# L'ACCELERATION DES FONCTIONS RESURGENTES
## (survol)

**Jean Ecalle**

## I. INTRODUCTION

Le texte qui suit – le premier à traiter des "opérateurs d'accélération" – est vieux exactement de dix ans : il fut rédigé pendant l'été 1987 mais resta sous forme manuscrite. C'est qu'en effet les choses évoluèrent assez vite et que les premiers textes effectivement publiés, à savoir [ , , , ], reflètent déjà des stades plus élaborés de la théorie.

Pourquoi, dans ces conditions, exhumer soudain un texte qui reposait en paix dans son tiroir ? D'abord parce que plusieurs collègues, qui en eurent connaissance, m'ont encouragé à le faire. Ensuite parce que ce premier jet, du fait justement de son caractère spontané et provisoire, est sans doute assez propre à servir d'introduction à ce qui apparaît rétrospectivement, après la "résurgence", comme la deuxième "structure majeure" en théorie de la resommation. Enfin parce que le chapitre II du présent texte développe un point de vue (la "taubero-exponentialité") que j'ai par la suite abandonné au profit d'une approche plus directe, mais qui n'en présente pas moins, je crois, un intérêt autonome.

Quoiqu'il en soit, voici le texte du manuscrit original (avec quelques retouches de détail visant à coordonner les notations d'alors avec celles d'aujour'hui) et il ne me reste plus qu'à énumérer, aussi brièvement que possible, une dizaine de points où la théorie actuelle de l'accélération s'écarte de cette première "cristallisation".

a) Adoption d'une définition simplifiée des espaces $\mathcal{E}_{\mathrm{neva}}$ et $\mathcal{E}_{\mathrm{eva}}$ qui conserve leurs propriétés essentielles mais fait l'économie de tout calcul et de toute démonstration.

b) Modification de la définition des *majeurs* d'une fonction résurgente ("majeurs-réels" au lieu des "majeurs-naturels") pour mieux respecter les symétries propres aux accélérations/décélérations. (C'est un point de détail).

c) Elargissement de la notion d'accélération. Passage des accélérations élémentaires aux *accélérations générales*, pour lesquelles on n'a plus "séparation des variables" dans le noyau intégral correspondant (sauf quelques cas exceptionnels) et pour lesquelles la factorisation:

$$\text{“accélération”} = \text{“afflexion” puis “ascension”}$$

bien que toujours valable, perd beaucoup de sa simplicité et de son utilité, ce qui force à travailler directement sur les noyaux d'accélération.

d) Etude des *"accélérations faibles"* (avec $\log z_2/\log z_1 \to 1$ mais $z_2/z_1 \to +\infty$) qui ont ceci de particulier qu'elles produisent des accélérées non plus analytiques mais néanmoins toujours *"cohésives"*, c'est-à-dire "quasianalytiques régulières".

e) Rapports et différences entre ces quatre principales classes d'*automorphismes de convolution* que sont les accélérations/décélérations et les pseudoaccélérations/pseudodécélérations.

f) Utilisation systématique des "automorphismes de convolution" pour baliser l'*"échelle naturelle de régularité"* (des fonctions réelles) et pour mieux comprendre sa *"fracture* *centrale*" (celle qui sépare le domaine "cohésif" – analytique ou quasianalytique – du domaine "non-cohésif").

g) Affinement et extension de la notion de *monôme de résurgence à plusieurs niveaux*. Passage des monomes de type "hyperlogarithmique" (étudiés dans ce texte) aux monômes "paralogarithmiques" (cf. [ , ]) qui, malgré la présence d'un paramètre supplémentaire, sont en réalité beaucoup plus réguliers que les monômes hyperlogarithmiques (lesquels font figure de cas dégénéré) et qui, contrairement à ces derniers, permettent d'aborder avec succès la *synthèse*, (et même la synthèse *canonique*) des "*objets analytiques locaux*", c'est-à-dire leur reconstitution (constructive) à partir de leurs invariants holomorphes.

h) Etude détaillée de l'asymptotique des noyaux d'accélération et de décélération et découverte, entre ces deux types de noyaux, d'une "formule des compléments", siège d'un étrange phénomène arithmétique (présence de coefficients entiers plutôt que rationnels) qui reste inexpliqué (et indémontré) jusqu'à ce jour.

## II. L'ACCELERATION : DEFINITION ET FACTORISATION THEORIQUES

**(II.1) Algèbres multiplicatives $\mathcal{E}^{\theta}$, $\mathcal{E}^{\theta}_{\mathrm{neva}}$, $\mathcal{E}^{\theta}_{\mathrm{eva}}$ et algèbres convolutives $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}^{\alpha:\theta}$, $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}^{\alpha:\theta}_{\mathrm{neva}}$, $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}^{\alpha:\theta}_{\mathrm{eva}}$.**

Considérons, sur la surface de Riemann $\mathbb{C}_{\bullet}$ de $\log z$, les demi-plans $\Pi^{\theta}_{r}$ d'axe $-\theta$ et de distance $r$ à l'origine 0, ainsi que les domaines $\Pi^{\theta}_{r,\epsilon}$ obtenus en amputant les $\Pi^{\theta}_{r}$ d'un petit secteur de chaque côté.

Ainsi :

$$(II.1.1) \qquad \Pi^{\theta}_{r} = \left\{ z \in \mathbb{C}_{\infty}; \mathrm{Re}(z \; \mathrm{ex}(i\theta) \geq r > 0; \mid \theta + \arg z \mid < \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$(II.1.1\ bis) \qquad \Pi^{\theta}_{r,\epsilon} = \left\{ z \in \mathbb{C}_{\infty}; \mathrm{Re}(z \; \mathrm{ex}(i\theta) \geq r > 0; \mid \theta + \arg z \mid < \frac{\pi}{2} - \epsilon \right\}.$$

Soit $\mathcal{H}(\Pi^{\theta}_{r})$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur $\Pi^{\theta}_{r}$ et soit $\mathcal{H}^{\theta} = \bigcup_{r>0} \mathcal{H}(\Pi^{\theta}_{r})$ l'algèbre de *germes* correspondante.

