Définition des distributions
- Passage à la limite
- Multiplication
- Dérivation

François Dubois, janvier 2000, édition août 2007, 23 pages.

(I) Distributions.

1) Motivation

- La notion de fonction d'une ou plusieurs variables réelles la plus classique est en fait la notion d'application ou de champ. Si Ω est (pour fixer les idées) un ouvert de $\mathbb{R}^N$, une fonction réelle f sur Ω est une application

$$(1.1) \qquad \Omega \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}.$$

A chaque point x, on sait évaluer la valeur numérique du champ $f(\cdot)$.

- Cette notion traditionnelle de fonction doit être revue si on utilise la notion moderne d'intégration au sens de Lebesgue. Pour donner un sens à l'intégrale $\int_\Omega f(x)\,dx$ ou à la norme L^2 de f :

$$(1.2) \qquad \|f\|_0^2 = \int_\Omega |f|^2(x)\,dx$$

on sait (voir par exemple le chapitre "Intégration" du cours d'Analyse de JM Bony) qu'il suffit que la valeur numérique $f(x)$ soit définie "presque partout" sur Ω. Cette notion est nécessaire, elle permet de faire des espaces $L^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ des espaces de Banach, espaces vectoriels normés complets pour la norme $L^1(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega |f(x)|\, dx \in \mathbb{R}$ et (1.2) respectivement. De plus, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert ; le produit scalaire

$$(1.3) \qquad (f,g) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$$

permet d'y faire de la "géométrie" comme dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ habituel"

- Le prix à payer est qu'on ne dispose plus de la valeur ponctuelle $f(x)$ pour tout x de l'ouvert Ω. Par contre pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ [ie pour tout compact $K \subset \Omega$, $f|_K \in L^1(K)$, l'intégrale $\int_K |f(x)|\, dx$ est finie donc $\int_K f(x)\, dx$ a un sens] et $x \in \Omega$, on dispose de valeurs moyennes de f dans un voisinage compact $V(x)$ de mesure arbitrairement petite

$$(1.4) \qquad \langle f \rangle_{V(x)} = \frac{1}{|V(x)|} \int_{V(x)} f(y)\, dy .$$

Si on introduit la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{V(x)}$ du voisinage $V(x)$, la relation (1.4) s'écrit encore

$$(1.5) \qquad \langle f \rangle_{V(x)} = \frac{1}{|V(x)|} \int_\Omega f(y)\, \mathbb{1}_{V(x)}(y)\, dy .$$

Pour évaluer $f(\bullet)$ au point x, on calcule une moyenne telle que (1.5) ; ce faisant, on fait agir $f(\bullet)$ contre la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{V(x)}$.
Les valeurs ponctuelles n'ont plus d'intérêt en tant que telles ; ce qui importe est la façon

dont $f(\cdot)$ agit sur d'autres fonctions

2) Espace des fonctions infiniment dérivables sur Ω.

- Nous définissons rapidement dans ce paragraphe l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ (noté aussi $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$) des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ et à support compact dans Ω. C'est l'ensemble des fonctions "sur lesquelles vont agir" de nouvelles fonctions "généralisées", ou distributions.

- Si $\Omega \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}$ est une fonction (une application !) définie sur Ω, son support $\operatorname{supp}\varphi$ est l'adhérence de l'ensemble des points x où elle n'est pas nulle :

(1.6) $\quad \operatorname{supp}\varphi = \operatorname{adh}_{\mathbb{R}^N}\Big[\{x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}\Big]$.

On dit que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est à support compact dans l'ouvert Ω si il existe un compact K inclus dans Ω tel que le support de φ soit inclus dans K :

(1.7) $\quad \operatorname{supp}\varphi$ compact : $\exists K$ compact $\subset \Omega$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$

- Par définition, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables (de classe $\mathcal{C}^\infty$) dont le support est un compact de K

(1.8) $\quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \begin{cases} \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \\ \exists K \text{ compact} \subset K, \ \operatorname{supp}\varphi \subset K. \end{cases}$

Une question naturelle est de savoir si il existe de telles fonctions. La réponse est <u>oui</u>. On considère par exemple un point $a \in \Omega$ et un réel $R>0$ assez petit de sorte que la boule de centre a et de rayon R soit incluse dans l'ouvert Ω. On pose

$$(1.9) \qquad \varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x-a|^2 - R^2}\right) & \text{si } |x-a|<R \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

C'est un exercice classique de vérifier que φ_a est infiniment dérivable sur Ω ; son support est la boule fermée de centre a et rayon R. Donc $\varphi_a \in \mathcal{D}(\Omega)$.

- Les fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sont infiniment dérivables. Pour un multi indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, i.e.

$$(1.10) \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N, \quad \alpha_j \in \mathbb{N}$$

on introduit sa longueur $|\alpha|$:

$$(1.11) \qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$$

et la dérivée de φ d'ordre α :

$$(1.12) \qquad (\partial^\alpha \varphi)(x) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x^{\alpha_N}}\right)\varphi(x), \quad x \in \Omega.$$

L'opérateur de dérivation ∂^α est bien défini de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$

- La <u>topologie</u> de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est (très) compliquée à définir et à manipuler (on ne peut pas tout avoir ! A la fois un espace qui sa-

-li lisé la dérivation à tout ordre et qui serait associé à une distance $d(\cdot,\cdot)$ pour définir une topologie sous-jacente). En pratique, on a besoin de définir la convergence d'une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sous les deux conditions suivants

$$\boxed{(1.13) \quad \exists K \text{ compact } \subset \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathrm{supp}\, \varphi_n \subset K}$$

(le support des fonctions φ_n est dans un compact fixe de Ω) et

$$\boxed{(1.14) \quad \begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \ \partial^\alpha \varphi_n \text{ converge uniformement vers} \\ \partial^\alpha \varphi \text{ sur le compact } K. \end{cases}}$$

($\sup_{x\in K} \{|\partial^\alpha \varphi_n - \partial^\alpha \varphi|(x)\}$ tend vers 0 si $n \to \infty$, ce pour tout multiindice α). De plus, l'opérateur ∂^α est continu $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$

- La convergence de φ_n vers φ dans l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est une notion très forte (convergence de la fonction et de toutes ses dérivées; "enfermement" dans un même compact K). Par contre, si on remarque d'abord que

$$(1.15) \qquad \mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

on peut, pour une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, étudier sa convergence non pour la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$, mais pour celle de $L^2(\Omega)$, ie associée à la norme (1.2). En fait, pour f donnée de façon arbitraire dans $L^2(\Omega)$, on peut trouver une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge (dans $L^2(\Omega)$) vers f. L'espace

$\mathcal{D}(\Omega)$ [dont on se demandait si il est vide ou pas!] est en fait un gros sous espace de $L^2(\Omega)$, c'est un sous-espace dense de $L^2(\Omega)$ (figure 1)

(1.16) $$\mathrm{adh}_{L^2}\{\mathcal{D}(\Omega)\} = L^2(\Omega)$$

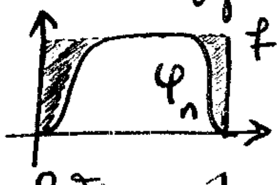


Figure 1

ce qui signifie aussi

$$\boxed{(1.17) \quad \forall f \in L^2(\Omega), \exists \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega), \ \|f-\varphi_n\|_0 \to 0 \text{ si } n \nearrow \infty}$$

☐ on prendra garde de bien préciser lorsqu'on a "$\varphi_n \to \varphi$" si c'est pour la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ (auquel cas on a (1.13) et (1.14) et φ est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$) ou pour celle de $L^2(\Omega)$ [pour fixer les idées ici], auquel cas on a $\int_\Omega |\varphi_n - \varphi|^2 dx \to 0$ et φ peut être une fonction de $L^2(\Omega)$ arbitraire!

- Une conséquence de la propriété (1.16) est la caractérisation suivante de la fonction nulle :

(1.18) $$\left(f \in L^2, \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\right) \Rightarrow (f=0) \ ;$$

si le produit scalaire de $f \in L^2(\Omega)$ par une fonction infiniment dérivable à support compact arbitraire est nul, alors f est nulle. La preuve de cette propriété est élémentaire à partir de la relation (1.17). On décompose la norme de f sous la forme

$$\|f\|_0^2 = \int_\Omega f\,(f-\varphi_n)\,dx + \int_\Omega f\varphi_n\,dx$$

où $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ est une suite qui approche f pour la topologie $L^2(\Omega)$ (ie φ_n vérifie (1.17)). Compte tenu de (1.18), l'intégrale $\int_\Omega f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ est nulle, et, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la relation précédente montre que

$$\|f\|_0^2 \leq \|f\|_0 \, \|f-\varphi_n\| \text{ qui tend vers zéro si } n \nearrow \infty,$$

ce qui établit que f est nulle. □

- Plus généralement, si f, g sont deux fonctions appartenant à $L^1_{loc}(\Omega)$, l'égalité

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

entraîne $f=g$. On touche du doigt ce qui était annoncé dans l'introduction. deux fonctions sont <u>égales</u> (ici deux fonctions de $L^1_{loc}(\Omega)$) si elles agissent de la même façon sur les fonctions très régulières $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est entièrement caractérisée par la donnée des intégrales

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad , \; f \in L^1_{loc}(\Omega),\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

qui remplacent dans ce contexte les valeurs ponctuelles $x \mapsto f(x)$ du champ $f(\bullet)$. Nous retenons

$$\boxed{(1.19)\left\{ \forall f, g \in L^1_{loc}(\Omega), \left(\int_\Omega f\varphi\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right) \Longrightarrow (f=g) \right.}$$

3) Autour de la masse de Dirac

- Nous regardons dans ce paragraphe quelques limites singulières du point de vue des fonctions classiques, qui motivent l'extension qui sera donnée au paragraphe suivant.
- On regarde d'abord sur $\mathbb{R}^N$ la fonction $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur la boule $B(0,1/n)$ égale à une constante, nulle ailleurs, et d'intégrale 1 :

$$(1.20) \qquad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|B(0,1/n)|} & \text{si } x \in B(0,1/n) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $|B(0,1/n)|$ est le volume dans $\mathbb{R}^N$ de $B(0,1/n)$.

Pour $x \neq 0$ fixé, $f_n(x)$ converge simplement vers 0 et $f_n(0)$ tend vers l'infini. Donc si f_n tend vers une fonction f dans un espace classique de fonctions (par exemple L^2), la limite simple coïncide nécessairement avec la limite fonctionnelle, ce qui entraîne que f est identiquement nulle.
Pourtant, si φ est une fonction infiniment dérivable à support compact dans $\mathbb{R}^N$, elle est continue sur $\mathbb{R}^N$ et on a

$$(1.21) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|B(0,1/n)|}\int_{B(0,1/n)} \varphi(x)\,dx \to \varphi(0). \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En effet, la différence $\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)$ s'écrit aussi $\frac{1}{|B(0,1/n)|}\int_{B(0,1/n)} (\varphi(x)-\varphi(0))\,dx$, donc

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \leq \frac{1}{|B(0,1/n)|}\sup_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|\int_{B(0,1/n)}|x|\,dx$$

$$\leq \frac{C_N}{n}\sup_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|$$

et la relation (1.21) est établie. Nous verrons plus loin qu'on ne peut pas écrire $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $f(\cdot)$ fonction donnée de $L^1_{loc}(\Omega)$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ résiste à cette première tentative de convergence.

- on s'intéresse ensuite à la dérivée de la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$. A partir des valeurs ponctuelles, cette fonction est dérivable partout sauf en $x=0$ et sa dérivée peut s'exprimer à l'aide de la fonction $H(\bullet)$ de Heaviside

$$\boxed{(1.22) \qquad H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}}$$

on a

$$(1.23) \qquad \frac{d}{dx}|x| = -1 + 2\,H(x) \qquad x \neq 0 .$$

- si on essaie de dériver une fois de plus on peut par exemple régulariser la fonction donnée à la relation (1.23) avec une fonction affine continue g_k :

$$(1.24) \qquad g_k(x) = \begin{cases} -1 & x < -1/k \\ kx & |x| \leq 1/k \\ +1 & x > 1/k \end{cases} .$$

La dérivée de g_k se calcule facilement et on trouve

$$(1.25) \qquad \frac{dg_k}{dx} = 2\, f_k , \qquad k \geq 1$$

où $f_k(\bullet)$ a été défini à la relation (1.20) dans $\mathbb{R}^N$.
Comme f_k n'a a priori pas de limite, il faut renoncer dans le cadre de la notion classique de fonction à donner un sens à la dérivée seconde de la fonction valeur absolue.

4) Définition des distributions

- Par définition, une distribution T est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans l'ouvert Ω :

(1.26) $\quad T : \mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$.

La notion de "forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$" n'est pas facile à définir et n'a pas besoin d'être parfaitement maîtrisée en pratique pour aller vers les applications. Nous renvoyons au Cours d'Analyse de J. M. Bony ou au traité de référence de L. Schwartz (Distributions, Hermann).

- Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$, ie

(1.27) $$\begin{cases} \langle T, \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle + \mu \langle T, \varphi_2 \rangle \\ \qquad\qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \end{cases}$$

est pour nous une distribution sur Ω, et on écrit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si, pour toute suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ convergeant au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$ vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ [voir les deux conditions (1.13) et (1.14)], la suite numérique $\langle T, \varphi_n \rangle$ converge vers le nombre $\langle T, \varphi \rangle$.

(1.28) $\quad T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; \quad \forall \varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$

La continuité est donc exprimée dans le cadre restrictif de stabilité de T lors du passage à la limite dans l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$.

• La première propriété à vérifier est que les distributions généralisent la notion de fonction. En effet, toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ [et en particulier toute fonction $f \in L^2(\Omega)$] définit une distribution T_f {notation qui cèdera sa place au chapitre suivant pour la simple lettre "f"} via la condition

$$(1.29) \quad \langle T_f , \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

Si φ_n tend, dans $\mathcal{D}(\Omega)$, vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, les intégrales sur Ω au second membre de la relation (1.29) sont en fait à considérer sur un compact fixé K (condition (1.13)) et la suite φ_n converge uniformément sur K vers la fonction continue φ (condition (1.14)). Par suite la suite $(f\varphi_n)$ converge dans $L^1(K)$ vers $(f\varphi)$:

$$\int_K |f\varphi_n - f\varphi|\,dx \leq \left(\sup_K |\varphi_n - \varphi|\right) \int_K |f|\,dx$$

qui est arbitrairement petit pour n assez grand et T_f est bien "continue" au sens que nous avons défini à la relation (1.28). On a donc l'inclusion

$$(1.30) \qquad L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

via la définition (1.29) :

$$(1.31) \qquad L^1_{loc}(\Omega) \ni f \longmapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega) .$$

- Le second exemple est issu des remarques du paragraphe 3 et permet d'introduire la <u>masse de Dirac</u> δ_a. Soit a un point arbitraire de l'ouvert Ω $(\Omega \subset \mathbb{R}^N)$. On pose [suivant Dirac (1930)] :

$$(1.32) \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ a \in \Omega.$$

La relation (1.32) définit une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors pour tout point $a \in \Omega$, $\varphi_n(a)$ converge vers $\varphi(a)$ puisqu'on a convergence uniforme de φ_n dans tout compact de Ω, donc $\langle \delta_a, \varphi_n \rangle$ converge vers $\langle \delta_a, \varphi \rangle$ et δ_a est bien une distribution : $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

- On peut généraliser cet exemple avec un peu plus de géométrie. Soit Γ une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^N$ incluse dans Ω (Γ est une courbe ou une surface incluse dans Ω pour fixer les idées). Alors δ_Γ est la <u>mesure</u> superficielle portée par Γ :

$$(1.33) \quad \langle \delta_\Gamma, \varphi \rangle = \int_\Gamma \varphi(x)\, d\gamma(x) \quad , \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On intègre φ sur la variété Γ. C'est une opération linéaire. Si φ_n converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, la convergence est uniforme sur tout compact, donc sur Γ et les intégrales $\int_\Gamma \varphi_n \, d\gamma$ convergent vers l'intégrale $\int_\Gamma \varphi \, d\gamma$.