DEFINITION II.1.1. *Algèbres multiplicatives* $\mathcal{E}^{\theta}$, $\mathcal{E}^{\theta}_{\mathrm{neva}}$, $\mathcal{E}^{\theta}_{\mathrm{eva}}$.
$\mathcal{E}^{\theta}$, $\mathcal{E}^{\theta}_{\mathrm{neva}}$, $\mathcal{E}^{\theta}_{\mathrm{eva}}$ sont les sous-algèbres de $\mathcal{H}^{\theta}$ définies par les conditions suivantes de croissance à l'infini :

(i) les $\varphi$ de $\mathcal{E}^{\theta}$ sont à croissance **sub**exponentielle sur un demi-plan $\Pi^{\theta}_{r}$ :

$$(II.1.2) \qquad \lim_{z \to \infty} z^{-1} \log^{+} \mid \varphi(z) \mid = \quad \text{uniformément sur } \Pi^{\theta}_{r}.$$

(ii) les $\varphi$ de $\mathcal{E}^{\theta}_{\mathrm{neva}}$ sont à croissance **sub**exponentielle sur un demi-plan $\Pi^{\theta}_{r}$ et, sur la frontière $\partial\Pi^{\theta}_{r}$ de $\Pi^{\theta}_{r}$, vérifient la condition :

$$(II.1.3) \qquad \int_{\partial \Pi^{r}_{\theta}} \frac{\log^{+} \mid \varphi(z) \mid}{1 + \mid z \mid^{2}} \mid dz \mid < \infty.$$

(iii) les $\varphi$ de $\mathcal{E}^{\theta}_{\mathrm{eva}}$ sont à croissance **sub**exponentielle sur un demi-plan $\Pi^{\theta}_{r}$ et à décroissance **sur**exponentielle sur tout secteur intérieur à $\Pi^{\theta}_{r}$ :

$$(II.1.4) \qquad \lim_{z \to \infty} z^{-1} \log^{+} \mid \varphi(z) \mid = -\infty \quad \text{uniformément sur } \Pi^{\theta}_{r,\epsilon} \quad (\forall \epsilon > 0).$$

Il revient au même de dire que, pour tout $\epsilon_0 > 0$, les fonctions $\varphi$ de $\mathcal{E}^{\theta}$ sont des $o(\exp(\epsilon_0 \mid z \mid)$ sur $\Pi^{\theta}_{r}$. Au contraire, les $\varphi$ de $\mathcal{E}_{\mathrm{eva}}$ sont *évanescents* : pour tout $K_0 > 0$, ce sont des $o(\exp(-K_0 \mid z \mid))$ sur $\Pi^{\theta}_{r}$ sauf peut-être (et en fait *nécessairement*) dans les directions $-\theta \pm \frac{\pi}{2}$. Enfin, les $\varphi$ de $\mathcal{E}^{\theta}_{\mathrm{neva}}$ vérifient une condition à la *Nevanlinna*. Plus exactement, la fonction $\varphi(z^{-1})$ appartient à la classe de Nevanlinna du disque $1/\Pi^{\theta}_{r}$ (déduit par inversion de $\Pi^{\theta}_{r}$).

$\mathcal{E}^{\theta}_{\text{neva}}$ et $\mathcal{E}^{\theta}_{\text{eva}}$ sont, respectivement, une *sous-algèbre* et un *idéal* de $\mathcal{E}^{\theta}$. De plus, on démontre la disjonction essentielle :

$$(II.1.5) \qquad \mathcal{E}^{\theta}_{\text{neva}} \cap \mathcal{E}^{\theta}_{\text{eva}} = \{0\}$$

qui tient à ce qu'un élément $\varphi$ évanescent présente nécessairement, dans l'une au moins des deux directions $-\theta \pm \frac{\pi}{2}$, une croissance *rapide, très proche de la croissance exponentielle* et *incompatible avec la croissance nevanlinna.* D'où le procédé mnémotechnique :

$$\begin{cases} \text{neva} = \text{nevanlinna} \\ \text{eva} = \text{évanescent} \\ \text{neva} = \text{n} + \text{eva} = \text{non eva.} \end{cases}$$

On note $\underset{\sim}{\mathcal{E}}^{\theta} = \mathcal{E}^{\theta}/\mathcal{E}^{\theta}_{\text{eva}}$ le produit de $\mathcal{E}^{\theta}$ par l'idéal $\mathcal{E}^{\theta}_{\text{eva}}$. Grâce à la relation d'exclusion (II.1.5) on a un plongement naturel :

$$(II.1.6) \qquad \mathcal{E}^{\theta}_{\text{neva}} \hookrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{\theta}/\mathcal{E}^{\theta}_{\text{neva}}.$$

Fixons maintenant $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha + \beta = 1$ et définissons $\&^{\alpha:\theta}$ et $\mathcal{R}(\&^{\alpha:\theta})$ comme en § I.2.

DEFINITION - LEMME II.1.2. *Algèbres convolutives* $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}$, $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{neva}}$, $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{eva}}$.
$\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}$, $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{neva}}$, $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{eva}}$ sont par définition les sous-espaces de $\overset{\triangledown}{\mathcal{R}}(\&^{\alpha:\theta})$ formés avec les fonctions résurgentes $\overset{\triangledown}{\varphi}$ dont le mineur $\hat{\varphi}$ vérifie respectivement :

$$\begin{aligned} &(II.1.7) \qquad \hat{\varphi}(z^{-\beta/\alpha}) \in \mathcal{E}^{\theta/\beta} \\ &(II.1.8) \qquad \hat{\varphi}(z^{-\beta/\alpha}) \in \mathcal{E}^{\theta/\beta}_{\text{neva}} \\ &(II.1.9) \qquad \hat{\varphi}(z^{-\beta/\alpha}) \in \mathcal{E}^{\theta}_{\text{eva}} \end{aligned}$$

Ici, $\hat{\varphi}(z^{-\beta/\alpha})$ désigne le germe à l'*infini* formé à partir du germe à l'*origine* $\hat{\varphi}(\varsigma)$ par changement de variable $z = \varsigma^{-\alpha/\beta}$ et dont les produits $\overset{\triangledown}{\varphi} * (\overset{\triangledown}{J})^{\sigma}$ ont, pour tout $\sigma > 0$, un mineur $\hat{\varphi}_{\sigma}$ vérifiant les mêmes conditions que $\hat{\varphi}$ (voir remarque ci-dessous).

$\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}$, $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{neva}}$, $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{eva}}$ sont des sous-algèbres (de convolution) de $\overset{\triangledown}{\mathcal{R}}(\&^{\alpha:\theta})$. De plus, $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{eva}}$ est un idéal (de convolution) de $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}$. On pose $\underset{\sim}{\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}}{}^{\alpha:\theta} = \overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta} / \overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{eva}}$ et on a ici encore la disjonction essentielle :

$$(II.1.10) \qquad \overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{neva}} \cap \overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{eva}} = \{0\}$$

qui donne un plongement naturel :

$$(II.1.11) \qquad \overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{neva}} \hookrightarrow \underset{\sim}{\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}}{}^{\alpha:\theta} = \overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta} / \overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{eva}}.$$