- Le point essentiel à remarquer est que la masse de Dirac δ_a [et plus généralement toute mesure superficielle δ_Γ] n'est *pas* une fonction, c'est à dire n'est *pas* une distribution de la forme T_f introduite à la relation (1.29)

(1.34) $\quad \forall a \in \Omega, \; \forall f \in L^1_{loc}(\Omega), \; \delta_a \neq T_f$.

Imaginons qu'on puisse représenter la masse de Dirac δ_a (relation (1.32)) par une distribution T_f (relation (1.29)). On a alors

$$\int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(a) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Considérons l'ouvert Ω' obtenu en enlevant le point a de l'ouvert Ω :

(1.35) $\qquad \Omega' = \Omega \setminus \{a\}$.

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$, alors φ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ après extension par 0 au point a. La fonction f appartient indifféremment à $L^1_{loc}(\Omega)$ ou $L^1_{loc}(\Omega')$ [le singleton $\{a\}$ est de mesure nulle !] et la condition $\int_{\Omega'} f \varphi\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$) entraîne que f est nulle, compte tenu de la caractérisation de $f \in L^1_{loc}$ par ses intégrales $\int f \varphi\, dx$ vue en (1.13). Comme $\{a\}$ est de mesure nulle, il est équivalent de dire que $f = 0$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$ ou $L^1_{loc}(\Omega')$.
Mais alors $\langle \delta_a, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ce qui contredit la définition (1.32) ! $\square$

5) Passage à la limite

- De même qu'il est fondamental de pouvoir définir la limite dans $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une suite de fonctions φ_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, la limite T d'une suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à l'aide de la topologie de l'espace dual. De façon précise, si $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une suite de distributions et T une distribution fixée dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on dit que T_n tend vers T pour $n \to \infty$ si, pour toute fonction "test" $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge vers le nombre $\langle T, \varphi \rangle$:

$$(1.36)\ \begin{cases} (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega) \text{ converge vers } T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ si } n \to \infty \end{cases}$$

- On dispose même d'un critère suffisant de convergence au sens précédent : si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite réelle, on note $\langle T, \varphi \rangle$ cette limite. Alors T est une distribution ie est en fait continue sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$. Ce critère permet de définir des distributions comme limites d'autres distributions T_n, pourvu que la suite $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge simplement (ie pour toute fonction test φ).

$$(1.37)\ \begin{cases} \text{Si } T_n \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \langle T_n, \varphi \rangle \to \text{limite réelle},\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \\ \text{Alors } T \text{ défini par } \langle T, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle \text{ appartient} \\ \text{à } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

- on peut revenir sur l'exemple proposé au paragraphe 3. La suite f_n définie par la relation (1.20) est telle que $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle$ converge vers $\varphi(0)$ (relation (1.21)). Donc elle a une limite au sens des distributions, et cette limite (la masse δ_0 de Dirac à l'origine) est elle-même une distribution, compte tenu de la relation (1.37). L'impasse dans laquelle nous nous trouvions (la suite de fonctions f_n ne peut converger que vers la fonction nulle) laisse la place à un résultat positif : la suite de distributions T_{f_n} converge vers la masse de Dirac en 0 (cf (1.21)) :

$$(1.38) \qquad T_{f_n} \to \delta_0 \quad \text{si } n \to \infty, \; f_n \text{ donné en (1.20)}.$$

- Un autre exemple moins simple de distribution est la ~~valeur~~ principale de Cauchy de $1/x$. On pose d'abord

$$(1.39) \qquad \langle T_n, \varphi\rangle = \int_{|x| \geq 1/n} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

et, compte tenu de la relation

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{1/n}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx, \quad n \geq 1, \; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

la suite $\langle T_n, \varphi\rangle$ converge, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, vers un nombre réel qui est par définition la valeur principale de $1/x$:

(1.40) $\langle VP1/x, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq 1/n} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

La relation (1.37) et la remarque précédente assurent que $VP1/x \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

- D'un point de vue plus général, la convergence dans l'espace des distributions est une conséquence de la convergence dans les espaces L^2 et L^1_{loc} :

(1.41) $\left(f_n \to f \text{ dans } L^1_{loc} \{\text{resp } L^2\}\right) \Rightarrow \left(T_{f_n} \to T_f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right)$

Lorsque $f_n \to f$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$, l'intégrale $\int_K |f_n - f|\,dx$ tend vers 0 sur tout compact fixé de Ω. On a donc, quitte à agrandir K de façon à ce qu'il contienne le support de φ :

$$\left|\int_\Omega (f_n - f)\varphi\,dx\right| \leq \int_K |f_n - f|\,|\varphi|\,dx \leq (\sup_K|\varphi|)\int_K |f - f_n|$$

qui établit la propriété lorsque f_n converge vers f dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^2(\Omega)$, la propriété résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\int_\Omega (f_n - f)\varphi\,dx\right| \leq \|f - f_n\|_0\, \|\varphi\|_0$ □

6) Multiplication

- On peut multiplier une distribution T par une fonction très régulière f (techniquement $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, f est infiniment dérivable mais son support n'est pas a priori compact dans l'ouvert Ω). On procède d'abord formellement, "comme si" la distribution T était une fonction

★ • On a même un résultat plus fin de convergence. Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $L^1_{loc}(\Omega)$ qui converge presque partout vers f et telle qu'il existe $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$|f_k(x)| \leqslant g(x) \quad pp(x), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

alors la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens des distributions.

Ce résultat étend le théorème de convergence dominée de Lebesgue, où l'on suppose $f_k \in L^1(\Omega)$ au lieu de $L^1_{loc}(\Omega)$ et $g \in L^1(\Omega)$ également.

ordinaire $x \mapsto T(x)$) :

$$\int_\Omega (f(x)\,T(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega T(x)\ (f(x)\,\varphi(x))\,dx\ ,$$

utilisant là les propriétés usuelles de commutativité et d'associativité de la multiplication des nombres réels. Compte tenu de la relation précédente, il est naturel de poser

$$(1.42)\quad \langle (fT), \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle\ ,\ T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ f \in \mathcal{E}^\infty(\Omega),\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ .$$

- Le membre de droite de la relation (1.42) a un sens car pour $f \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, le produit $(f\varphi)$ est à support compact et est indéfiniment dérivable, donc appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. Il est facile de vérifier que $\varphi \mapsto \langle T, f\varphi \rangle$ définit bien une distribution, car si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, le produit $f\varphi_n$ tend vers $f\varphi$ dans le même espace. □

- on a aussi stabilité du produit $f_n T_n$ lorsque f_n tend vers f uniformément ainsi que toutes ses dérivées sur tout compact de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors le théorème assure que ~~le produit $f_n T_n$ tend vers fT dans $\mathcal{D}'(\Omega)$~~ :

$$(1.43)\ \left\{ \begin{aligned} &\Big(\big(f_n \to f \text{ dans } \mathcal{E}^\infty(\Omega)\ [\ \partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f \text{ uniformement sur tout compact de } \Omega,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N] \text{ et } T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \big) \\ &\quad \Longrightarrow (f_n T_n \to f T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)) \Big). \end{aligned} \right.$$

- Un résultat à méditer en fin de paragraphe : si f n'est pas régulière ou $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, le produit fT n'a pas de sens dans la théorie exposée ici.

7) Dérivation.

- On procède avec la dérivation comme pour la multiplication, avec en tête que la dérivation doit étendre les relations que l'on connaît bien pour les fonctions dérivables. Or si f et φ sont deux fonctions régulières continûment dérivables sur $\overline{\Omega}$, on dispose de la formule de Green $\quad f, \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$(1.44) \qquad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx + \int_{\partial\Omega} f\varphi n_j\,d\sigma(x)$$

où le bord $\partial\Omega$ est supposé "assez régulier" et n_j désigne la normale extérieure au domaine Ω. Lorsque φ est infiniment dérivable et à support compact dans Ω $(\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$, le terme de bord du membre de droite de (1.44) est nul, et on a simplement :

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx, \quad f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

- La relation ci-dessus prend un sens dès que membre de droite de la $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, donc pour une distribution de la forme T_f. Le fait qu'elle demeure vraie pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ consiste à faire un choix précis pour la dérivée au sens des distributions d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ arbitraire.

Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit sa dérivée $\partial T/\partial x_j$ par la relation suivante

$$\boxed{(1.45) \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \; T \in \mathcal{D}'(\Omega), \; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$$

Le membre de droite de (1.45) définit bien une distribution car l'opérateur de dérivation $\partial/\partial x_j$ est linéaire <u>continu</u> de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (comme on l'a vu en (1.14)).

- Le premier test de cohérence de la relation (1.45) consiste à vérifier que pour f régulière ($f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset L^1_{loc}(\Omega)$) la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_j} T_f$ coïncide bien avec la distribution "affectée" à la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

$$(1.46) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}} \quad , \; f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) .$$

Cette propriété est claire compte tenu de (1.23), (1.44) et (1.45) ; la dérivée des distributions généralise bien la dérivée usuelle des fonctions régulières.

- La question suivante est liée à l'exploration de l'itération de la relation (1.45). On peut dériver la distribution $\partial T/\partial x_j$ par rapport à $\partial/\partial x_k$, et recommencer encore ! Les distributions sont toutes infiniment dérivables (!) et on a

$$(1.47) \left\{ \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \; T \in \mathcal{D}'(\Omega), \; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \; \alpha \in \mathbb{N}^N . \right.$$

Donc pour toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, la distribution T_f est infiniment dérivable (appliquer la relation (1.47) !) et on retient que <u>toute fonction $f \in L^1_{loc}$ est indéfiniment dérivable au sens des distributions</u>

- On ne résiste alors pas à la tentation de dériver deux fois la fonction "valeur absolue" (cf (1.23)), donc de dériver la fonction de Heaviside (relation (1.22)). On a le calcul suivant :

$$\left\langle \frac{dH}{dx}, \varphi \right\rangle = -\left\langle H, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle = -\int_0^\infty \frac{d\varphi}{dx}\, dx = \varphi(0) - \varphi(\infty),$$

$= \varphi(0)$ car φ a support compact,

c'est à dire

$$\boxed{(1.48) \qquad \frac{dH}{dx} = \delta_0 .}$$

La dérivée au sens des distributions de la fonction "marche ascendante" de Heaviside est égale à la masse de Dirac à l'origine.

- De façon plus générale, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ avec des sauts aux points a_j (avec $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ pour fixer les idées) :

$$(1.49) \qquad [f]_j = \left(\lim_{\varepsilon \overset{>}{\to} 0} f(a_j + \varepsilon) \right) - \left(\lim_{\eta \overset{>}{\to} 0} f(a_j - \eta) \right),$$

un calcul facile d'intégration par parties montre que

$$(1.50) \qquad \frac{d}{dx} T_f = T_{\frac{df}{dx}} + \sum_{j=1}^{k} [f]_j \, \delta_{a_j} ,$$

relation qui généralise (1.46).

- Le lecteur "fana" pourra établir que $\frac{d}{dx}\log|x| = vp(1/x)$, au sens des distributions... Nous renvoyons à l'abondante littérature des automaticiens pour une utilisation approfondie de l'algèbre de dérivation construite au paragraphe précédent. D'un point de vue plus analytique, on remarque que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_j}$ opère continûment sur $\mathcal{D}'(\Omega)$: si $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\frac{\partial T_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial T}{\partial x_j}$ au sens des distributions :

$$\boxed{(1.51)\quad \left(T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial T_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial T}{\partial x_j} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right)}$$

- Nous terminons par un exercice classique

$$(1.52)\quad \left(T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ et } \frac{dT}{dx} = 0\right) \Rightarrow \left(T = \text{cste}\right).$$

La preuve consiste à écrire $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sous la forme d'une dérivée plus une autre fonction. On introduit une fonction fixée $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale égale à 1 : $\int_{\mathbb{R}} \chi\, dx = 1$; on a alors

$$(1.53)\quad \varphi(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \chi + \frac{d}{dx}\left\{\int_{-\infty}^{x} \left[\varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right)\chi\right] d\theta\right\}$$

et il est facile de voir que la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi - (\int \varphi)\chi\right)$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ puisqu'elle est à support compact dans $\mathbb{R}$. On a donc $\left\langle T, \frac{d}{dx}\left\{\int_{-\infty}^{x}\left[\varphi - \left(\int_{\mathbb{R}}\varphi\right)\chi\right] d\theta\right\}\right\rangle =$
$= -\left\langle T', \int_{-\infty}^{x}\left[\varphi - \left(\int \varphi\right)\chi\right] d\theta\right\rangle = 0$ au vu de (1.52).

Donc $\langle T, \varphi\rangle = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx\right) \langle T, \chi\rangle$, et T est proportionnelle à la fonction $x \mapsto 1$, ce qui établit la propriété. □

Chapitre 2

Transformation de Fourier

- Définition
- Propriétés de la transformée de Fourier
- Ce qui n'a pas été dit

François Dubois, janvier 2000, édition août 2007, 14 pages.

II) Transformation de Fourier

1) Définition

- La transformée de Fourier définit une isométrie de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$, muni d'une structure de produit scalaire (hermitien dans ce chapitre), ie

(2.1) $\quad (f,g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \overline{f}(x)\, g(x)\, dx, \quad f,g \in L^2(\mathbb{R}^N).$

mais une véritable difficulté conceptuelle est que la fonction

(2.2) $\quad \mathbb{R}^N \ni \xi \mapsto (\mathcal{F}f)(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) \in \mathbb{C}$

n'est pas définie par une formule algébrique simple. On doit commencer par le cas où $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\boxed{(2.3) \quad \hat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ \xi \in \mathbb{R}^N.}$$

- Dans le cas où $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, le membre de droite de la relation (2.3) a un sens, définit une fonction $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$ qui est continue et tend vers 0 si ξ tend vers l'infini.

$$\boxed{(2.4) \quad \begin{cases} \hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}), \quad \hat{f}(\xi) \to 0 \text{ si } |\xi| \to \infty, \\ \|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1} / (2\pi)^{N/2}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}}$$

On peut vérifier simplement la continuité de $\hat{f}$ grâce au théorème de convergence dominée. Soit ξ un point fixé de $\mathbb{R}^N$ et $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^N$ qui converge vers ξ. Alors la suite de fonctions

$$x \mapsto f(x)\exp(-i\,x\cdot\xi_k)$$

converge simplement vers la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ix\cdot\xi}$ et est de plus dominée par la fonction intégrable $|f|$: $|f(x)\exp(-i\,x\cdot\xi_k)| \leq |f(x)|$.

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure qu'alors la suite des intégrales $\hat{f}(\xi_k)$ converge vers l'intégrale $\hat{f}(\xi)$. Cette propriété est vraie pour toute suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ξ, donc $\hat{f}$ est continue en $\xi\in\mathbb{R}$.