REMARQUE. D'une façon peut-être plus parlante, on peut dire que pour tout $\epsilon_0 > 0$ (resp. tout $K_0 > 0$) les $\overset{\triangledown}{\varphi}$ de $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}$ (resp. $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{eva}}$) ont un mineur $\overset{\triangledown}{\varphi}$ qui est un $o(\exp(\epsilon_0 \mid \varsigma \mid^{-\alpha/\beta})$ (resp. $o(\exp(-K_0 \mid \varsigma \mid^{-\alpha/\beta}))$ au voisinage de $\mathbb{O}$ uniformément sur des petits domaines $\Pi_r^{\alpha:\theta}$ (resp. $\Pi_{r,\epsilon}^{\alpha:\theta}$) déduits de $\Pi_r^{\theta/\beta}$ (resp. $\Pi_{r,\epsilon}^{\theta/\beta}$) par $z \to \varsigma = z^{-\beta/\alpha}$. Enfin, les mineurs $\hat{\varphi}$ des $\overset{\triangledown}{\varphi}$ de $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\text{nev}}$ vérifient au bord de $\Pi_r^{\alpha:\theta}$ une condition à la Nevanlinna

$$(II.1.12) \qquad \int_{\partial \Pi_r^{\alpha:\theta}} \mid \varsigma \mid^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \log^+ \mid \hat{\varphi}(\varsigma^{-\alpha/\beta}) \mid\mid d\varsigma \mid < \infty.$$

Quant aux conditions portant sur les $\hat{\varphi}_\sigma$, elles sont techniques (elles servent à écarter les $\overset{\triangledown}{\varphi}$ de mineur nul mais de majeurs très grands à l'origine) et elles équivalent à des conditions, facilement énonçables, et portant sur la croissance près de $\mathbb{O}$ des majeurs $\check{\varphi}$ de $\overset{\triangledown}{\varphi}$ (sur leur secteur de définition, à savoir $\theta' - 2\pi < \arg \varsigma < \theta''$, avec $\theta'$ et $\theta''$ comme ci-dessus).

## (II.2) Modèles présommé et sommé.

PROPOSITION II.2.1. *Le modèle présommé* $\underset{\sim}{\mathcal{R}}(\&^\theta \parallel \theta^+)$.

Pour tout $\overset{\triangledown}{\varphi} \in \overset{\triangledown}{\mathcal{R}}(\&^\theta)$ il existe (d'après le lemme I.4.3) un majeur $\check{\varphi} \in \overset{\triangledown}{\varphi}$ et un chemin $\gamma$ formant une paire $\theta^+$-adaptée et tels que $\check{\varphi}$ soit de croissance au plus exponentielle sur $\gamma$. On peut alors poser :

$$(II.2.1) \qquad \varphi(z \parallel \theta^+) = \int_\gamma \check{\varphi}(\varsigma) e^{-\varsigma z} dz \quad (z \text{ grand}, \mid \theta + \arg z \mid < \frac{\pi}{2})$$

et cette intégrale livre un germe $\varphi(\cdot \parallel \theta^+)$ qui appartient à $\mathcal{E}^\theta$ et dont la classe $\underset{\sim}{\varphi}(\cdot \parallel \theta^+)$ modulo $\mathcal{E}_{\theta^+}$ ne dépend ni de $\gamma$ ni de $\check{\varphi}$. L'application *prélaplace* $\underset{\sim}{\mathcal{L}}{}^{\theta^+}$

$$(II.2.2) \qquad \underset{\sim}{\mathcal{L}}{}^{\theta^+} \begin{cases} \overset{\triangledown}{\mathcal{R}}(\&^\theta) \to \underset{\sim}{\mathcal{R}}(\&^\theta \parallel \theta^+) \subset \underset{\sim}{\mathcal{E}}{}^\theta = \mathcal{E}^\theta / \mathcal{E}^\theta_{\text{eva}} \\ \overset{\triangledown}{\varphi} \to \underset{\sim}{\check{\varphi}}(\cdot \parallel \theta^+) \end{cases}$$

réalise donc un *isomorphisme* de l'algèbre de convolution $\overset{\triangledown}{\mathcal{R}}(\&^\theta)$ dans une sous-algèbre multiplicative $\underset{\sim}{\mathcal{R}}(\&^\theta \parallel \theta^+)$ de $\underset{\sim}{\mathcal{E}}{}^{\theta^+}$, qui est dite *modèle présommé*.

PROPOSITION II.2.2. *Le modèle sommé* $\mathcal{R}(\&^\theta \parallel \theta^+$ *sommé)*
Lorsque la classe $\underset{\sim}{\varphi}(\cdot \parallel \theta^+) \in \underset{\sim}{\mathcal{R}}(\&^\theta \parallel \theta^+) \subset \underset{\sim}{\mathcal{E}}^{\theta^+}$ possède un représentant $\varphi(\cdot \parallel \theta^+)$ qui appartient à $\mathcal{E}^\theta_{\text{neva}}$, ce représentant est unique (d'après (II.1.5)). On dit alors que la fonction résurgente $\check{\varphi}$ est $\theta^+$-sommable et que $\varphi(\cdot \parallel \theta^+)$ est sa somme dans la direction $\theta^+$. L'application de *Laplace* $\mathcal{L}^{\theta^+}$ :

$$(II.2.3) \qquad \mathcal{L}^{\theta^+} \begin{cases} \overset{\triangledown}{\mathcal{R}}\,(\&^\theta \parallel \theta^+ \text{ sommable}) \to \mathcal{R}(\&^\theta \parallel \theta^+ \text{ sommé}) \\ \overset{\triangledown}{\varphi} \to \varphi(\cdot \parallel \theta^+) \end{cases}$$

réalise un isomorphisme de l'algèbre convolutive $\overset{\triangledown}{\mathcal{R}}\,(\&^\theta \parallel \theta^+$ sommable) des fonctions résurgentes $\theta^+$-sommables dans une sous-algèbre multiplicative de $\mathcal{E}^\theta$, notée $\mathcal{R}(\&^\theta \parallel \theta^+$ sommé) et dite modèle sommé.

L'isomorphisme réciproque est la transformation de Borel $\mathcal{B}$ qui, à partir de $\varphi(z \parallel \theta^+)$ livre un mineur $\hat{\varphi}(\varsigma)$ unique et des majeurs $\check{\varphi}(\varsigma)$ fonction de $u$ mais tous équivalents :

$$(II.2.4) \qquad \hat{\varphi}(\varsigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty_1}^{\infty_2} \varphi(z \parallel \theta^+)e^{z\varsigma}dz$$

$$(II.2.5) \qquad \check{\varphi}(\varsigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u}^{\infty_3} \varphi(z \parallel \theta^+)e^{z\varsigma}dz \quad (u \text{ arbitraire}).$$

En résumé :

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}\,(\&^\theta \parallel \theta^+) \quad \underset{\mathcal{B}}{\overset{\underset{\sim}{\mathcal{L}}_{\theta^+}}{\leftrightarrows}} \quad \overset{\triangledown}{\mathcal{R}}\,(\&^\theta)$$

$$\mathcal{R}(\&^\theta \parallel \theta^+ \text{ sommé} \quad \underset{\mathcal{B}}{\overset{\tilde{\mathcal{L}}^{\theta^+}}{\leftrightarrows}} \quad \overset{\triangledown}{\mathcal{R}}\,(\&^\theta \parallel \theta^+ \text{ sommable}).$$

REMARQUE 1. Bien qu'il faille préciser la direction $\theta^\pm$ selon laquelle on prend Laplace, ce n'est pas nécessaire pour Borel. On dit que Laplace est polarisante et Borel dépolarisante.