- Pour montrer que $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 si $|\xi| \equiv \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|^2\right)^{1/2}$ tend vers l'infini, on approche d'abord $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ par g continue à support compact (ce qui est toujours possible même avec $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ au besoin) ; si $\|f-g\|_1 \leq (2\pi)^{N/2}\frac{\varepsilon}{2}$, on a alors $\|\hat{f}-\hat{g}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On peut supposer g à support compact dans une boule de rayon R. Pour $\xi\neq 0$ fixé, soit i l'indice où $\max_j |\xi_j|$ est atteint. On a alors $|\xi| \leq \sqrt{N}\,|\xi_i|$ et par ailleurs

$$(2\pi)^{N/2}\hat{g}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\left(x_1\xi_1+\dots+\left(x_i\xi_i-\frac{\pi}{\xi_i}\xi_i\right)+x_{i+1}\xi_{i+1}+\dots\right)}g(x)\,dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\, g\left(x+\left(0,\dots,0,\frac{\pi}{\xi_i},0,\dots\right)\right)dx$$

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\left[g(x) - g\left(x + \left(0,\dots,0,\frac{\pi}{\xi_i},0,\dots\right)\right)\right]dx$$

Donc

$$|\hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{|B(0,R)|}{(2\pi)^{N/2}} \sup_{|y-x|\leqslant \frac{\pi}{|\xi_i|}} |g(x) - g(y)|$$

$$(2.5)\quad |\hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{|B(0,R)|}{(2\pi)^{N/2}} \sup_{|y-x|\leqslant \pi\sqrt{N}/|\xi|} |g(x)-g(y)|.$$

Comme $g(\cdot)$ est uniformément continue car à support compact, le membre de droite de (2.5) peut être rendu inférieur à $\varepsilon/2$ dès que $\pi\sqrt{N}/|\xi|$ est plus petit que $\eta>0$, ie pour $|\xi|$ assez grand, ce qui établit la propriété. $\square$

- Exemples fondamentaux.

$$(2.6)\quad (\mathcal{F}\chi_{]a,b[})(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i\xi\frac{a+b}{2}}\, \frac{\sin\frac{b-a}{2}\xi}{\xi}$$

$$(2.7)\quad [\mathcal{F}(H(x)e^{-\alpha x})](\xi) = \frac{1}{\alpha+i\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \alpha>0.$$

$$\boxed{(2.8)\quad [\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|})](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\xi^2},\quad \alpha>0.}$$

$$\boxed{(2.9)\quad [\mathcal{F}(e^{-ax^2})](\xi) = \sqrt{\frac{1}{2a}}\,\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right),\quad a>0}$$

On note ici une propriété fondamentale de la transformée de Fourier : plus $f(\cdot)$ est régulière et plus la transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ tend rapidement vers zéro si $|\xi|$ tend vers l'infini..

- Lorsque f est assez régulière, et plus précisément pour $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on dispose de la "formule d'inversion de Fourier" :

$$\boxed{(2.10)\quad f(x) = (\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(x) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^N \\ f \in L^1(\mathbb{R}^N) \\ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}}$$

Ceci montre que, au moins lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la transformée de Fourier est inversible, et de plus

$$\boxed{(2.11)\qquad \mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}\,.}$$

De plus, si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $f(\cdot)$ est continue par application à $\overline{\mathcal{F}}$ de ce qui a été dit en (2.4). La relation (2.10) n'est pas a priori utilisable pour les exemples (2.6) et (2.7). Il convient donc d'étendre l'opérateur $\mathcal{F}$ (les opérateurs $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ en fait) à un cadre plus large de fonctions.

- Une autre propriété essentielle de la transformation de Fourier est qu'elle diagonalise l'opérateur de <u>translation</u>. Soit $a \in \mathbb{R}^N$ et T_a l'opérateur $L^1(\mathbb{R}^N) \to L^1(\mathbb{R}^N)$ défini par

$$(2.12)\quad L^1(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto T_a f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ (T_a f)(x) = f(x-a).$$

On a alors

$$(2.13)\qquad [\mathcal{F}(T_a f)](\xi) = e^{-ia\xi}\,(\mathcal{F}f)(\xi), \quad \begin{matrix} a \in \mathbb{R}^N \\ \xi \in \mathbb{R}^N \end{matrix}.$$

En ce qui concerne la dérivation, si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\boxed{(2.14) \quad \left[\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right](\xi) = (i\xi_j)(\mathcal{F}f)(\xi) \quad , \; f \in \mathcal{E}' \cap L^1, \; \partial_k f \in L^1.}$$

- La preuve formelle (par parties) de la relation (2.14) consiste à intégrer sur une boule de centre 0 et rayon R grâce à la formule de Green :

$$\int_{B(0,R)} \frac{\partial f}{\partial x_j} e^{-ix\xi} \, dx = \int_{\partial B(0,R)} f n_j e^{-ix\xi} \, d\sigma(x) + \int_{B(0,R)} i\xi_j f e^{-ix\cdot\xi} \, dx$$

puis à faire tendre R vers l'infini. Le problème est de s'assurer que l'intégrale de bord tend vers zéro, i.e. que $\int_{|x|=R} |f| \, d\sigma(x)$ tend bien vers zéro si $R \to \infty$. A une dimension d'espace, la propriété est facile à établir :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(\theta) \, d\theta \; , \text{ et pour } x \to +\infty,$$

l'intégrale $\int_0^\infty f'(\theta) d\theta$ prend un sens car $\int_0^\infty |f'| \, d\theta$ converge. Par suite $f(x)$ a une limite si $x \to +\infty$ et cette limite est nécessairement nulle car $\int_0^\infty |f| \, d\theta$ a un sens. On raisonne de même pour $x \to -\infty$, ce qui établit la propriété dans ce cas. Dans le cas multidimensionnel, il faut utiliser avec soin le théorème de Fubini. Nous renvoyons aux notes de cours de JM Bony (Méthodes mathématiques pour les Sciences Physiques, Ecole Polytechnique, 1997).

- Si f est régulière (de classe $\mathcal{C}^m$) et dont toutes les dérivées sont intégrables (appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^N)$), on applique le résultat (2.4) à $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$, dont la transformée de Fourier est $-\xi_j \xi_k \hat{f}(\xi)$ et tend vers 0 si $|\xi|$ tend vers l'infini (cf (2.4)). Par récurrence, tout monôme en ξ de degré total $\leq m$ multiplié par $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 si $|\xi| \to \infty$, donc

$$\boxed{(2.15)\quad |\xi|^m \hat{f}(\xi) \to 0 \text{ si } |\xi| \to \infty,\ f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N),\ \partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^N)\ |\alpha| \leq m.}$$

- La transposée du résultat précédent est que si f est "assez décroissante" pour $|x|$ tendant vers l'infini, la transformée de Fourier devient régulière :

$$(2.16)\qquad \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -i\,[\mathcal{F}(x_j f(\bullet))](\xi),\ f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ x_j f(\bullet) \in L^1$$

On dérive formellement sous le signe somme la relation (2.3) par rapport à ξ_j. On obtient ainsi une intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} (-i x_j) f(x) \exp(-i x \xi)\, dx$ qui a un sens si $\int_{\mathbb{R}^N} |x_j f(\cdot)|\, dx < \infty$. Le résultat résulte alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue, dans sa version "dérivation sous le signe somme" [Si $\varphi : \mathbb{R}^N \times I \ni (x,\lambda) \mapsto \varphi(x,\lambda) \in \mathbb{R}$ est telle que (i) pour tout λ appartenant à l'intervalle I de $\mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x,\lambda)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$, (ii) la dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x,\lambda)$ existe presque partout pour $x \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\lambda \in I$, (iii) et les dérivées partielles sont pp $x \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\lambda \in I$, majorées par une fonction $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto h(x) \in \mathbb{R}$ intégrable : $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\lambda)\right| \leq h(x)$, $\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|\,dx < \infty$, alors la fonction $I \ni \lambda \mapsto F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x,\lambda)\,dx \in \mathbb{R}$ est dérivable et $\frac{dF}{d\lambda} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,dx$]. $\square$

- Le résultat précédent s'étend à un ordre m arbitraire.

$$(2.17)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(x \mapsto (1+|x|^m) f(x)\right) \in L^1(\mathbb{R}^N) \\ \quad \Longrightarrow \quad \hat{f} \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N). \end{array} \right.$$

- Nous vérifions maintenant que le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^N)$ est invariant par transformation de Fourier : (2.1)

$$\boxed{(2.18)\quad (\hat{f},\hat{g}) = (f,g) \text{ si } f, \hat{f}, g, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^N).}$$

La preuve de ce résultat repose d'abord sur la formule (2.10) d'inversion de Fourier, qui entraîne que f est bornée, donc appartient à $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, ce qui donne un sens aux deux membres de la relation (2.18). Nous avons donc, compte tenu de (2.10) :

$$(2.19)\quad (f,g) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi}\, \hat{g}(\xi)\, d\xi \right\} dx .$$

De plus, la fonction $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x,\xi) \mapsto \overline{f}(x)\, g(\xi) \in \mathbb{C}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ compte tenu des hypothèses et du théorème de Fubini [.../...

Fubini [si $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \ni (x,y) \mapsto \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$ est intégrable ($\varphi \in L^1(\mathbb{R}^{p+q})$), pour presque tout $y \in \mathbb{R}^q$, la fonction $\mathbb{R}^p \ni x \mapsto \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$ ($\varphi(\bullet, y) \in L^1(\mathbb{R}^p)$ pp($y \in \mathbb{R}^q$)), la fonction $\mathbb{R}^q \ni y \mapsto \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x,y)\,dx \in \mathbb{R}$ définie presque partout pour $y \in \mathbb{R}^q$ est intégrable sur $\mathbb{R}^q$ ($\psi \in L^1(\mathbb{R}^q)$) et on a :

$$\int_{\mathbb{R}^q} dy \left\{ \int_{\mathbb{R}^p} dx\, \varphi(x,y) \right\} = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} \varphi(x,y)\,dx\,dy \Big] ,$$

on peut échanger l'ordre des intégrales dans la relation (2.19) :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{f}(x) \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{+ix\xi}\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi \right] dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} d\xi\, \widehat{g}(\xi) \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} dx\, \overline{f(x)\, \exp(-ix\xi)} \right\}$$

ce qui montre la relation (2.18).

- Le résultat précédent s'étend avec l'hypothèse moins forte : $f, g \in L^1 \cap L^2$. Dans ce cas, $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $(\widehat{f}, \widehat{g}) = (f, g)$:

(2.20) $\quad (\widehat{f}, \widehat{g}) = (f, g) \quad , \quad f, g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$.

La preuve consiste à approcher f et g par convolution dans $L^1 \cap L^2$ de façon à utiliser le résultat (2.18) pour la suite approchante, puis de passer à la limite dans le produit scalaire.

- Nous disposons (enfin !) de tous les outils pour définir $\widehat{f}$ lorsque f appartient à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$. On approche $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$

par une suite $f_j \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ (ce qui est toujours possible, par exemple en posant $f_j = f\,\chi_{B(0,j)}$). Alors la suite des $\widehat{f_j}$ converge en moyenne quadratique vers une limite $\hat{f} = \mathcal{F}f$ qui ne dépend pas de la suite f_j ". On a le même résultat pour $\overline{\mathcal{F}}f$ et de plus

$$\boxed{(2.21)\begin{cases} L^2(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ est linéaire, bijective,} \\ \text{réalise une isométrie de } L^2(\mathbb{R}^N) \text{ sur lui-même, et} \\ \mathcal{F}^{-1} f = \overline{\mathcal{F}} f . \end{cases}}$$

- on note une nouvelle fois que la relation (2.3) ne définit pas $\hat{f}$ pour $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$: f n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}^N)$ a priori (elle n'est pas intégrable) et l'intégrale du membre de droite de (2.3) n'a pas de sens a priori. Par contre, si la suite d'intégrales

$$(2.22) \qquad \hat{f}_R(\xi) = \int_{|x| \le R} e^{-ix\xi} f(x)\,dx \,, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^N), R > 0$$

converge pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ lorsque R tend vers l'infini, alors la limite vaut $\hat{f}(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^N$:

$$(2.23) \begin{cases} \left(\hat{f}_R(\xi) \text{ converge si } R \uparrow \infty \ \ pp(\xi) \in \mathbb{R}^N \right) \\ \quad \Rightarrow \left(\hat{f}(\xi) = \lim_{R \uparrow \infty} \hat{f}_R(\xi) , \ pp(\xi) \in \mathbb{R}^N \right). \end{cases}$$

2) Propriétés de la transformation de Fourier.

- Les propriétés vues dans le cas de fonctions f intégrables s'étendent sans difficulté au cas où f appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$. En particulier l'opérateur de translation T_a défini par la relation (2.12), c'est à dire ici :

$$(2.24) \quad L^2(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto T_a f \in L^2(\mathbb{R}^N), (T_a f)(x) = f(x-a)$$

est mis sous forme diagonale grâce à la transformation de Fourier ; on a (cf aussi (3.13)) :

$$(2.25) \left\{ \begin{array}{l} [\mathcal{F}(T_a f)](\xi) = e^{-ia\cdot\xi}\,(\mathcal{F}f)(\xi), \\ \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^N),\ a \in \mathbb{R}^N,\ \xi \in \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

- Pour la dérivation, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ ainsi que toutes ses dérivées, on a (cf aussi (3.14)) :

$$\boxed{(2.26) \quad \left[\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right](\xi) = i\xi_j\,(\mathcal{F}f)(\xi),\ f \in \mathcal{C}^1 \cap L^2,\ \partial_k f \in L^2.}$$

- Notons aussi le <u>principe d'incertitude</u> (Heisenberg) si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est de plus $\|f\|_0 = 1$, la mesure $|f|^2 dx$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il est naturel de supposer définis la moyenne m_f, la variance V_f et l'écart type σ_f :

$$(2.27) \quad m_f = \int_{\mathbb{R}^N} x\,|f|^2\,dx\,;\ V_f = \int_{\mathbb{R}^N} |x - m_f|^2 |f|^2\,dx\,;\ \sigma_f = \sqrt{V_f}.$$

(si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $|x| f \in L^2(\mathbb{R})$ par exemple)

Alors le "principe d'incertitude" énonce qu'on ne peut à la fois "concentrer" les mesures de probabilité de f et de $\hat{f}$:

$$\boxed{(2.28)\begin{cases}\sigma_f \cdot \sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{2}, \ f \in L^2(\mathbb{R}), \|f\|_0 = 1, \ f \in \mathcal{C}^1, \\ \qquad f' \in L^2(\mathbb{R}), \ x f \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si f est une gaussienne (exemple (2.9)).

- La preuve de (2.28) consiste d'abord à remarquer que $m_{\hat{f}}$ et $\sigma_{\hat{f}}$ ont un sens car si $f \in H^1(\mathbb{R})$, la relation (2.26) montre que $|\xi| \hat{f}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. On peut de plus supposer $m_f = 0$ compte tenu de la relation (2.25) ; la transformée de Fourier de la fonction $y \mapsto f(y - m_f)$ est identique à celle de f à un coefficient unimodulaire près, ce qui ne change pas la loi de probabilité $|\hat{f}|^2 d\xi$. De même en échangeant les rôles de f et $\hat{f}$, on peut supposer que $m_{\hat{f}} = 0$. On a alors $\sigma_f = \|xf\|_0$ et $\sigma_{\hat{f}} = \|\xi \hat{f}\|_0 = \|f'\|_0$ compte tenu de (2.26). La fonction $x \mapsto x|f|^2 = (xf)(\bar{f})$ est intégrable comme produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ et sa dérivée $|f|^2 + 2x \operatorname{Re}(\bar{f} f')$ l'est aussi car xf et f' appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$. Donc (voir la preuve par exemple page F5) $x|f|^2 \to 0$ si $x \to \infty$ et $\int_{-R}^{R} x \frac{d}{dx}|f|^2 dx = [x|f|^2]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} |f|^2 dx \to -1$ si $R \to \infty$.