REMARQUE 2. Si on veut que Laplace transforme la convolution en multiplication, les seuls chemins d'intégration qui conviennent (pour les mineurs) sont les axes $\theta^+$ ou $\theta^-$ (c'est-à-dire l'axe $\theta$ longé à gauche ou à droite). Aucun des chemins qui traversent l'axe $\theta$ ne convient.

REMARQUE 3. Pour la construction effective de $\mathcal{L}^{\theta^+}$, voir § II.4 ci-après.

REMARQUE 4. On notera le caractère très concret du modèle sommé (ses éléments sont des germes analytiques) par rapport au modèle présommé (ses éléments sont des classes de germes, sans représentants privilégiés en général). Le modèle présommé possède quand même trois mérites au moins :

(i) il est isomorphe à $\overset{\triangledown}{\mathcal{R}}$ $(\&^{\theta})$ tout entier.

(ii) il permet de lire les dérivations étrangères.

(iii) il va nous servir à la définition "théorique" du *modèle accéléré.*

REMARQUE 5. Si dans l'intégrale (II.2.1) on prend un majeur $\check{\varphi} \in \overset{\triangledown}{\varphi}$ à décroissance surexponentielle sur $\gamma$ (ce qui est loisible d'après le lemme I.4.3) on obtient pour germe $\varphi(z \parallel \theta^{+})$ une fonction *entière* de $z$. Chaque classe $\underset{\sim}{\varphi(\cdot \parallel \theta^{+})}$ possède donc, parmi ses représentants, des fonctions entières, et ceci même lorsque la fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ est $\theta^{+}$-sommable et que sa $\theta^{+}$-somme (unique) n'est **pas** une fonction entière de $z$.

REMARQUE 6. *Fonctions résurgentes naïvement sommables.*

Toute fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ qui est $\theta^{+}$-exponentielle d'ordre 1 (cf. § I.5) est *naïvement sommable* en ce sens que les intégrales suivantes

$$(II.2.6) \qquad \begin{cases} \varphi(z \parallel \theta^{+}) = \displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \check{\varphi}(\varsigma) e^{-\varsigma z} d\varsigma + \int_{u_1}^{\infty_1} \hat{\varphi}_{|\theta^{+}}(\varsigma) e^{-\varsigma z} d\varsigma \\ \mid u_1 \mid = \mid u_2 \mid = \epsilon(\text{petit}), \ \arg u_1 = \arg \infty_1 = \theta, \ \arg u_2 = \theta - 2\pi, \\ \hat{\varphi}_{|\theta^{+}} = \text{valeur de } \hat{\varphi} \text{ le long de } \theta^{+} \end{cases}$$

sont calculables et définissent un germe $\varphi(z \parallel \theta^{+})$, indépendant de $u_1$, $u_2$, $\check{\varphi}$, appartenant à $\mathcal{E}^{\theta}$ et dit *somme naïve* de $\overset{\triangledown}{\varphi}$ .

PROPOSITION II.2.3. *Somme naïve et somme tout court.*

Une fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ qui est $\theta^{+}$-exponentielle (d'ordre 1) et donc naïvement sommable, est sommable (au sens de la proposition II.2.2) si et seulement si *un* (et donc *tout*) majeur $\check{\varphi}$ vérifie :

$$(II.2.7) \qquad \begin{cases} \mid \varsigma \mid \cdot \log^{+} \mid \log^{+} \mid \check{\varphi}(\varsigma \parallel \quad \text{borné près de } \mathbf{0} \\ \text{uniformément sur} \theta - 2\pi \leq \arg \varsigma \leq \theta \end{cases}$$

et alors *somme naïve* et *somme tout court* coïncident.

Par exemple, la fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ de majeur :

$$(II.2.8) \qquad \check{\varphi}(\varsigma) = \exp \exp (\varsigma^{-a}) \qquad (a > 0)$$

est toujours *naïvement sommable* mais elle n'est sommable (au sens de la proposition II.2.2) que si $a \leq 1$.

PROPOSITION II.2.4. *Factorisation des fonctions résurgentes sommables.*

Toute fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ qui est $\theta^+$-sommable (au sens de la proposition II.2.2) se factorise en un produit :

$$(II.2.9) \qquad \overset{\triangledown}{\varphi} = \overset{\triangledown}{\psi} * \overset{\triangledown}{\Xi}$$

où chaque facteur est à la fois *sommable* et *naïvement sommable*. On peut même faire en sorte que le "profacteur" $\overset{\triangledown}{\psi}$ soit $\theta$-intégrable (donc de mineur $\hat{\psi}(\zeta)$ "régulier" près de $\mathbb{O}$ dans la direction $\theta$) et que le "rétrofacteur" $\overset{\triangledown}{\Xi}$ ait un mineur $\hat{\Xi}(\zeta)$ holomorphe sur l'axe $\theta$ (sauf justement en $\mathbb{O}$, où il peut présenter une forte singularité).

PROPOSITION II.2.5. *Théorème de cohérence.*
Soit $\overset{\triangledown}{\varphi}_{ij}$ $(i \leq r \; ; \; j \leq n_i)$ une famille de fonctions résurgentes qui sont $\theta^+$-sommables naïvement (mais pas forcément au sens de la proposition II.2.2) et de sommes naïves $\varphi_{ij}(z \parallel \theta^+)$. Alors si :

$$(II.2.10) \qquad \sum_{i=1}^{r} \overset{\triangledown}{\varphi}_{i1} * \overset{\triangledown}{\varphi}_{i2} * \overset{\triangledown}{\varphi}_{i3} * \cdots \overset{\triangledown}{\varphi}_{in_i} = 0$$

on a nécessairement :

$$(II.2.11) \qquad \sum_{i=1}^{r} \varphi_{i1}\, \varphi_{i2}\, \varphi_{i3} \cdots \varphi_{in_i} = 0.$$

Ce résultat n'est nullement évident (sauf bien sûr si les $\overset{\triangledown}{\varphi}_{ij}$ sont tous sommables au sens de la proposition II.2.2, auquel cas il résulte de ce qui précède) car le premier membre de (II.2.11), bien qu'appartenant nécessairement à l'idéal $\mathcal{E}^{\theta}_{\text{eva}}$, pourrait a priori ne pas être nul. On montre toutefois que c'est impossible et ce *théorème de cohérence* permet d'étendre l'isomorphisme $\mathcal{L}^{\theta^+}$ :

$$(II.2.12) \qquad \mathcal{L}^{\theta^+} : \overset{\triangledown}{\varphi}(\zeta) \to \varphi(z \parallel \theta^+)$$

à l'algèbre engendrée par toutes les fonctions naïvement sommables (quelle que soit la force de leur singularité en 0). Pour ces fonctions-là, on n'a plus en général de factorisation (II.2.9), mais c'est la seule chose qui change.

## (II.3) Les modèles préaccéléré et accéléré.

PROPOSITION II.3.1. *Le modèle préaccéléré* $\underset{\sim}{\overset{\triangledown}{\mathcal{R}}}(\&^{\alpha:\theta} \parallel \alpha : \theta^+)$.

L'application $\mathcal{B}_\alpha$ :

$$(II.3.1) \qquad \mathcal{B}_\alpha \begin{cases} \varphi_1 \to \overset{\triangledown}{\varphi}_2 \quad \text{avec} \\ \overset{\triangledown}{\varphi}_2(\zeta_2) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_u^{\infty} \varphi_1(z_2^{\alpha}) e^{z_2 \zeta_2} dz_2 \end{cases}$$

qui est composée du changement de variable $z_1 = z_2^\alpha$ et de la transformation de Borel $\mathcal{B}$, est bien indépendante de $u$, et définit des endomorphismes injectifs d'algèbres convolutives:

$$(II.3.2) \qquad \mathcal{B}_\alpha \begin{cases} \mathcal{E}^\theta \to \overset{\nabla}{\mathcal{E}}^{\alpha:\theta} \\ \mathcal{E}^\theta_{\mathrm{neva}} \to \overset{\nabla}{\mathcal{E}}^{\alpha:\theta}_{\mathrm{neva}} \\ \mathcal{E}^\theta_{\mathrm{eva}} \to \overset{\nabla}{\mathcal{E}}^{\alpha:\theta}_{\mathrm{eva}} \end{cases} \quad (\text{pour } \frac{1}{2} < \alpha < 1)$$

$(II.3.2\ bis)$ $\underset{\sim}{\mathcal{B}} : \underset{\sim}{\mathcal{E}}^\theta = \mathcal{E}^\theta / \mathcal{E}^\theta_{\mathrm{eva}} \to \underset{\sim}{\overset{\nabla}{\mathcal{E}}}^{\alpha:\theta} = \overset{\nabla}{\mathcal{E}}^{\alpha:\theta} / \overset{\nabla}{\mathcal{E}}^{\alpha:\theta}_{\mathrm{eva}}$ .Puisque $\underset{\sim}{\mathcal{R}}(\&^\theta \parallel \theta^+) \subset \underset{\sim}{\mathcal{E}}^\theta$, cette même application $\underset{\sim}{\mathcal{B}}_\alpha$ définit un isomorphisme du modèle présommé $\underset{\sim}{\mathcal{R}}(\&^\theta \parallel \theta^+)$ dans une sous-algèbre de $\underset{\sim}{\overset{\nabla}{\mathcal{E}}}^{\alpha:\theta}$, notée $\underset{\sim}{\overset{\nabla}{\mathcal{R}}}(\&^{\alpha:\theta} \parallel \alpha : \theta^+)$ et dite *modèle préaccéléré* de $\overset{\nabla}{\mathcal{R}}(\&^\theta)$ :

$$(II.3.3) \qquad \underset{\sim}{\mathcal{B}}_\alpha : \mathcal{R}(\&^\theta \parallel \theta^+) \to \underset{\sim}{\overset{\nabla}{\mathcal{R}}}(\&^{\alpha:\theta} \parallel \alpha : \theta^+).$$

L'isomorphisme composé :

$$(II.3.4) \qquad \underset{\sim}{\mathcal{C}}_{\alpha:\theta^+} = \underset{\sim}{\mathcal{B}}_\alpha \underset{\sim}{\mathcal{L}}^{\theta^+} \begin{cases} \overset{\nabla}{\mathcal{R}}(\&^\theta) \to \underset{\sim}{\overset{\nabla}{\mathcal{R}}}(\&^{\alpha:\theta^+} \parallel \alpha : \theta^+) \\ \overset{\nabla}{\varphi}_1 \to \underset{\sim}{\overset{\nabla}{\varphi}}_2 \end{cases}$$

est dit *préaccélération de direction* $\theta^+$ et de rapport $\alpha$. C'est un isomorphisme d'une *algèbre convolutive* dans un *quotient de deux algèbres convolutives.*

PROPOSITION II.3.2. *Le modèle accéléré* $\overset{\nabla}{\mathcal{R}}(\&^{\alpha:\theta} \parallel (\alpha : \theta^+)$ accéléré).
Lorsque la préaccélérée $\underset{\sim}{\overset{\nabla}{\varphi}}_2 \in \underset{\sim}{\overset{\nabla}{\mathcal{R}}}(\&^{\alpha:\theta} \parallel \alpha : \theta^+)$ d'une fonction résurgente $\overset{\nabla}{\varphi}_1 \in \overset{\nabla}{\mathcal{R}}(\&^\theta)$ possède un représentant $\overset{\nabla}{\varphi}_2$ appartenant à $\overset{\nabla}{\mathcal{E}}^{\alpha:\theta}_{\mathrm{neva}} \subset \overset{\nabla}{\mathcal{R}}(\&^{\alpha:\theta})$, ce représentant $\overset{\nabla}{\varphi}_2$ est *nécessairement unique* (d'après (II.1.10)) et il est dit $(\alpha : \theta^+)$-accéléré de $\overset{\nabla}{\varphi}_1$ . C'est une *vraie fonction résurgente* $\overset{\nabla}{\varphi}_2$ et non plus une classe $\underset{\sim}{\overset{\nabla}{\varphi}}_2$ de telles fonctions. L'application :

$$(II.3.5) \qquad \mathcal{C}_{\alpha:\theta^+} \begin{cases} \overset{\nabla}{\mathcal{R}}(\&^\theta \parallel (\alpha : \theta^+) \text{ accélérable}) \to \overset{\nabla}{\mathcal{R}}(\&^{\alpha:\theta} \parallel (\alpha : \theta^+) \text{ accéléré}) \\ \check{\varphi}_1 \to \overset{\nabla}{\varphi}_2 \end{cases}$$

est dite *accélération* de direction $\theta^+$ et de rapport $\alpha$. C'est un isomorphisme de l'*algèbre convolutive* des fonctions résurgentes accélérables dans l'*algèbre convolutive* des fonctions résurgentes accélérées.

PROPOSITION II.3.3. *Sommation et accélération.*

Toute fonction $\theta^+$-sommable est automatiquement $(\alpha : \theta^+)$-accélérable, mais la réciproque n'est pas du tout vraie.

On a donc le diagramme suivant, où toutes les flèches $(\to)$ et inclusions ou plongements naturels $(\hookrightarrow)$ représentent des endomorphismes d'algèbres :

On montre que toute fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ qui est $(\alpha : \theta^+)$ accélérable possède des majeurs $\check{\varphi}$ vérifiant :

$$(II.3.6) \qquad \begin{cases} \mid \varsigma \mid^{\alpha/\beta} \log^+ \mid \log^+ \mid \check{\varphi}(\varsigma) \mid\mid \\ \text{borné près de } \mathbf{O} \text{ uniformément sur } \theta - 2\pi \leq \arg \varsigma \leq 0. \end{cases}$$

ce qui exclut les $\overset{\triangledown}{\varphi}$ de la forme (II.2.8) avec $a \geq \alpha/\beta$. Comme pour la somme, on a une notion d'*accélérabilité naïve* pour les $\overset{\triangledown}{\varphi}$ qui sont $\theta^+$-exponentielles d'ordre $\beta^{-1}$ et on montre un *théorème de cohérence* analogue au théorème II.2.5 qui permet, sans risquer de contradiction, d'enrichir l'algèbre des fonctions $(\alpha : \theta^+)$ accélérables de toutes les fonctions naïvement accélérables, que celles-ci vérifient ou non (II.3.6).