Comme $\int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} |f|^2 \, dx = 2 \,\mathcal{R}e\,(xf, f')$, on a, compte tenu de l'inégalité de Cauchy Schwarz dans le champ complexe (produit scalaire hermitien)

$$(2.29) \quad -1 = -2\,\mathcal{R}e(xf, f') \leq 2 \,\|xf\|_0 \,\|f'\|_0 = 2\sigma_f \,\sigma_{\hat{f}}$$

avec égalité si et seulement si les fonctions $-xf$ et f' sont proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité $\lambda > 0$: $f' = -\lambda x f$. Ce sont les gaussiennes et la propriété est établie. ◻

3) Ce qui n'a pas été dit.

- Des oublis volontaires de propriétés fondamentales de la transformation de Fourier. Son action sur le produit de convolution tout d'abord :

$$(2.30) \quad (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

On a

$$\boxed{(2.31) \quad F(f*g)(\xi) = (2\pi)^{N/2} (Ff)(\xi)\, (Fg)(\xi)}$$

avec la normalisation que nous avons choisie. La relation (2.31) est indispensable pour établir les points techniques non détaillés plus haut (formule d'inversion de Fourier, etc.)

- La transformée de Fourier de la masse de Dirac doit aussi être considérée. Il faut pour cela reprendre la théorie des distributions grâce à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ de Schwartz des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide ainsi que toutes les dérivées, montrer qu'on a une isométrie de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$

$$(2.32) \quad F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

puis étendre l'opérateur F au dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{(2.33) \quad \langle FT, \varphi \rangle = \langle T, F\varphi \rangle, \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}$$

on a alors (sur $\mathbb{R}$ pour simplifier)

$$\langle F\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, F\varphi\rangle = \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$$

$$= \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi\rangle, \text{ soit}$$

$$\boxed{(2.34) \qquad F\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.}$$

Plus généralement,

$$(2.35) \qquad \mathcal{F}\delta_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-iax} \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$(2.36) \qquad \overline{\mathcal{F}}\,\delta_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ibx} \qquad x\in\mathbb{R}$$

- L'extension de la relation $\mathcal{F}_0\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}_0\mathcal{F} = Id$ à l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ permet alors le calcul suivant

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\delta_b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}(e^{ibx}) = \delta_b, \text{ d'où}$$

$$\boxed{(2.37) \qquad \mathcal{F}(e^{ibx}) = \sqrt{2\pi}\,\delta_b, \quad b\in\mathbb{R},}$$

relation qu'on serait bien en peine de trouver au vu de la seule expression intégrale (2.3) !

Chapitre 3

Espaces de Sobolev

- Fonctions de carré intégrable
- Définition et premières propriétés
- Cas de l'espace $\mathbb{R}^N$
- Approximation de H^m, continuité
- Trace au bord
- Formule de Green
- Compacité

François Dubois, janvier 2000, édition août 2007, 39 pages.

III Espaces de Sobolev.

1) Fonctions de carré intégrable.

- On rappelle que l'espace $L^2(\Omega)$ est, pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, un espace de Hilbert (réel pour les applications traitées ici), il est muni d'un produit scalaire

$$(3.1) \quad (u,v)_0 = \int_\Omega u\,v\,dx\,, \quad u,v \in L^2(\Omega)$$

et la norme associée $\| \ \|_0$ (voir (1.2)) fait de $L^2(\Omega)$ un espace vectoriel normé <u>complet</u>. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme L^2, ie

$$(3.2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \|u_n - u_{n+p}\| \leq \varepsilon)$$

alors elle converge vers une fonction $u \in L^2(\Omega)$, ie $\|u_n - u\|_0$ tend vers zéro si n tend vers l'infini.

- L'intérêt d'un espace de Hilbert est le théorème de <u>projection</u> sur les convexes fermés non vides. Soit K une partie convexe ($u,v \in K \Rightarrow [u,v] \equiv \{\theta u + (1-\theta)v\,,\ \theta \in [0,1]\} \subset K$), fermée ($\mathrm{adh}_{L^2} K = K$) et non vide de $L^2(\Omega)$. Alors il existe une application $P_K : L^2(\Omega) \ni u \mapsto P_K u \in K$ telle que

$$(3.3) \quad \|u - P_K u\|_0 \leq \|u - y\|\,, \quad \forall y \in K,\ u \in L^2(\Omega)$$

La projection $P_K u$ de $u \in L^2(\Omega)$ est aussi caractérisée par les inégalités d'angle obtus

$$\boxed{(3.4) \quad v = P_K u \Longleftrightarrow \begin{cases} v \in K \\ (u - v, y - v) \leq 0\,, \quad \forall y \in K. \end{cases}}$$

• Dans un espace de Hilbert, on peut faire de la géométrie euclidienne "comme dans $\mathbb{R}^N$". Un cas particulier important du théorème de projection est celui où K est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega)$ [c'est alors clairement un convexe fermé non vide]. Le projecteur P_K sur le sous-espace K est alors le <u>projecteur orthogonal</u> sur K (pour le produit scalaire $L^2(\Omega)$). La décomposition

$$(3.5) \qquad u = P_K u + (u - P_K u) \quad , u \in L^2(\Omega), K \text{ sev fermé}$$

jointe à la caractérisation (2.4) montre que $u - P_K u$ est orthogonal à K et décrit l'orthogonal $K^\perp$ du sous espace fermé K.

$$\boxed{(3.6) \qquad L^2(\Omega) = K \oplus K^\perp \quad , K \text{ sous espace fermé de } L^2(\Omega).}$$

Nous conseillons au lecteur désireux d'un exposé didactique plus étendu de consulter les notes de cours d'Analyse Hilbertienne de L. Schwartz (Hermann, 1979).

- Une application importante de la décomposition orthogonale (3.6) est la vérification qu'un sous espace A de $L^2(\Omega)$ est dense. Dire que A est dense revient à dire que son adhérence $\overline{A}$ est égale à $L^2(\Omega)$. L'orthogonal $\overline{A}^{\perp} = A^{\perp}$ est alors nul, avec

$$(3.7) \qquad A^{\perp} = \{ y \in L^2(\Omega),\ (x,y) = 0\ \forall x \in A \}$$

et on a le critère suivant

$$(3.8) \qquad A \text{ sous espace de } L^2. \quad \overline{A} = L^2(\Omega) \iff A^{\perp} = \{0\}.$$

- Une propriété très importante des espaces de Hilbert est que toute forme linéaire $\varphi \in (L^2(\Omega))'$ peut être "représentée" par un vecteur $\xi \in L^2(\Omega)$: le dual de $L^2(\Omega)$ est <u>isomorphe</u> à $L^2(\Omega)$ lui même, via (par exemple) l'isomorphisme

$$(3.9) \qquad L^2(\Omega) \ni \xi \mapsto \big(L^2(\Omega) \ni x \mapsto (\xi, x) \in \mathbb{C} \big) \in (L^2(\Omega))'$$

entre espaces de Hilbert (théorème de Riesz).

- L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert <u>séparable</u> : il admet une suite dense. La décomposition (3.6), initiée à partir d'un vecteur unitaire arbitraire $e_1 \in L^2(\Omega)$ permet de construire une <u>base hilbertienne</u>, i.e. une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de vecteurs deux à deux orthogonaux et unitaires :

$$(3.10) \qquad (e_k, e_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et telle que l'adhérence de l'espace des suites finies $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$ est égale à $L^2(\Omega)$. Le critère (3.8) s'écrit ici :

$$(3.11) \qquad (u, e_j) \ \forall j \in \mathbb{N} \implies u = 0 .$$

Toute fonction $u \in L^2(\Omega)$ se décompose alors de façon unique sous la forme d'une série convergente en moyenne quadratique (pour la topologie de $L^2(\Omega)$)

$$(3.12) \quad \boxed{\begin{cases} u = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, u)\, e_k \\ \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, u)|^2 < \infty \end{cases}}$$

- Nous approfondirons au chapitre 4 l'exemple des séries de Fourier où $\Omega =]0,L[$:

$$\boxed{(3.13) \qquad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \exp\left(2i\pi k \frac{x}{L}\right), \quad f \in L^2(0,L)}$$

Mais ce n'est pas la seule base hilbertienne de $L^2(0,T)$, on a par exemple le développement en sinus :

$$\boxed{(3.14) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad f \in L^2(0,L)}$$

qui joue un rôle important puisqu'il est composé de fonctions propres de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ avec condition de Dirichlet homogène

$$(3.15) \qquad -\frac{d^2}{dx^2}\left\{\sin \frac{k\pi x}{L}\right\} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{L} .$$

- N'oublions pas, pour terminer, que deux fonctions u et v de $L^2(\Omega)$ sont "proches" au sens de la topologie de $L^2(\Omega)$ si elles le sont "en moyenne quadratique", ie si l'intégrale $\int_\Omega |u-v|^2 dx$ est petite. Rien n'est dit sur la "pente" de la fonction $(u-v)$ qui peut, elle, être "très grande".

2) Définition et premières propriétés.

- Les fonctions de $L^2(\Omega)$ sont dérivables au sens des distributions. Par contre la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_j} T_u$ pour $u \in L^2(\Omega)$, notée plus simplement $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, est une distribution qui n'est pas a priori une fonction (penser à la dérivée de la fonction de Heaviside, sur l'espace $L^2(-1,1) = L^2(]-1,1[)$). Lorsque c'est le cas et que de plus, la fonction v_j qui permet de représenter la dérivée de u au sens des distributions est une fonction de $L^2(\Omega)$, ie

$$(3.16) \qquad \exists\, v_j \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} = T_{v_j} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

on dit que u appartient à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$:

$$\boxed{(3.17) \quad H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega),\ \forall j = 1, \dots, N \right\}.}$$

Cette définition doit être comprise de la manière suivante : $H^1(\Omega)$ est formé des fonctions u de carré intégrable dont la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ au sens des distributions est une fonction qui, de plus, est de carré intégrable.

- L'espace $H^1(\Omega)$ est une généralisation de l'espace $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ des fonctions continûment dérivables de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. Mais $H^1(\Omega)$ contient aussi d'autres fonctions. Pour $\Omega =]-1,+1[$ par exemple, l'espace $H^1(-1,1) \equiv H^1(]-1,1[)$ contient la fonction valeur absolue $]-1,1[\ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ [exercice laissé au lecteur !] La dérivée est une fonction discontinue qui appartient à $L^2(-1,1)$.

- Le résultat fondamental qui motive la définition (3.17) est qu'avec le produit scalaire $(u,v)_1$ défini par

$$(3.18) \quad (u,v)_1 = (u,v)_0 + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_0$$

[avec $(\,,\,)_0$ produit scalaire usuel de $L^2(\Omega)$ défini à la relation (2.1)], l'espace de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert !

(3.19) $(H^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_1)$ est un espace de Hilbert.

- Le point important est de démontrer que $H^1(\Omega)$ est effectivement complet, c'est à dire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme H^1, définie, bien entendu, par la relation

$$(3.20) \qquad \|u\|_1 = \left(\|u\|_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_0^2\right)^{1/2}, \; u \in H^1(\Omega)$$

alors elle converge, dans $H^1(\Omega)$, vers une certaine fonction $u \in H^1(\Omega)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, elle est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, donc converge vers $u \in L^2(\Omega)$. De plus, chaque dérivée partielle $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui converge vers $v_j \in L^2(\Omega)$. Il reste à prouver que $\frac{\partial u}{\partial x_j} = v_j$ dans $L^2(\Omega)$ pour montrer le résultat. Mais la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est une opération continue, si u_n tend vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ tend vers $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ [voir (1.51)]. Comme u_n tend vers u dans $L^2(\Omega)$, u_n tends vers u dans $\mathcal{D}'$, donc $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ tend vers $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ au vu du point précédent. Par ailleurs, $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ tend vers v_j dans $L^2(\Omega)$, donc dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Compte tenu de l'unicité de la limite, on a bien $\frac{\partial u}{\partial x_j} = v_j$ (pour tout entier j, $1 \leq j \leq N$) ; u_n converge vers u dans $H^1(\Omega)$, ce qui montre la propriété. □

- L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. C'est donc une structure très riche pour étudier les fonctions dérivables. Toutefois, la dérivabilité doit être entendue en un sens faible (au sens des distributions), donc si la structure de l'espace $H^1(\Omega)$ est simple, les valeurs ponctuelles $\Omega \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$ d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ peuvent être non bornées, comme le montre l'exemple suivant sur la boule $\Omega = B(0,R)$ $(0<R<1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$(3.21) \qquad u(x) = \big|\log|x|\big|^k, \; 0<k<\tfrac{1}{2}, \; x \in B(0,R) \subset \mathbb{R}^2.$$

- La fonction $u(\bullet)$ définie par la relation (3.21) appartient à $L^2(B(0,R))$ et la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ au sens des distributions est égale à la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ considérée d'un point de vue élémentaire. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(B(0,R))$, on a

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R |\log r|^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, r\, dr.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a (cf (1.44))

$$-\int_{\varepsilon<|x|<R} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \int_{\varepsilon<|x|<R} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi\, dx + \int_0^{2\pi} (u\varphi)(\varepsilon,\theta)\, n_j\, \varepsilon\, d\theta$$

L'intégrale de bord tend vers 0 si $\varepsilon \to 0$ car elle a le comportement de $\varepsilon|\log\varepsilon|^k$. On a de plus

$$\int_{\varepsilon<|x|<R} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi\right| dx \leq 2\pi \int_\varepsilon^R \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| |\varphi|\, r\, dr$$

$$\leq 2\pi \quad \|\varphi\|_\infty \int_\varepsilon^R k\,|\log r|^{k-1}\, dr$$

et cette intégrale a une limite pour $\varepsilon \to 0$ dès que $k-1<0$ donc en particulier pour $0<k<1/2$.

La dérivée au sens des distributions de $u(\cdot)$ est donc égale à la dérivée au sens élémentaire. Il reste à vérifier, pour montrer l'appartenance de $u(\cdot)$ à $H^1(B(0,R))$, que l'intégrale $\int_{B(0,R)} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 dx$ converge. Or

$$\int_{B(0,R)} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 dx = 2\pi \int_0^R \left(k \frac{|\log r|^{k-1}}{r}\right)^2 r\,dr =$$

$$= 2\pi k^2 \int_0^R \frac{dr}{r\,|\log r|^{2-2k}}$$

et cette intégrale converge lorsque $2-2k>1$, ie pour $k<1/2$. On dispose donc d'une fonction $u(\cdot)$ qui appartient à $H^1(\Omega)$ et est <u>non bornée</u> au voisinage de 0 pour $k>0$!