REMARQUE 1. *L'accélération fait apparaître de nouvelles dérivations étrangères.*

Partons d'une fonction résurgente $\check{\varphi}_1 \in \overset{\triangledown}{\mathcal{R}}(\&^{\theta})$ que nous supposerons $(\alpha:\theta^+)$ accélérable, mais pas $\theta^+$-sommable. Soit $\underset{\sim}{\varphi}_1$ l'image de $\overset{\triangledown}{\varphi}_1$ dans le modèle présommé. Choisissons $\psi_1 \in \underset{\sim}{\varphi}_1$ et soit $\overset{\triangledown}{\psi}_2 = \mathcal{B}_\alpha \cdot \psi_1$ la fonction résurgente image de $\psi_1$ par $\mathcal{B}_\alpha$. Bien que $\overset{\triangledown}{\psi}_2$ (cf. intégrale (II.3.1)) soit une fonction résurgente d'un type très particulier, à savoir possédant un mineur $\hat{\varphi}_2$ holomorphe sur toute l'étoile $\&^{\alpha:\theta}$ et par suite de dérivations étrangères nulles:

(*II*.3)

$$\Delta_\omega \check{\psi}_2 = 0 \qquad (\forall \omega \in \&^{\alpha:\theta})$$

il n'empêche que *la véritable accélérée* de $\overset{\triangledown}{\varphi}_1$, *c'est-à-dire l'unique fonction résurgente* $\overset{\triangledown}{\varphi}_2$ *de* $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}{}^{\alpha:\theta}_{\mathrm{neva}}$ *qui est conjuguée à* $\overset{\triangledown}{\psi}_2$ *modulo* $\overset{\triangledown}{\mathcal{E}}_{\alpha:\theta^+}$, *peut très bien avoir un mineur* $\hat{\varphi}_2$ *possédant des singularités sur l'étoile* $\&^{\alpha:\theta}$, et par conséquent des dérivées étrangères non nulles :

(*II*.3)

$$\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi}_2 \neq 0 \qquad (\text{pour certains } \omega \in \&^{\alpha:\theta}).$$

Ces dérivées étrangères, dites de niveau $\frac{1}{\alpha}$, n'ont évidemment *aucun rapport* avec les dérivées étrangères de $\overset{\triangledown}{\varphi}_1$, dite de niveau 1 :

(*II*.3.8)

$$\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi}_1 \qquad (\text{pour } \omega \in \&^{\theta}).$$

Il peut d'ailleurs arriver que toutes les dérivées étrangères de niveau 1 soient nulles, mais pas celles de niveau $\frac{1}{\alpha}$, ou *vice versa*.

REMARQUE 2. *L'accélération conduit à des modèles présommés de plus en plus précis.*

Soit en effet $\overset{\triangledown}{\varphi}_1(\zeta_1)$ une fonction résurgente $(\alpha:\theta_1^{\epsilon_1})$-accélérable, soit $\overset{\triangledown}{\varphi}_2(\zeta_2)$ son accélérée, et soient $\underset{\sim}{\varphi}_1(z_1 \parallel \theta_1^{\epsilon_1})$ et $\underset{\sim}{\varphi}_2(z_2 \parallel \theta_2^{\epsilon_2})$ les présommes de $\overset{\triangledown}{\varphi}_1$ et $\overset{\triangledown}{\varphi}_2$ . Sous forme de diagramme :

Pour tous représentants $\varphi_1(z_1 \parallel \theta_1^{\epsilon_1}) \in \underset{\sim}{\varphi}_1(z_1 \parallel \theta_1^{\epsilon_2})$ et $\varphi_2(z_2 \parallel \theta_2^{\epsilon_2}) \in \underset{\sim}{\varphi}(z_2 \parallel \theta_2^{\epsilon_2})$ on a évidemment, sur le secteur commun de définition :

$$\varphi_1(z_1 \parallel \theta_1^{\epsilon_1}) = \varphi_2(z_1^{1/\alpha} \parallel \theta_2^{\epsilon_2}) \quad \text{modulo un idéal facile à préciser} \tag{II.3.9}$$

mais l'important est de voir que les classes $\underset{\sim}{\varphi}_2$, rapportées à la variable $z_1$, bien qu'étant définies sur un secteur (du plan des $z_1$) d'ouverture $\pi\alpha$ moindre que l'ouverture $\pi$ des classes $\underset{\sim}{\varphi}_1$, sont définies, sur ce moindre secteur, modulo un idéal lui aussi beaucoup plus petit (à savoir l'idéal des surexponentiellement petits en $z_1^{1/\alpha}$ pour $\underset{\sim}{\varphi}_2$ et en $z_1$ pour $\underset{\sim}{\varphi}_1$). On exprime cela en disant que l'accélération *précise* ou *affine les présommes.* On voit donc que l'accélérabilité, bien que n'impliquant pas la sommabilité de $\overset{\triangledown}{\varphi}_1$ ni celle de $\overset{\triangledown}{\varphi}_2$, est quand même une propriété très précise et très forte.

## (II.4) Accéléro-sommabilité. Critères. Profacteurs et rétrofacteurs. Taubero-exponentialité.

*Multipolarisations*

Considérons l'accélération composée :

$$C_{\alpha:\theta} = C_{\alpha_r:\theta_r^{\epsilon_r}} \cdots C_{\alpha_2:\theta_2^{\epsilon_2}} C_{\alpha_1:\theta_1^{\epsilon_1}} \begin{cases} 0 < \alpha_i < 1,\ \theta_i \in \mathbb{R},\ \epsilon_i = \pm \\ \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \\ \theta = (\theta_1^{\epsilon_1}, \cdots, \theta_r^{\epsilon_r}) \end{cases} \tag{II.4.1}$$

qui a priori n'a de sens que si à chaque étape la direction $\theta_{i+1}$ est prise intérieure au secteur $\&^{\alpha_i:\theta_i}$, autrement dit :

$$(II.4.2) \qquad \frac{\theta_i}{\alpha_i} - \frac{\pi}{2}\frac{\beta_i}{\alpha_i} < \theta_{i+1} < \frac{\theta_i}{\alpha_i} + \frac{\pi}{2}\frac{\beta_i}{\alpha_i} \qquad (1 \leq i < r \ ; \ \beta_i = 1 - \alpha_i).$$