- Nous retenons de l'exemple qui précède qu'en général, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont <u>pas</u> continues !

$$\boxed{(3.22) \qquad H^1(\Omega) \not\subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}),\ \Omega \text{ ouvert} \subset \mathbb{R}^N,\ N \geq 2} \; (*)$$

Pour préciser le la continuité éventuelle des fonctions dérivables, nous introduisons l'espace $H^m(\Omega)$ de façon analogue à $H^1(\Omega)$:

$$(3.23) \quad H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leq m \Rightarrow \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

formé de toutes les fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m inclus sont effectivement des fonctions qui, de plus, appartiennent à $L^2(\Omega)$

(*) On a toutefois (voir plus loin) $H^1(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, Ω ouvert de $\mathbb{R}$.

Le produit scalaire $(u,v)_m$ de deux fonctions u et v de $H^m(\Omega)$ est défini par extension simple de la relation (3.18) :

$$(3.24)\quad (u,v)_m = \int_\Omega uv\,dx + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega (\partial^\alpha u)(\partial^\alpha v)\,dx$$

et la norme $\|\cdot\|_m$ dans $H^m(\Omega)$ s'écrit sans difficulté :

$$(3.25)\qquad \|u\|_m = \Big(\|u\|_0^2 + \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_0^2\Big)^{1/2},\quad u\in H^m(\Omega).$$

- La fonction $]-1,1[\ \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ appartient à $H^1(-1,1) \equiv H^1(]-1,1[)$ mais n'appartient pas à $H^2(-1,1)$ car sa dérivée seconde (la distribution $2\delta_0$) n'est pas une fonction.

3) Cas de l'espace $\mathbb{R}^N$

- Dans le cas particulier où l'ouvert Ω est égal à $\mathbb{R}^N$, nous avons vu à la relation (2.26) que si $u(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est assez régulière, alors $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (ie les dérivées partielles $\partial_k u$ appartiennent à L^2) si et seulement si leurs transformées de Fourier $\mathcal{F}(\partial_k u) = i\,\xi_k\,\mathcal{F}u(\xi)$ appartiennent à L^2. Compte tenu du résultat classique de densité (sur lequel nous reviendrons)

$$\boxed{(3.26)\qquad \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \text{ est dense dans } H^1(\mathbb{R}^N).}$$

Une fonction $u \in L^2$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $\sum_k |\xi_k|^2 \, |\hat{u}(\xi)|^2$ est intégrable, ou en d'autres termes si et seulement si $(1+|\xi|^2)^{1/2} \, \hat{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$.

$$\boxed{(3.27) \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N). \; \left(u \in H^1(\mathbb{R}^N)\right) \Leftrightarrow \left((1+|\xi|^2)^{1/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\right)}$$

- Vérifions que si $|\xi| \, \hat{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$, la dérivée de u au sens des distributions est effectivement une fonction, ie $\frac{\partial}{\partial x_k} T_u = T_{\partial u/\partial x_k}$.
Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} T_u, \varphi \right\rangle = -\left\langle T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} u \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx$$

$$= -\left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_0 = -\left(\hat{u}, \mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \right)_0$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\hat{u}(\xi) \; i \, \xi_k \; \hat{\varphi}(\xi)} \, d\xi$$

$$= \left(i \, \xi_k \; \hat{u}(\cdot), \; \hat{\varphi}(\cdot) \right)_0 = \left(\overline{\mathcal{F}}(i \, \xi_k \hat{u}), \varphi \right)_0$$

et la distribution $\frac{\partial}{\partial x_k} T_u$ est représentée par la fonction $\overline{\mathcal{F}}(i \, \xi_k \hat{u})$ qui appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$.

- Le résultat (3.27) s'étend facilement à l'espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^N)$:

$$(3.28) \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N). \; \left(u \in H^m(\mathbb{R}^N)\right) \Leftrightarrow \left((1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\right)$$

qui exprime sous forme plus savante la remar faite au début du chapitre 2 : plus u est régulière et plus sa transformée de Fourier décroît vite vers 0 à l'infini, même si le membre de droite de la relation (3.28) n'indique pas explicitement une vitesse de convergence.

- On remarque ensuite que pour s réel >0 (et même <0 mais nous laissons ce cas de côté ici), la condition $(1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ prend du sens dès que $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. C'est cette condition qui permet de <u>définir</u> l'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ lorsque s est réel >0 non entier.

$$(3.29) \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ s>0 . \quad \left(u \in H^s(\mathbb{R}^N)\right) \Leftrightarrow \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\right)$$

En particulier pour $s = 1/2$, $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ appartient à $H^{1/2}(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $|\xi|\,|\hat{u}|^2$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\boxed{(3.30) \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N).\ \left(u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^N)\right) \Longleftrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|\,|\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi < \infty\right)}$$

4) Approximation de $H^m(\Omega)$, continuité

- La transformation de Fourier nous permet d'étudier le lien entre les espaces H^m et l'espace $\mathcal{C}^0$ des fonctions continues, au moins dans le cas de $\mathbb{R}^N$. On a le résultat suivant (théorème de Sobolev) :

$$\boxed{(3.31) \quad (s > N/2) \Rightarrow \left(H^s(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N) \right).}$$

La preuve consiste à utiliser la définition (3.29) avec la transformée de Fourier. On écrit

$$(3.32) \qquad \hat{u}(\xi) = \left[(1+|\xi|^2)^{s/2} \, \hat{u}(\xi) \right] \left(\frac{1}{1+|\xi|^2} \right)^{s/2} ,$$

le premier facteur du membre de droite de la relation (3.32) appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ si $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et le second appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ dès que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s}$ converge, c'est à dire après passage en coordonnées polaires pour $\int_0^\infty \frac{\rho^{N-1}}{(1+\rho^2)^s} \, d\rho < \infty$

ce qui a lieu lorsque $2s-(N-1) > 1$, soit $s > N/2$. Dans ces conditions, $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et la relation (2.4) appliquée à $\overline{\mathcal{F}}$ au lieu de $\mathcal{F}$ montre que $u = \overline{\mathcal{F}} \hat{u}$ appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$ et tend vers zéro si $|x|$ tend vers l'infini :

$$(3.33) \left(s > \frac{N}{2}, \; u \in H^s(\mathbb{R}^N) \right) \Rightarrow \left(u(x) \to 0 \text{ si } |x| \to \infty \right).$$

On peut aussi (voir par exemple JM Bony, Analyse, Cours à l'Ecole Polytechnique, 1989) montrer que dans les mêmes conditions, $H^s(\mathbb{R}^N)$ est une <u>algèbre</u> pour la multiplication des fonctions :

(3.34) $s > N/2$. $u, v \in H^s(\mathbb{R}^N) \Rightarrow uv \in H^s(\mathbb{R}^N)$

La généralisation de l'inclusion (3.31) aux dérivées d'ordre supérieur est immédiate :

(3.35) $\left(s > \frac{N}{2} + m\right) \Rightarrow \left(H^s(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N)\right)$.

- Dans le cas général où Ω est un ouvert (borné) de $\mathbb{R}^N$, nous nous proposons d'approcher l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par des fonctions de $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ ou $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$) très régulières, jusqu'au bord $\partial\Omega$ du domaine Ω. Il faut d'abord pour cela préciser la notion d'ouvert <u>k régulier</u>. On suppose d'abord

(3.36) Ω ouvert borné $\subset \mathbb{R}^N$.

Dire que Ω est k régulier signifie que $\Gamma \equiv \partial\Omega$ est une variété de classe $\mathcal{C}^k$, Ω étant localement d'un seul côté de la frontière.

- De façon précise, il existe une collection $(\mathcal{O}_j)_{0\leq j\leq p}$ d'ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$ qui recouvre l'adhérence de Ω

(3.37) $\quad \overline{\Omega} \subset \left(\bigcup_{j=0}^{p} \mathcal{O}_j\right),$

l'ouvert $\mathcal{O}_0$ est inclus dans Ω

(3.38) $\quad \mathcal{O}_0 \subset \Omega$

alors que les ouverts $(\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p)$ définissent un système de cartes locales pour paramétrer le bord Γ :

(3.39) $\quad \Gamma \subset \left(\bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{O}_j\right).$

Il existe une famille de fonctions φ_j de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{O}_j$ à valeurs dans $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$

(3.40) $\quad \mathcal{O}_j \ni x \mapsto y = \varphi_j(x) \in B \quad \subset \mathbb{R}^N$

qu'on suppose inversible et φ_j^{-1} de classe $\mathcal{C}^k$ également,

(3.41) $\quad B \ni y \mapsto x = \varphi_j^{-1}(y) \in \mathcal{O}_j, \quad \varphi_j^{-1} \in \left(\mathcal{C}^k(B)\right)^N$

telle que l'image de $\mathcal{O}_j \cap \Omega$ (respectivement $\mathcal{O}_j \cap \Gamma$) par φ_j soit la "demi boule supérieure" de B (respectivement les points de B dont la N° composante est nulle).

(3.42) $\quad \varphi_j(\mathcal{O}_j \cap \Omega) = \{ y \in B, \ y_N > 0 \}$ $\quad y \equiv (y_1, \dots, y_{N-1}, y_N)$

(3.43) $\quad \varphi_j(\mathcal{O}_j \cap \Gamma) = \{ y = (y_1, \dots, y_N) \in B, \ y_N = 0 \}.$

Il est parfois utile de poser

(3.44) $\mathbb{R}^N_+ = \{ y = (y_1, \dots, y_{N-1}, y_N) \in \mathbb{R}^N, \; y_N > 0 \}$

- après cartographie locale, l'image par φ_j de $\Omega \cap \mathcal{O}_j$ a l'aspect donné Figure 1. Notons que les cartes locales ont des conditions de compatibilité pour assurer le caractère intrinsèque des notions [voir par exemple le cours de géométrie différentielle]

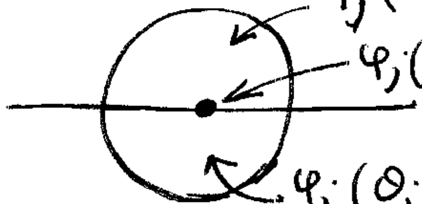


Figure 1
j^o carte de l'ouvert Ω

- Nous dirons que l'ouvert est <u>k-régulier</u> lorsque d'une part il est borné, et d'autre part les cartes locales φ_j et leurs inverses φ_j^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$. Lorsque Ω est k-régulier pour tout $k \in \mathbb{N}$, Ω est dit ∞-régulier. Par ailleurs, on définit l'espace $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ des restrictions à Ω des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ comme l'intersection des $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$.
- on a le résultat de densité suivant : si Ω est k-régulier, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est <u>dense</u> dans $H^m(\Omega)$ si $m \leq k$:

$$\boxed{(3.45) \quad (\Omega \text{- k-régulier}) \Rightarrow (\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \text{ dense dans } H^m(\Omega),\ m \leq k).}$$

si Ω est ∞-régulier, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans tout $H^m(\Omega)$.
Rappelons la chaîne d'inclusions :

$$(3.46) \qquad \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) \subset H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad m \geq 0.$$

- Le résultat important qui lie les fonctions dérivables jusqu'à l'ordre m au sens des espaces $H^m(\Omega)$ et les fonctions continues est le théorème de Sobolev :

$$\boxed{(3.47) \quad \left(H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\right) \Longleftrightarrow \left(m > N/2\right).}$$

Ce point est important si une fonction est m fois dérivable avec $m > N/2$ (ie appartient à $H^m(\Omega)$ avec $m > N/2$), alors elle est continue sur $\overline{\Omega}$.

- Dans le cas de la dimension 1 ($\Omega =]0,1[$ pour fixer les idées), l'espace H^1 est composé de fonctions continues (ou plus exactement ayant un représentant continu). Le point délicat est de définir la valeur ponctuelle $u(x)$ pour $u \in H^1(0,1)$ et $x \in [0,1]$. A priori, $u \in L^2(\Omega)$ donc la valeur ponctuelle $u(x)$ n'est utile que presque partout ! Le bon cadre est de penser à la masse de Dirac ; on a

(3.48) $\qquad u(x) = \langle \delta_x , u \rangle$, u régulière

donc par exemple pour $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. On montre d'abord que la masse de Dirac δ_x définit une <u>forme linéaire continue pour la topologie H^1</u> sur le sous espace dense $\mathcal{C}^1([0,1])$:

(3.49) $\exists C > 0, \forall u \in \mathcal{C}^1([0,1]), |<\delta_x, u>| \leq C \|u\|_1$.

- La preuve de la relation (3.49) est élémentaire. Pour u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a :

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(\theta)\, d\theta$$

dont on déduit :

$$|u(x)|^2 \leq 2\left(|u(y)|^2 + \left|\int_x^y u'(\theta) d\theta\right|^2\right)$$

$$|u(x)|^2 \leq 2\left(|u(y)|^2 + \int_0^1 |u'(\theta)|^2 d\theta\right).$$

Puis on intègre l'inégalité précédente par rapport à $y \in [0,1]$. Il vient

$$|<\delta_x, u>|^2 \leq 2\left(\|u\|_0^2 + \|u'\|_0^2\right), \quad u \in \mathcal{C}^1([0,1])$$

qui exprime exactement (3.49), avec $C = \sqrt{2}$.

- On utilise ensuite la densité de $\mathcal{C}^1([0,1])$ dans $H^1(0,1)$: si $u \in H^1(0,1)$, il existe $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^1([0,1])$ de sorte que $\|u_k - u\|_1 \to 0$ si $k \to \infty$. Par suite, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1(0,1)$ et on déduit de (2.35) que la suite numérique $(<\delta_x, u_k>)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Donc elle converge vers un nombre qui, par définition, est noté $<\delta_x, u>$ ou $u(x)$ pour $u \in H^1(0,1)$ et $x \in [0,1]$. L'inégalité (3.49) s'étend alors naturellement à $u \in H^1(0,1)$.

- On remarque que $<\delta_0, u>$ et $<\delta_1, u>$, valeurs de la fonction $u \in H^1(0,1)$ au bord de $\Omega =]0,1[$ sont bien définies comme fonctions continues de u. La "trace" au bord de $u \in H^1(0,1)$ ie les valeurs

$u(0)$ et $u(1)$ dans ce cas particulier, a un sens pour $u \in H^1(0,1)$. L'établissement de la continuité de la fonction $[0,1] \ni x \mapsto u(x) \equiv \langle \delta_x, u \rangle \in \mathbb{R}$ est alors menée comme pour l'existence de $\langle \delta_x, u \rangle$. On suppose d'abord que $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$. On a alors $|u(y) - u(x)| \leq \int_x^y |u'(\theta)| \, d\theta$ $\leq \sqrt{|y-x|} \left(\int_0^1 |u'(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2} \leq \|u\|_1 \, |y-x|^{1/2}$. Pour (x,y) fixé dans $[0,1]^2$, cette inégalité passe à la limite pour une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^1([0,1])$ qui converge vers une fonction donnée $u \in H^1(0,1)$ (dans $H^1(0,1)$) :

$$|\langle \delta_y, u \rangle - \langle \delta_x, u \rangle| \leq \|u\|_1 \sqrt{|y-x|} \,, \quad u \in H^1(0,1)$$

inégalité qui établit la continuité (uniforme) de $u(\bullet)$ sur l'intervalle fermé $[0,1]$. □

5) Trace au bord

- Nous avons vu qu'à une dimension spatiale, les valeurs au bord $\{0,1\}$ de l'ouvert $]0,1[$ de $u \in H^1(0,1)$ sont bien définies, ce sont des formes linéaires continues sur $H^1(0,1)$. Le mode de construction n'est pas élémentaire, $u \in H^1(0,1)$ reste une fonction de $L^2(0,1)$, donc définie à priori presque partout sur $]0,1[$. On doit prendre une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions régulières ($u_k \in \mathcal{C}^1([0,1])$ par exemple) qui converge vers $u \in H^1(0,1)$ pour la norme $H^1(0,1)$, i.e. $\|u_k - u\|_0 \to 0$ et $\|\frac{d}{dx}(u_k - u)\|_0 \to 0$ si $k \to \infty$.

alors la suite des valeurs ponctuelles en $x=0$ ou $x=1$, ie $(\langle\delta_x, u_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre qu'on appelle $\langle\delta_x, u\rangle$ ou $u(x)$. Ce nombre ne dépend pas de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ choisie car $H^1(0,1)$ est un espace séparé.

- Dans le cas bidimensionnel, il reste hors de question de définir une "valeur au bord" ou une "trace" de la fonction $u(\bullet)$ sur le bord $\partial\Omega$ si elle appartient seulement à $L^2(\Omega)$. Par exemple, pour $\Omega = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$, la fonction

$$(3.50) \qquad u(x) = \frac{1}{(1-|x|^2)^{1/4}}, \quad x \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$$

appartient à $L^2(B(0,1))$ puisque l'intégrale $\int_{B(0,1)} |u|^2 dx$ est bien convergente :

$$\int_0^1 |u|^2\, r\,dr = \int_0^1 \frac{1}{(1-r^2)^{1/2}}\,\frac{1}{2}\,d(r^2) = -\frac{1}{2}\Big[(1-r^2)^{1/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Par contre pour x tendant vers le bord $\partial B(0,1)$ ie $|x|^2\to 1$, les valeurs ponctuelles $u(x)$ tendent vers $+\infty$, ce en tout point. On peut toutefois remarquer que la norme L^2 de la dérivée de u, ie $\int_{B(0,1)} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 r\,dr$ est infinie (l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{5/2} r^2 dr$ diverge en $r=1$), donc la fonction $u(\bullet)$ définie en (3.50) appartient à $L^2(0,1)$ mais pas à $H^1(0,1)$.

- Quelle est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie de $H^1(\Omega)$? Nous avons vu que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense pour la topologie de $L^2(\Omega)$; pour l'espace $H^1(\Omega)$, il y a deux cas de figure, selon que $\Omega = \mathbb{R}^N$ (pas de bord) ou que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

On a d'abord le résultat positif suivant :

(3.51) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^N)$, $\forall m \geq 0$.

Par contre, dès que Ω a un bord non vide, on n'a pas la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^1(\Omega)$. On s'en convainc de façon intuitive en étudiant des fonctions $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(]0,1[)$ qui convergent (dans $L^2(0,1)$) vers $u \equiv 1 \in H^1(0,1)$. Pour rejoindre la valeur 1, la fonction u_ε doit "monter rapidement" de $u(0) = 0$ à $u(\varepsilon) = 1$; donc sa pente est typiquement de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ sur un intervalle de longueur ε. Par suite $\int_0^1 |u'_\varepsilon|^2 dx \geq \int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 dx = \frac{1}{\varepsilon}$. Cette explication (qui n'est pas une preuve, voir aussi la figure 2) motive la définition de l'espace $H^1_0(\Omega)$

$$\boxed{(3.52) \qquad H^1_0(\Omega) \equiv \operatorname{adh}_{H^1(\Omega)} \{\mathcal{D}(\Omega)\}}$$

qui est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie associée à la norme de l'espace $H^1(\Omega)$.

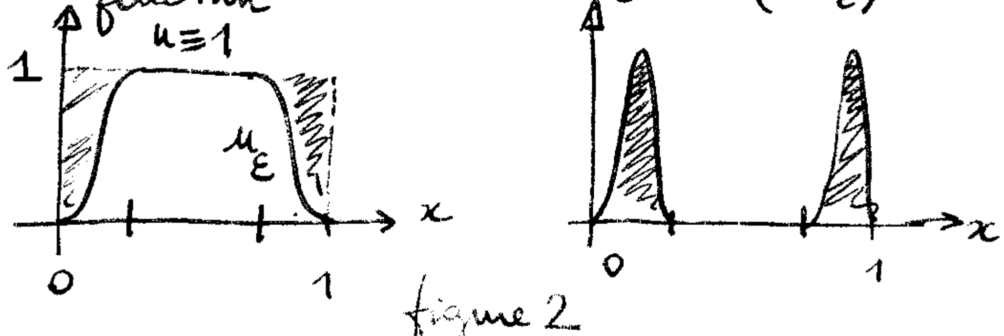


figure 2

- Pour étudier le problème qui consiste à "prendre la valeur au bord", il est naturel de commencer par le cas d'un bord <u>plat</u> et, pour une fonction régulière $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ regarder l'opérateur γ qui consiste à restreindre φ à l'hyperplan $\{(x',0),\ x' \in \mathbb{R}^{N-1}\} \simeq \mathbb{R}^{N-1}$ On suppose par exemple $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et l'opérateur de trace γ est donc défini ainsi :

$$(3.51)\quad \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto \gamma\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}). \\ \qquad (\gamma\varphi)(x') = \varphi(x',0), \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{cases}$$

on a alors deux propriétés suivantes

$$(3.52)\ \begin{cases} \text{Si } s > 1/2, \\ \gamma \text{ se prolonge de manière unique en un opé-} \\ \text{rateur linéaire continu de } H^s(\mathbb{R}^N) \text{ dans } H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1}) \end{cases}$$

Ce prolongement, toujours noté γ est surjectif :

(3.53) γ est surjectif de $H^s(\mathbb{R}^N)$ sur $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})$.

- Le premier point (3.52) illustre et précise (au moins dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N_+$) le fait que l'opérateur de trace au bord γ_0 a un sens pour des fonctions de H^1 et définit des "valeurs au bord" qui appartiennent à $H^{1/2}$(du bord). La preuve de (3.52) consiste à montrer qu'il existe une constante $C>0$ de sorte que

$$(3.54)\quad \|\gamma\varphi\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

puis la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$ $(s>0)$ montre que γ peut être étendue de manière unique par continuité puisque $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})$ est un espace (de Hilbert) donc complet [résultat admis ici!] pour le produit scalaire

$$(3.55)\ \begin{cases} (f,g)_s = \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s\, \overline{\hat{f}(\xi)}\, \hat{g}(\xi)\, d\xi, \\ \qquad f,g \in H^s(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Or on a $\gamma\varphi(x') = \varphi(x',0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{N-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{ix'\xi'} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi',\xi_n)\, d\xi_n \right\} d\xi'$

et la formule d'inversion de Fourier montre que la transformée de Fourier (dans $\mathbb{R}^{N-1}$) de $\gamma\varphi$ est la fonction $g(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi',\xi_n)\, d\xi_n$.

- Pour $s > 1/2$, la fonction $\xi_n \mapsto 1/(1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^s$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et grâce au changement de variables $\xi_n = (1+|\xi'|^2)^{1/2}\lambda$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_n}{(1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^s} = \left(\frac{1}{1+|\xi'|^2}\right)^s (1+|\xi'|^2)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)^s}$$
$$\equiv C_s\, (1+|\xi'|^2)^{-s+1/2}.$$

On a ensuite

$$g(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \widehat{\varphi}(\xi',\xi_n)\, (1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^{s/2} \right\} \frac{d\xi_n}{(1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^{s/2}}$$

et grâce aux hypothèses $\widehat{\varphi}\,(1+|\xi|^2)^{s/2} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et $s > 1/2$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la relation précédente :

(3.56) $$2\pi\, |g(\xi')|^2 \leq C_s\, (1+|\xi|^2)^{-s+1/2} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}|^2 (1+|\xi|^2)^s\, d\xi_n.$$

$\xi = (\xi', \xi_n)$

On multiplie l'inégalité (3.56) par $(1+|\xi|^2)^{s-1/2}$ et on intègre sur $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$. On a alors

$$\|\gamma\varphi\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \frac{1}{2\pi} C_s\, \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$$

ce qui établit l'inégalité (3.54). □

- Nous revenons au problème de la "valeur au bord" ou "trace" $\gamma_0 u : \Gamma \to \mathbb{R}$ de $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Cette notion n'a pas de sens pour $u \in L^2(\Omega)$ (voir l'exemple (3.50)) et, comme pour le cas de la dimension 1, elle en prend une si on a une estimation du type

$$\boxed{(3.57)\ \exists C>0,\ \forall u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}),\ \|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\,\|u\|_1}$$

Dans ce cas (si la relation (3.57) est vraie), on prend une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ qui converge vers $u \in H^1(\Omega)$ [lorsque Ω est 1-régulier] : $\|u_k - u\|_1 \to 0$, donc est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Compte tenu de (3.57) (appliquée à $(u_n - u_{n+p})$), la suite des traces $(\gamma u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Gamma)$ est de Cauchy, donc converge dans cet espace complet vers une fonction qu'on définit comme étant égale à $\gamma_0 u \in L^2(\Gamma)$. Cette fonction ne dépend pas de la suite u_k qui converge vers u (prendre une seconde suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ qui converge vers u en norme H^1 et introduire la suite entrelacée $u_0, v_0, u_1, v_1, \dots$) et en passant à la limite dans l'inégalité $\|\gamma_0 u_k\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\,\|u_k\|_1$, l'inégalité (3.57) est vraie pour $u \in H^1(\Omega)$.

- Il reste à établir l'estimation a priori (3.57). On le propose ici (et le cas général se réduit à de la technique sur les cartes locales, les partitions de l'unité, etc...) dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N,\ y_N > 0\}$.

auquel on se ramène avec des cartes locales φ_j introduites aux relations (3.40) à (3.43). Lorsque $u \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$, sa trace $\gamma_0 u$ est une fonction définie sur le bord $\partial\mathbb{R}^N_+$ de $\mathbb{R}^N_+$, qui est isomorphe à $\mathbb{R}^{N-1}$:

$$(3.58) \quad \partial\mathbb{R}^N_+ = \{ y = (y', 0),\ y' \in \mathbb{R}^{N-1} \}.$$

Pour $y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ (qui est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$, cf (3.45)), on a

$$0 - |u(y',0)|^2 = \int_0^Y \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_N} [u(y',\theta)]^2 \Big\} d\theta = \int_0^Y 2\, u(y',\theta) \frac{\partial u}{\partial x_N}(y',\theta)\, d\theta$$

$$|u(y',0)|^2 \leq \int_0^Y |u(y',\theta)|^2 d\theta + \int_0^Y \Big|\frac{\partial u}{\partial x_N}(y',\theta)\Big|^2 d\theta .$$

Puis on intègre l'inégalité précédente par rapport à $y' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Il vient

$$\|\gamma_0 u\|^2_{L^2(\partial\mathbb{R}^N_+)} \leq \|u\|_0^2 + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_N}\Big\|_0^2 , \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+}) .$$

ce qui établit

$$(3.59) \qquad \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\mathbb{R}^N_+)} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} , \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+}) .$$

- Ce qui précède (plus des compléments techniques de géométrie différentielle qui n'apportent pas d'idée nouvelle pour le problème qui nous intéresse) montre que la trace $\gamma_0 u$ de $u \in H^1(\Omega)$ a un sens comme fonction de $L^2(\Gamma)$ et dépend continûment de u pour la topologie de $H^1(\Omega)$.

$$\boxed{(3.60) \begin{cases} \exists C > 0, \ \|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|u\|_1 , & \forall u \in H^1(\Omega) \\ \gamma_0 u(x) = u(x) , & \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \ \forall x \in \Gamma = \partial\Omega . \end{cases}}$$

Cette existence de la trace au bord montre qu'en général, $\mathcal{D}(\Omega)$ ne peut être dense dans $H^1(\Omega)$. En effet, si c'était le cas, on aurait $u_k \to u$ dans $H^1(\Omega)$ avec $u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$. Mais $\gamma_0(u_k)=0$ pour $u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ donc $\gamma_0 u=0$ par continuité H^1, ce qui élimine les constantes, qui appartiennent à $H^1(\Omega)$ si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Compte tenu de la définition (3.52) et du point qui précède, on a

$$\boxed{(3.61) \qquad H^1_0(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega), \ \Omega \text{ ouvert borné } \subset \mathbb{R}^N.}$$

- on a, compte tenu du raisonnement vu plus haut et la définition (3.52) de $H^1_0(\Omega)$, l'inclusion $H^1_0(\Omega) \subset \ker \gamma_0$: la trace de toute fonction de H^1_0 est identiquement nulle sur Γ. L'inclusion inverse est également vraie, résultat que nous admettons ici (voir la preuve dans Raviart-Thomas par exemple)

$$\boxed{(3.62) \qquad \ker \gamma_0 = H^1_0(\Omega). \quad \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^N.}$$

- On dispose donc de la trace au bord $\gamma_0 u$ de toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, donc d'une application linéaire continue $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ dont nous avons caractérisé le noyau au en (3.62). Une question mathématiquement naturelle est de savoir si γ_0 est surjective, i.e. si toute fonction $\varphi \in L^2(\Gamma)$ peut s'écrire sous la forme $\varphi = \gamma_0 u$ pour $u \in H^1(\Omega)$. La réponse est <u>négative</u>

l'image de γ_0 est un sous-espace strictement inclus dans $L^2(\Gamma)$ qui peut se caractériser par transformation de Fourier lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. On pose donc

$$\boxed{(3.63) \qquad \operatorname{Im}\gamma_0 = H^{1/2}(\Gamma) \subsetneq L^2(\Gamma).}$$

- L'extension des résultats précédents aux espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ d'ordre entier $m \geq 2$ demande un certain soin. Dans le cas $m=2$ on pose

$$(3.64) \qquad H^2_0(\Omega) = \operatorname{adh}_{H^2(\Omega)}(\mathcal{D}(\Omega)).$$

Dans le cas monodimensionnel et $\Omega =]0,1[$, le fait que la norme H^2 contrôle (en moyenne quadratique) les deux premières dérivées et que $u \in H^2(0,1)$ implique $\frac{\partial u}{\partial x} \in H^1(0,1)$ montre que non seulement les valeurs $u(0)$ et $u(1)$ de la fonction au bord "n'ont pas le temps de décoller" mais qu'il en est de même pour les dérivées aussi premières $\frac{\partial u}{\partial x}(0)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(1)$.

- Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, la caractérisation (3.64) et la condition

$$(3.65) \qquad H^2(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in H^1(\Omega),\ j=1,\dots,N\}$$

montrent que si $u \in H^2_0$, $\gamma_0 u$ est nulle ainsi que $\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$, ie $\gamma_0(\nabla u)$. En séparant gradient tangentiel et gradient normal

$$(3.66) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} \equiv \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, n_j\,, \quad n_j \text{ normale extérieure à } \partial\Omega$$

on a la caractérisation de $H_0^2(\Omega)$ qui suit :

(3.67) $\quad H_0^2(\Omega) = \{ u \in H^2(\Omega), \gamma_0 u = 0, \ \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0 \}$.

- Par analogie entre (3.62) et (3.67), on se convainc facilement que la bonne notion de trace sur $H^2(\Omega)$ est l'application γ_1 qui à $u \in H^2(\Omega)$, associe le couple $\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. On retient que la trace au bord d'une fonction deux fois dérivable est constituée des valeurs de la fonction $u(\cdot)$ et des valeurs limites des dérivées normales $\frac{\partial u}{\partial n}(\cdot)$. On dispose donc d'une application γ_1 :

(3.68) $\gamma_1 : H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \ ; \ \gamma_1 u = \quad \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)$.