On dit que l'accélération composée $\mathcal{C}_{\alpha:\theta}$ fait passer successivement par les niveaux $p_1, p_2, \cdots, p_{r+1}$ ainsi définis :

$$(II.4.3) \qquad p_1 = 1, \ \ p_2 = p_1/\alpha_1, \ \ p_3 = p_2/\alpha_2, \cdots, p_{r+1} = p_r/\alpha_r.$$

Relativement à ces niveaux $p_i$, la relation d'autocompatibilité de la multipolarisation $\theta = (\theta_1^{\epsilon_1}, \cdots, \theta_r^{\epsilon_r})$ s'écrit :

$$(II.4.4) \qquad \left|\frac{\theta_i}{p_i} - \frac{\theta_{i+1}}{p_{i+1}}\right| < \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_{i+1}}\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r).$$

*Fonctions résurgentes indéfiniment accélérables. Niveaux critiques.*

Si une fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ est $(\alpha : \theta^\epsilon)$-accélérable, on peut lui appliquer tout accélérateur composé $\mathcal{C}_{\alpha:\theta}$ de la forme (II.4.1) avec :

$$(II.4.5) \qquad \alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r \quad \text{et} \quad \theta_1^{\epsilon_1} = \theta^\epsilon$$

et l'on a :

$$(II.4.6) \qquad \mathcal{C}_{\alpha:\theta^\epsilon}\overset{\triangledown}{\varphi} = \mathcal{C}_{\alpha:\theta}\overset{\triangledown}{\varphi}$$

indépendamment du choix de $\theta_2^{\epsilon_2}, \theta_3^{\epsilon_3}, \cdots \theta_r^{\epsilon_r}$.

Cela étant, une fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi} \in \overset{\triangledown}{\mathcal{R}}$ est dite *indéfiniment accélérable* si il existe une suite croissante (finie ou infinie) de niveaux :

$$(II.4.7) \qquad 1 = p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$$

telle que $\overset{\triangledown}{\varphi}_i$ appartienne au domaine naturel de tout accélérateur composé $\mathcal{C}_{\alpha:\theta}$ qui passe par ces niveaux, c'est-à-dire tel que la suite $1/\alpha_1, 1/\alpha_1\alpha_2, 1/\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \cdots$ contienne (II.4.7). Dans ce cas, il existe toujours une suite de niveaux qui est *minimale* et les $p_i$ qui figurent dans cette suite minimale sont dits *niveaux critiques* de $\overset{\triangledown}{\varphi}$ . Notons que si une accélérée $\overset{\triangledown}{\varphi}_i$ de niveau $p_i$ a des dérivées étrangères non nulles (i.e. si son mineur $\varphi_i$ présente des singularités), le niveau $p_i$ en question est automatiquement *critique* pour $\overset{\triangledown}{\varphi}$ .

*Fonctions résurgentes accéléro-sommables.*

Une fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi} \in \overset{\triangledown}{\mathcal{R}}$ est dite accéléro-sommable si elle est indéfiniment accélérable, avec une suite **finie** de niveaux critiques :

$$(II.4.8) \qquad 1 = p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_r$$

et si toutes les accélérées du **plus haut niveau** $p_r$ sont sommables (pour toute direction $\theta_r^{\epsilon_r}$ licite, c'est-à-dire incluse dans le secteur $\&^{\alpha_{r-1}:\theta_{r-1}}$).

*Conditions d'uniformité.*
Il s'agissait jusqu'à présent de définir la sommabilité ou l'accélérabilité pour des directions $\theta^{\pm}$ *données* et pour ce faire nous avons, comme il se devait, adopté les hypothèses minimales, qui sont toujours les meilleures. Mais il est important de noter qu'avec ces hypothèses minimales, une fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ peut très bien être sommable (ou accélérable) dans toute direction $\theta^{\pm}$, sans pour autant que ses sommes (ou accélérées) se raccordent, même lorsqu'elles correspondent à des *directions* $\theta_1^{\epsilon_1}$ *et* $\theta_2^{\epsilon_2}$ *équivalentes pour* $\overset{\triangledown}{\varphi}$, c'est-à-dire telles que le mineur $\hat{\varphi}$ ne comporte aucune singularité dans le secteur :

$$(II.4.9) \qquad \theta_1^{\epsilon_1} < \arg \varsigma < \theta_2^{\epsilon_2} \qquad (\ ).$$

Soit par exemple une fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ dont le mineur $\hat{\varphi}(\varsigma)$ est une *fonction entière* de $\varsigma$ *non constante* mais *bornée sur toute droite de* $\mathbb{C}$ (lemme : de telles fonctions existent et, loin d'être lentes à l'infini, elles y croissent prodigieusement vite). Il est clair que pour une telle $\overset{\triangledown}{\varphi}$ toutes les directions sont *équivalentes*. D'autre part, $\overset{\triangledown}{\varphi}$ est sommable pour toute $\theta^+$ et toute $\theta^-$, avec d'ailleurs une somme commune que l'on peut noter $\varphi(z \parallel \theta)$. Pourtant, les différentes sommes ne se raccordent pas :

$$(II.4.10) \qquad \varphi(z \parallel \theta_1) \neq \varphi(z \parallel \theta_2) \qquad \begin{cases} \mid \theta_1 - \theta_2 \mid < \pi \\ \mid z + \theta_1 \mid < \pi/2 \\ \mid z + \theta_2 \mid < \pi/2. \end{cases}$$

Pour les fonctions résurgentes usuelles, toutefois, il y a presque toujours raccord. Il faut donc définir une notion de sommabilité "uniforme" ou "avec raccord" en adoptant, là encore, les *hypothèses minimales*.

*Fonctions résurgentes uniformément sommables (resp. uniformément accélérables).*
Une fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi} \in \overset{\triangledown}{\mathcal{R}}$ est dite uniformément sommable (resp. uniformément $\alpha$-accélérable) si elle est $\theta^+$-sommable (resp. $(\alpha : \theta^{\pm})$-accélérable) pour tout $\theta$ et si :

(i) pour toutes directions $\theta_1^{\epsilon_1}$ et $\theta_2^{\epsilon_2}$ *voisines* et *équivalentes* pour $\overset{\triangledown(\ )}{\varphi}$, les sommes $\varphi(z \parallel \theta_1^{\epsilon_1})$ et $\varphi(z \parallel \theta_1^{\epsilon_2})$ de $\overset{\triangledown}{\varphi}$ (resp. ses accélérées par $C_{\alpha:\theta_1^{\epsilon_1}}$ et $C_{\alpha:\theta_2^{\epsilon_2}}$) *coïncident* sur leur domaine commun de définition.