Le noyau de (γ_0, γ_1) est constitué de $H_0^2(\Omega)$, fonctions de H^2 nulles au bord et dont le gradient est nul au bord

(3.69) $\quad \ker(\gamma_0, \gamma_1) = H_0^2(\Omega)$.

L'image de γ_1 est bien entendu distincte de $L^2(\Gamma)^2$. Elle est constituée de $\quad H^{3/2}(\Gamma)$

(3.70) $\quad \mathrm{Im}\,\gamma_1 = H^{3/2}(\Gamma)$

où $H^{1/2}(\Gamma)$ a été introduit en (3.30) et (3.63) ; $H^{3/2}(\Gamma)$ est inclus <u>strictement</u> dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

5) Formules de Green

- Il s'agit de généraliser la formule d'intégration d'une dérivée :

(3.71) $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$

qui, lorsqu'on remplace f par le produit fg, est plus connue comme "formule d'intégration par parties" (ce que l'on fait lorsqu'on ne sait pas quoi faire) :

(3.72) $\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt + \left[fg\right]_a^b$.

- Dans le cas d'un ouvert borné Ω de frontière Γ "assez régulière" l'intégrale sur Ω de la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ (pour $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$) est une intégrale de bord :

(3.73) $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n_j\,d\sigma(x)$, Ω 1-régulier, $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$)

qui fait intervenir la normale unitaire extérieure $n = (n_1, \dots, n_N)$ au domaine Ω au point $x \in \partial\Omega$.
On écrit plus souvent la relation fondamentale (3.73) (qui redonne exactement (3.71) pour $\Omega =]a,b[$) pour u remplacé par ~~la~~ le produit uv de deux fonctions ; c'est la formule de Green.

$$(3.74) \left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\,v\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\,v(x)\,n_j(x)\,d\sigma(x) \\ u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\ \Omega \text{ ouvert 1-régulier} \subset \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

• Si on fait la somme des composantes de la relation (3.73) avec $u(x)$ champ de vecteurs sur $\overline{\Omega}$, il vient

$$(3.75)\quad \int_\Omega \operatorname{div} u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n \, d\gamma \,, \quad \Omega \text{ 1-régulier}, \; u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^N .$$

Si u est toujours un champ de vecteurs et $v \equiv \varphi$ un champ scalaire sur Ω, la sommation sur j des relations (3.74) s'écrit

$$(3.76)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega u \cdot \nabla\varphi \, dx = -\int_\Omega (\operatorname{div} u)\, \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} (u \cdot n)\, \varphi \, d\gamma \\ \qquad u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^N, \; \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) . \end{cases}$$

Si on suppose maintenant $u_j = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j}$, la relation (3.76) entraîne immédiatement

$$(3.77)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\Delta\psi)\, \varphi \, dx = -\int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, \varphi \, d\gamma \\ \qquad \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \; \psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) . \end{cases}$$

• L'extension des relations précédentes aux espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ est facile. La "recette de cuisine" qu'on peut donner ici est la suivante : si les intégrales de volume ont un sens compte tenu de la forte présence de $L^2(\Omega)$ dans la définition des espaces de Sobolev, alors la formule de Green prend un sens en ayant soin de considérer les intégrales de bord au sens des traces. On a ainsi :

(3.78) $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx = \int_\Gamma (\gamma_0 u)\, n_j\, d\gamma$, Ω 1-régulier, $u \in H^1(\Omega)$)

$$\boxed{(3.79)\quad \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\, v\, dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\, n_j\, d\gamma \; ; \; u, v \in H^1(\Omega)}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} u\, dx = \int_\Gamma (\gamma_0 u)\cdot n\, d\gamma, \quad u \in H^1(\Omega)^N$$

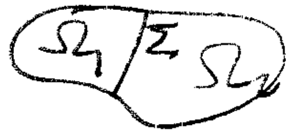
$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\operatorname{div} u)\varphi\, dx = -\int_\Omega u\cdot\nabla\varphi\, dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u\cdot n)(\gamma_0\varphi)\, d\gamma \\ \qquad u \in H^1(\Omega)^N,\ \varphi \in H^1(\Omega),\ \Omega \text{ 1-régulier} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\Delta\psi)\varphi\, dx = -\int_\Omega \nabla\psi\cdot\nabla\varphi + \int_\Gamma \gamma_0\!\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)(\gamma_0\varphi)\, d\gamma \\ \qquad \psi \in H^2(\Omega),\ \varphi \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

et ainsi de suite ...

- On termine ce chapitre par un exercice d'application. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière Γ et décomposé en deux "sous domaines" Ω_1 et Ω_2 d'interface (régulière) Σ [figure 3]

(3.80) $\quad \Omega = \Omega_1 \cup \Sigma \cup \Omega_2$



(3.81) $\quad \Sigma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$

Figure 3

On se demande à quelle condition une fonction $u \in L^2$ de restriction u_i à Ω_i, i.e. :

(3.82) $\quad u \in L^2,\ u_i = u|_{\Omega_i} \quad i = 1, 2$

appartient à $H^1(\Omega)$.

• Si u appartient à $H^1(\Omega)$, ses restrictions u_i appartiennent à $H^1(\Omega_i)$ et le problème se concentre sur l'interface Σ. On a donc, quitte à prolonger u_1 par 0 sur Ω_2 (et u_2 par 0 sur Ω_1) :

(3.83) $$u = u_1\,\chi_{\Omega_1} + u_2\,\chi_{\Omega_2} .$$

On peut calculer la dérivée de $\partial u/\partial x_j$ au sens des distributions. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; on a :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx =$$

$$= - \int_{\Omega_1} u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx - \int_{\Omega_2} u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx$$

$$= \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \varphi\, dx - \int_\Sigma \gamma_0 u_1 \varphi n_j\, d\sigma + \int_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \varphi\, dx + \int_\Sigma \gamma_0 u_2 \varphi n_j\, d\sigma$$

en orientant la normale à Σ de Ω_1 vers Ω_2, compte tenu de (3.79). On a donc

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \varphi\, dx + \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \varphi\, dx + \int_\Sigma (\gamma_0 u_2 - \gamma_0 u_1) \varphi n_j\, d\sigma .$$

c'est à dire

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \chi_{\Omega_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \chi_{\Omega_2} + [u]_\Sigma\, \delta_\Sigma\, n_j$$

où le saut de u à travers l'interface Σ est défini par

$$[u]_\Sigma = \gamma_0 u_2 - \gamma_0 u_1 .$$

Si l'on admet que la distribution δ_Σ n'est pas une fonction, le fait que la distribution $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ soit une fonction impose $[u]=0$. On a donc à prouver la proposition suivante :

(3.84) $\left(u \in H^1(\Omega)\right) \Leftrightarrow \left(u_i \in H^1(\Omega_i),\ \gamma_0 u_1 = \gamma_0 u_2 \text{ sur } \Sigma\right)$, u donné par (3.83).

- Si u, donnée par (3.83), appartient à $H^1(\Omega)$, alors $\exists\, u_k \in \mathscr{C}^1(\bar\Omega)$, u_k converge vers u dans $H^1(\Omega)$.
  Par suite $v_i^k \equiv u_k|_{\Omega_i}$ converge vers u_i dans $H^1(\Omega_i)$ et on a bien entendu $\gamma_0 v_1^k = \gamma_0 v_2^k$, où le membre de gauche est une trace relativement au bord de Ω_1 et celui de droite une trace relative au bord de Ω_2, là où l'égalité peut être possible, ie sur $\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Comme la trace est un opérateur continu $\gamma_0 v_i^k$ converge vers $\gamma_0 u_i$ dans $L^2(\Sigma)$ (cf (2.42)), on déduit par unicité de la limite $\gamma_0 u_1 = \gamma_0 u_2$ ce qui établit le terme de droite de l'équivalence (3.8). Réciproquement, si $u_i \in H^1(\Omega_i)$ et $[u] = 0$ sur Σ, alors le calcul (2.69) montre que $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ est la fonction égale à $\frac{\partial u_1}{\partial x_j}$ sur Ω_1 et à $\frac{\partial u_2}{\partial x_j}$ sur Ω_2. Comme ces deux fonctions sont de carré intégrable sur Ω_1 et Ω_2 respectivement, $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ est de carré intégrable sur Ω et la propriété est établie. $\square$

7) Compacité

- Un résultat important pour les applications concerne l'étude de l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Lorsque Ω est borné et 1-régulier, le théorème de Rellich montre que cette injection est compacte

$$\boxed{(3.85)\quad \left(H^1(\Omega) \ni u \mapsto u \in L^2(\Omega)\right) \text{ est compacte}, \quad \begin{array}{l}\Omega \text{ borné},\\ \Omega \text{ 1-régulier}\end{array}}$$

c'est à dire que toute partie bornée de $H^1(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. En pratique, ceci signifie que si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ est bornée, i.e. $\exists C>0$, $\|u_k\|_1 \leq C$, alors on peut en extraire une sous suite (encore notée u_k) de sorte que u_k converge dans $L^2(\Omega)$.

$$\boxed{(3.86)\quad \left(\exists C>0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \|u_k\| \leq C\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l}\exists u_k \text{ extraite},\ \exists u \in L^2(\Omega)\\ u_k \to u \text{ dans } L^2(\Omega)\end{array}\right)}$$

- La preuve de la relation (3.86) utilise de façon essentielle la propriété de compacité faible de la boule unité dans un espace de Hilbert [si H est un espace de Hilbert et u_k une suite bornée de H, il existe une suite extraite u_k qui converge faiblement dans H : $(u_k, \varphi)_H \to (u, \varphi)_H$, $\forall \varphi \in H$]. Si l'ouvert Ω est 1-régulier, il existe un opérateur linéaire continu P de prolongement de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$:

$$(3.87)\quad \begin{cases} H^1(\Omega) \ni u \mapsto \tilde{u} = Pu \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ \exists C>0, \quad \|Pu\|_{1,\mathbb{R}^N} \leq C \, \|u\|_{1,\Omega}, \end{cases} \qquad \Omega\text{-1-régulier}$$

tel que

$$(3.88)\qquad (Pu)(x) = u(x) \quad pp(x) \in \Omega .$$

on peut de plus se ramener au cas où Pu a son support dans un compact K fixé, borné de $\mathbb{R}^N$:

$$(3.89)\qquad Pu(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq \tilde{M}. \quad , u \in H^1(\Omega)$$

- La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, donc il en est de même de $v_k = Pu_k$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

on peut donc en extraire une sous suite <u>faiblement</u> convergente dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ [v_k est également bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ si elle l'est dans $H^1(\mathbb{R}^N)$], qu'on note encore $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

quitte à changer v_k en $v_k - v$, on peut supposer que $v_k \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ faiblement :

$$(v_k, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0 \qquad \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Compte tenu de l'isométrie de la transformée de Fourier, on a :

$$\|v_k\|^2_{0,\mathbb{R}^N} = \|\hat{v}_k\|^2_{0,\mathbb{R}^N} \qquad \text{donc}$$

$$(3.90)\quad \|v_k\|_0^2 \leq \int_{|\xi|\leq M} |\hat{v}_k|^2 d\xi + \frac{1}{1+M^2}\int_{|\xi|\geq M} (1+|\xi|^2)|\hat{v}_k(\xi)|^2 d\xi$$

Montrons que v_k converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$; il suffit de montrer que le membre de droite de (3.90) tend vers 0. Comme $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H^1, il en est de même de $(Pu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (cf (3.83)) et de $\left((1+|\xi|^2)^{1/2}\,\widehat{u_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ compte tenu de (3.29). On a donc

$$\int_{|\xi|\leq M}(1+|\xi|^2)\,|\hat{v}_k(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)\,|\hat{v}_k(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \text{Cte}.$$

- Un nombre réel $\varepsilon>0$ arbitraire étant donné, on peut toujours trouver $\dot{M}>0$ de sorte que

$$\frac{1}{1+M^2}\int_{|\xi|\geqslant M}(1+|\xi|^2)\,|\hat{v}_k(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \frac{\text{Cte}}{1+M^2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme par ailleurs le support de v_k appartient à un compact fixe K, $v_k\in L^1(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$\widehat{v_k}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi}\,v_k(x)\,dx$$

$$\hat{v}_k(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\int_{|x|\leq \tilde{M}} e^{-ix\xi}\,v_k(x)\,dx.$$

Pour tout $\xi\in\mathbb{R}^N$, la fonction $x\mapsto e^{-ix\xi}$ appartient à $L^2(B(0,\tilde{M}))$ donc est une fonction test particulière de $L^2(\mathbb{R}^N)$ si on la prolonge par 0. Comme $v_k\to 0$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, $\hat{v}_k(\xi)\to 0$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}^N$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet alors de majorer le premier terme du membre de droite de (3.90) puisque la suite $\widehat{v_k}(\xi)$ est bornée dans $L^2(B(0,M))$ car $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ l'est dans H^1. L'intégrale $\int_{|\xi|\leq M} |\widehat{v_k}(\xi)|^2 d\xi$ tend vers zéro si $k\to\infty$, donc elle est $\leq \varepsilon/2$ si k est assez grand. $\square$

- Dans le cas où Ω n'est pas borné,

la situation est moins simple. Dans le cas particulier où $\Omega=\mathbb{R}^N$, l'injection $H^1(\mathbb{R}^N)\ni u\mapsto u\in L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compacte

$$\boxed{(3.91)\quad \left(H^1(\mathbb{R}^N)\ni u\mapsto u\in L^2(\mathbb{R}^N)\right) \text{ n'est pas compacte.}}$$

On peut s'en convaincre en prenant $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ fixée non nulle à support dans $B(0,1/2)$ et fabriquer la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

(3.92) $\quad u_k(x)=\varphi(x-k) \quad , k\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}^N.$

La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans tous les $H^m(\mathbb{R}^N)$; $\|u_k\|_1=\|\varphi\|_1$ en particulier et cependant elle ne converge pas dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Elle converge au sens des distributions vers 0,

donc la seule limite possible dans L^2 est $u=0$. Comme on a $\|u_k\|_0\equiv\|\varphi\|_0\neq 0$, on ne peut avoir $u_k\to 0$ fortement dans L^2, ce qui montre la propriété. $\square$

Chapitre 4

Fourier discret

- Introduction
- Coefficients de Fourier et séries de Fourier
- Théorie hilbertienne
- Opérateurs linéairement équivalents

François Dubois, janvier 2000, édition août 2007, 15 pages.

IV Fourier discret

1) Introduction

- Nous avons vu au chapitre II que la transformation de Fourier est une isométrie $L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$. L'addition dans $\mathbb{R}^N$ joue un rôle déterminant et de façon précise le fait que $(\mathbb{R}^N, +)$ est un groupe abélien. Pour généraliser les résultats vus plus haut à d'autres fonctions (par exemple les fonctions périodiques de période 2π, ie les fonctions sur le groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), nous rappelons rapidement quelques mots sur la théorie générale. Le lecteur intéressé uniquement par les applications peut sauter ce paragraphe sans difficulté.

- L'outil de la généralisation de la transformation à un groupe abélien localement compact G quelconque est la notion de

<u>caractère</u>. Un caractère γ est un homomorphisme continu de G dans le groupe multiplicatif S^1 des nombres complexes de module égal à 1 :

$$(4.1) \quad G \ni g \mapsto \gamma(g) \in S^1 \equiv \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\} .$$

$$(4.2) \quad \gamma(g+g') = \gamma(g)\, \gamma(g') \quad , \quad g, g' \in G .$$

• On a $G = (\mathbb{R}^N, +)$ dans le cas de la transformation de Fourier et $\gamma(x) = \exp(-i x \xi)$ est paramètré par $\xi \in \mathbb{R}^N$. Le <u>groupe dual</u> $\widehat{G}$ est le groupe des caractères, i.e. des homomorphismes continus de G dans S^1 ; on observe que $\widehat{G} \simeq (\mathbb{R}^N, +)$ si $G = (\mathbb{R}^N, +)$.

• De plus, la théorie générale des groupes localement compacts montre qu'il existe une unique (à un facteur multiplicatif près) mesure dg invariante par translation, i.e. par le changement de variable $G \ni g \mapsto g + a \in G$

pour $a \in G$ fixé [on note + la loi de composition du groupe abélien G].

- Par définition, la transformée de Fourier de $f \in L^1(dg)$ est une fonction $\hat{f}$ définie sur le groupe dual $\hat{G}$ des caractères :

$$(4.3) \qquad \hat{G} \ni \gamma \mapsto \hat{f}(\gamma) = \int_G \gamma(g)\, f(g)\, d\gamma \in \mathbb{C}$$

- On a vu que le groupe dual de $G = (\mathbb{R}^N, +)$ s'identifie encore à $\mathbb{R}^N$ via l'application $\mathbb{R}^N \ni \xi \mapsto \exp[i(\bullet, \xi)] \in \hat{G}$ qui définit un caractère sur $\mathbb{R}^N$ paramétré par ξ.
Mais on peut utiliser d'autres groupes abéliens. Un exemple classique consiste à utiliser les nombres réels modulo 2π

$$(4.4) \qquad G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,.$$

Il faut dans un premier temps "calculer" le groupe dual $\hat{G}$. Pour $\theta \in G$ [θ est donc défini à 2π près], on cherche un caractère $\gamma(\theta)$ qui prend ses valeurs dans le cercle S^1 des complexes de module égal à 1, donc sous la forme $\gamma(\theta) = \exp(-i\xi\theta)$. Mais pour que cette expression ait un sens avec $\theta \in G$, il faut que le résultat soit indépendant du choix du représentant de θ, i.e qu'on ait aussi $\gamma(\theta) = \exp[-i\xi(\theta+2\pi)]$. Par suite, on a nécessairement $\exp(-2i\pi\xi) = 1$, donc $\xi \in \mathbb{Z}$

$$(4.5) \qquad \widehat{G} = \mathbb{Z} \quad \text{si } G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

- On choisit pour mesure invariante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx$ sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (où dx est la mesure de Lebesgue). Une fonction $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est aussi une fonction périodique $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 2π :

$$(4.6) \qquad \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}, \; f(x+2k\pi) = f(x) \quad pp(x) \in \mathbb{R}, \; \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dire que $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ signifie

$$(4.7) \qquad \int_0^{2\pi} |f(x)| \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} < \infty \iff f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

- La transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ est donc une fonction $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui, au caractère $\gamma_k : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

(4.8) $\quad \gamma_k(\theta) = e^{-ik\theta}, \quad k \in \mathbb{Z}, \ \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

associe le nombre $(Ff)(k) = \hat{f}(k)$ grâce à (4.3), c'est à dire ici

$$\boxed{(4.9) \quad \hat{f}(k) = \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi}}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \ k \in \mathbb{Z}}$$

- on peut aussi, échangeant les rôles de G et $\widehat{G}$ dans les relations (4.4) et (4.5), voir qu'un caractère sur $\mathbb{Z}$ est de la forme $\mathbb{Z} \ni k \mapsto (e^{i\theta})^k \in S^1$ et qu'il est bien défini pour $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On munit $\mathbb{Z}$ de la mesure de comptage divisée par $\sqrt{2\pi}$ et $\ell^1(\mathbb{Z})$ est l'espace vectoriel des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de série associée absolument convergente :

$$(4.10) \quad u \in \ell^1(\mathbb{Z}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbb{Z} \ni k \mapsto u_k \in \mathbb{C} \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| < \infty \end{cases}$$

La transformée de Fourier (inverse) $\widetilde{F}u$ de $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ est la série de Fourier de coefficient u_k, c'est à dire une fonction périodique de période 2π définie par

$$\boxed{(4.11) \quad \widetilde{F}u(x) = \tilde{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e^{ikx}, \quad u \in \ell^1(\mathbb{Z}), \ x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}$$

2) Coefficients de Fourier et séries de Fourier.

- Le paragraphe précédent montre que nous disposons de deux transformées de Fourier. L'une est définie sur $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ par la relation (4.9)

$$(4.12)\quad L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \ni f \mapsto \mathcal{F}f = \hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$$

puisqu'il est clair que lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, les coefficients de Fourier $\hat{f}(k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ sont bornés :

$$(4.13)\quad \|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} .$$

L'autre est définie sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ par la relation (4.11) et associe à $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sa série de Fourier :

$$(4.14)\quad \ell^1(\mathbb{Z}) \ni u \mapsto \tilde{\mathcal{F}}u = \tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) .$$

- Le résultat général (2.4) se traduit maintenant des deux façons suivantes sur $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$. On a d'une part le théorème de Riemann-Lebesgue sur la décroissance des coefficients de Fourier

$$\boxed{(4.15)\quad \hat{f}(k) \to 0 \text{ si } |k| \to \infty \quad , f\in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$$

et d'autre part la continuité de la série de Fourier lorsqu'on somme une série absolument convergente

$$\boxed{(4.16)\left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni \theta \mapsto \tilde{u}(\theta) \in \mathbb{C}\right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \quad u \in \ell^1(\mathbb{Z})} .$$

- La formule d'inversion de Fourier est facile à établir si on suppose à la fois $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\widetilde{u} = \widetilde{\mathcal{F}} u \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Ainsi que le suggère lui-même Fourier dans sa Théorie Analytique de la Chaleur (1822) [dans note en pied de page !], on multiplie la relation (4.11) par $\exp(-inx)$ et on intègre de 0 à 2π. La série du membre de droite est absolument convergente si $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ donc on échange les symboles $\int$ et Σ et on trouve finalement $\sqrt{2\pi}\, u_n$. Par ailleurs $\widetilde{u}(\bullet)$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ et il vient

$$(4.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \widetilde{u}(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \,, \quad n \in \mathbb{Z} \,, \\ \qquad\qquad u \in \ell^1(\mathbb{Z}) \,, \; \widetilde{u} \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

relation qui est l'analogue "discret" de la relation (2.10) et peut s'écrire aussi

$$(4.18) \quad u = \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{F}}u), \quad u \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad \tilde{\mathcal{F}}u \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

- Le théorème d'inversion de Fourier exprime aussi que "toute fonction périodique est somme de sa série de Fourier". De façon précise, si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ (f périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$ et <u>continue</u>) et $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (les coefficients de Fourier forment une série convergente), alors

$$\boxed{(4.19) \quad f = \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f), \quad f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z}).}$$

Le théorème de Stone-Weierstrass [si K est un compact de $\mathbb{R}^N$, F un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(K)$ qui (i) forme une algèbre ($f, g \in F \Rightarrow fg \in F$) (ii) est stable par conjugaison complexe ($f \in F \Rightarrow \bar{f} \in F$) et (iii) sépare les points (pour $x \neq y$ dans K, il existe f dans F tel que $f(x) \neq f(y)$), alors F est un sous-espace dense de $\mathcal{C}^0(K)$] assure d'abord que les polynomes trigonométriques (les sommes finies de la forme $\sum_{|k| \leq p} \frac{\alpha_k}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$) forment une famille dense de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, donc la fonction $g = f - \tilde{\hat{f}}$ (qui est continue car f l'est et $\hat{f} \in \ell^1$ donc $\tilde{\hat{f}}$ l'est aussi en vertu de (3.60)) dont tous les coefficients de Fourier sont nuls ($\hat{g} \equiv 0$) est limite uniforme

de polynomes trigonométriques P_k ($k \in \mathbb{N}$).
Par suite, $\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} g(x)\, P_k(x)\, dx$ qui est nul pour tout k. Donc g est nulle, ce qui montre le résultat. □

3) Théorie hilbertienne

- La preuve précédente rappelle clairement que le "bon" cadre pour l'étude des séries de Fourier est le cadre $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ v.s. $\ell^2(\mathbb{Z})$.
 Ceci est d'autant plus naturel que, compte tenu de l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a $\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx \leqslant \sqrt{2\pi}\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$ donc

$$(4.20) \qquad L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \subset L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

- Pour $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, les coefficients de Fourier $\hat{f}(k)$ restent définis par la relation (4.9) et l'application $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \ni f \mapsto \mathcal{F}f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ est en fait à valeurs dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Elle réalise même une isométrie de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, ainsi que l'exprime l'égalité de <u>Bessel-Parseval-Plancherel</u> :

$$\boxed{(4.21) \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$$

- La preuve de la relation (4.21) résulte d'une part du fait que le polynome trigonométrique

$$(4.22) \quad [P_N(f)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad N \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

est la projection dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ du "vecteur" f sur le sous-espace H_N engendré par les exponentielles $x \mapsto e^{ikx}$ pour $|k| \leq N$:

$$(f - P_N(f), e^{ikx}) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) (e^{ikx}, e^{ikx}) = 0$$

et d'autre part de la propriété (classique) que l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ des fonctions continues est dense dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé de manière arbitraire, il existe $N \in \mathbb{N}$ et un polynome $p \in H_N$ de sorte que si $n \geq N$,

$$\|f - P_n(f)\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} \leq \|f - P_N(f)\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} \leq \|f - p\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} < \varepsilon.$$

La suite $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers f dans l'espace $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, donc la suite des normes $\|P_n(f)\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} = \left\{ \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}(k)|^2 \right\}^{1/2}$ vers la norme de f dans L^2, ce qu'exprime la relation (4.21). $\square$

- Nous venons en fait de montrer que pour $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, la série de Fourier $\tilde{u}(x)$ définie en (4.11) a un sens dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$:

$$\boxed{(4.23) \qquad \ell^2(\mathbb{Z}) \ni u \longmapsto \tilde{\mathcal{F}} u = \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$$

et la relation (4.21) [égalité de Bessel Parseval] montre que la transformation $\tilde{\mathcal{F}}$ est une isométrie entre espaces de Hilbert.

- Les autres propriétés des séries de Fourier s'établissent alors facilement. Si T_m est l'opérateur de translation d'indice m ($m \in \mathbb{Z}$) :

$$\boxed{(4.24) \begin{cases} \ell^2(\mathbb{Z}) \ni u \longmapsto T_m u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \qquad (T_m u)_k = u_{k-m} \,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

alors

$$\boxed{(4.25) \quad \tilde{\mathcal{F}}[T_m u](x) = e^{imx} (\tilde{\mathcal{F}} u)(x) \,, \; x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \,, u \in \ell^2(\mathbb{Z})}$$

et la transformation de Fourier <u>diagonalise</u> cet opérateur : l'opérateur $\hat{T}_m \equiv \tilde{\mathcal{F}} \, T_m \, (\tilde{\mathcal{F}})^{-1}$ est diagonal dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$: $\hat{T}_m \varphi(x) = (e^{ix})^m \varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\varphi \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Pour la dérivation de la transformée de Fourier, si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |u_k|^2 < \infty$, alors $\tilde{u}(x)$ appartient à $H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$: $\frac{d\tilde{u}}{dx}$ a un sens dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et est presque partout donnée par la somme $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} i k u_k e^{ikx}$

$$(4.26)\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{dx} \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \ \frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} i k u_k e^{ikx} \\ \text{si } u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \text{ et } (\mathbb{Z} \ni k \mapsto k u_k \in \mathbb{C}) \in \ell^2(\mathbb{Z}). \end{cases}$$

C'est l'analogue discret de la relation (2.14).

4) <u>opérateurs unitairement équivalents</u>.

- Nous terminons (presque !) ce chapitre par une utilisation importante en pratique. Soit T un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$(4.27)\ T : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$$

de sorte que l'opérateur $\widehat{T}$ défini de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{T} & L^2(\mathbb{R}^N) \\ F\downarrow & & \downarrow F \\ L^2(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\widehat{T}} & L^2(\mathbb{R}^N) \end{array}$$

ie

(4.28) $\hat{T}\varphi = F\, T\, \overline{F}\varphi, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$

soit diagonal :

(4.29) $(\hat{T}\varphi)(\xi) = A(\xi)\, \varphi(\xi), \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N),\ \xi \in \mathbb{R}^N.$

En d'autres termes, $Tu(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{Tu}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$ (formellement !) ie

$(Tu)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{T}\hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} A(\xi)\hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$

(4.30) $\widehat{Tu}(\xi) = A(\xi)\, \hat{u}(\xi), \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ \xi \in \mathbb{R}^N.$

on dit alors que T est un opérateur pseudo-différentiel ; le cas où T est différentiel revient à prendre pour $A(\xi)$ un polynome en ξ.

- on a alors la propriété suivante, importante en pratique :

(4.31) $\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^N), L^2(\mathbb{R}^N)} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |A(\xi)|$

on note que l'inégalité "$\leq$" est facile : pour $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a

$\|Tu\|_0^2 = \|\widehat{Tu}\|_0^2 = \|A(\xi)\hat{u}\|_0^2 \leq \left(\sup_{\mathbb{R}} |A(\cdot)|\right)^2 \|\hat{u}\|_0^2$

et $\|\hat{T}\| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |A(\xi)|$.

L'inégalité "$\geq$" impose de regarder précisément $\hat{\varphi}$ là où $|A(\xi)|$ est extremal.

- La version du résultat précédent dans le cadre discret des suites de série associée de carré convergente ($u \in \ell^2(\mathbb{Z})$) mérite l'attention.

On a

(4.32) $\quad T : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$

et l'opérateur $\hat{T}$ rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\tilde{F}"'] & \ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[d, "\tilde{F}"] \\
L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \arrow[r, "\hat{T}"] & L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

ie

$$(\hat{T}\,\tilde{u})(x) = (\widetilde{Tu})(x) , \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}), \; x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

$$\boxed{(4.33) \quad \hat{T} \equiv \tilde{\mathcal{F}}\, T\, \mathcal{F} .}$$

Lorsque cet opérateur est <u>diagonal</u>, ie

$$\boxed{(4.34) \qquad (\hat{T} f)(x) = A(x)\, f(x) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$$

on a:

(4.35)
$$\boxed{\|T\|_{\ell^2(\mathbb{Z}),\, \ell^2(\mathbb{Z})} = \sup_{\xi \in [0, 2\pi]} |A(\xi)| .}$$

• Un exemple important en pratique est celui du "laplacien discret" δ :

$$(4.36) \qquad (\delta u)_j = \frac{1}{h^2}\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right), \; u \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

On a aussi $\delta = \frac{1}{h^2}\left(T_1 - 2I_d + T_{-1}\right)$. Compte tenu de (4.25) et (4.33), il vient $\widehat{\delta} = \frac{1}{h^2}\left(e^{ix} - 2 + e^{-ix}\right)$; c'est un opérateur diagonal unitairement équivalent à δ, donc

$$(4.37) \qquad \|\delta\|_{\ell^2(\mathbb{Z}), \ell^2(\mathbb{Z})} = \frac{4}{h^2} \sup_{x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{4}{h^2}.$$

puisque $e^{ix} - 2 + e^{-ix} = -2(1 - \cos x) = -4 \sin^2 \frac{x}{2}$.
La norme du laplacien discret vaut $4/h^2$.