(ii) pour toutes directions $\theta_1^{\epsilon_1}$ et $\theta_2^{\epsilon_2}$ *voisines* mais *non équivalentes*, les deux sommes de $\overset{\triangledown}{\varphi}$ (resp. ses deux accélérées) se déduisent l'une de l'autre par la-formule-à-laquelle-on-s'attend et qui fait évidemment intervenir toutes les dérivées étrangères de la forme :

$$(II.4.11) \qquad \Delta_{\omega_r} \cdots \Delta_{\omega_2} \Delta_{\omega_1} \overset{\triangledown}{\varphi} \qquad (r \in \mathbb{N},\ \theta_1^{\epsilon_1} < \arg \omega_i < \theta_2^{\epsilon_2}).$$

Pour une formulation précise et les lemmes qui vont avec, voir [ [.

*Fonctions résurgentes uniformément accéléro-sommables.*
On a évidemment une notion d'uniforme sommabilité (resp. accélérabilité) restreinte à un secteur & et, s'en déduisant facilement, une notion d'*uniforme indéfinie accélérabilité* et sourtout d'*uniforme accéléro-sommabilité. Cette dernière notion est capitale car il se trouve que l'immense "majorité" des séries divergentes auxquelles conduit l'analyse complexe locale se ramènent à des fonctions résurgentes qui sont soit uniformément sommables, soit uniformément accéléro-sommables*( ), ce dernier cas coiffant d'ailleurs le premier.

*Critère de $\theta^+$-sommabilité ou de $(\alpha : \theta^+)$-accélérabilité uniforme.*
Toute fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ qui est $\theta$-intégrable pour tout $\theta$ et qui vérifie une condition de $\theta^+$-exponentialité d'ordre 1 (resp. d'ordre $\beta^{-1}$) analogue à celle de la définition I.5.3, mais valable *uniformément* sur un secteur (relativement aux prolongées analytiques le long de *toute ligne brisée* de directions intérieures ou secteur, et en contournant les singularités sur la ligne brisée de n'importe quel côté) est automatiquement uniformément sommable (resp. $\alpha$-accélérable).

*La tauberoexponentialité*
Considérons une fonction résurgente $\overset{\triangledown}{\varphi}$ indéfiniment accélérable et à plusieurs niveaux critiques $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$. Les opérateurs d'accélération permettant de passer constructivement d'un niveau critique à chaque niveau critique immédiatement supérieur, et de proche en proche jusqu'au plus haut niveau, mais sans "sauter" aucun niveau intermédiaire. D'où la question : peut-on "lire", directement sur $\overset{\triangledown}{\varphi}$, les accélérées de plus haut niveau (ou les sommes, en cas d'accéléro-sommabilité) ? La réponse est **oui :** $\overset{\triangledown}{\varphi}$ possède des majeurs $\not\varphi$ possédant la propriété de *tauberoexponentialité*, c'est-à-dire exponentiels d'ordre de plus en plus élevés dans des secteurs emboîtés mais assez grands pour que la différence $\not\varphi_1 - \not\varphi_2$ de deux tels majeurs soit une fonction entière de type exponentiel (sur tout le plan). D'où la possibilité (théorique) d'accélérer (ou d'accéléro-sommer) d'un "seul coup", en passant par dessus les niveaux intermédiaires :

## III. L'ACCELERATION : DEFINITION ET FACTORISATION PRATIQUES

### (III.1) Algèbres affléchies $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$

Soient $\mathbb{C}_\infty$, $\mathcal{P}!$, $r_\sigma$ comme en § I.1. Fixons $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha + \beta = 1$ et nommons $\mathcal{P}!_{\alpha,\beta}$ le sous-espace de $\mathcal{P}!$ dont les éléments $\check{\varphi}$ sont de la forme :

$$(III.1.1) \qquad \check{\varphi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \zeta^{n/\alpha} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \zeta^{n/\beta} \quad (\zeta \text{ petit}).$$

Autrement dit :

$$(III.1.2) \qquad \mathcal{P}! \supset \mathcal{P}!_{\alpha,\beta} = \mathcal{P}! \cap \left\{ \mathbb{C}\{\zeta^{1/\alpha}\} + \{\mathbb{C}\{\zeta^{1/\beta}\} \right\}.$$

Notons $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta} = \mathcal{P}!/\mathcal{P}!_{\alpha,\beta}$ le quotient de $\mathcal{P}!$ par $\mathcal{P}!_{\alpha,\beta}$ et, pour tout $\check{\varphi} \in \mathcal{P}!$, notons $\overset{\triangledown}{\varphi}{}^{\alpha,\beta}$ la classe de $\check{\varphi}$ modulo $\mathcal{P}!_{\alpha,\beta}$. Fixons $\overset{\triangledown}{\varphi}{}_1^{\alpha,\beta}$ et $\overset{\triangledown}{\varphi}{}_2^{\alpha,\beta}$ dans $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ et choisissons $\check{\varphi}_1$ et $\check{\varphi}_2$ dans ces deux classes. Alors l'intégrale :

$$(III.3) \qquad \begin{cases} \check{\varphi}_3(\zeta) = \displaystyle\int_{\mathcal{D}(\zeta)} \check{\varphi}_1(\zeta t_1^\alpha t_2^\beta) \check{\varphi}_2(\zeta(1-t_1)^\alpha (1-t_2)^\beta) \times \cdots \\ t_1^{\alpha-1} t_2^{\beta-1} (1-t_1)^{\alpha_1 - 1} (1-t_2)^{\beta-1} dt_1 dt_2 \end{cases}$$

prise sur un bichemin $\mathcal{D}(\zeta)$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ à la fois *borné* et *licite* (voir ci-après), définit un germe $\check{\varphi}_3 \in \mathcal{P}!$ dont la classe $\overset{\triangledown}{\varphi}{}_3^{\alpha,\beta}$ modulo $\mathcal{P}!_{\alpha,\beta}$ ne dépend ni de $\check{\varphi}_1$, ni de $\check{\varphi}_2$, ni de $\mathcal{D}(\zeta)$, mais seulement de $\overset{\triangledown}{\varphi}{}^{\alpha,\beta}$ et $\overset{\triangledown}{\varphi}{}^{\alpha,\beta}$. On peut donc poser

$$(III.1.4) \qquad \overset{\triangledown}{\varphi}{}_3^{\alpha,\beta} = \overset{\triangledown}{\varphi}{}_1^{\alpha,\beta} *_{\alpha,\beta} \overset{\triangledown}{\varphi}{}_2^{\alpha,\beta}$$

et on montre que la convolution $*_{\alpha,\beta}$ fait de $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ une algèbre commutative et associative, dite *algèbre affléchie* de fonctions résurgentes.

REMARQUE : *bichemins licites*
Pour que l'intégrale (III.1.3) ait les propriétés énoncées, il faut la prendre sur un bichemin $\mathcal{D}(\zeta)$ *borné* et *licite*, c'est-à-dire tel que :

$$(III.1.5) \qquad \{(t_1, t_2) \in \partial\mathcal{D}(\zeta)\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } (\zeta t_1^\alpha t_2^\beta) \text{ est constant en } \zeta \\ \text{soit } (\zeta(1-t_1)^\alpha (1-t_2)^\beta) \text{ est constant en } \zeta \end{array} \right\}.$$

Il revient d'ailleurs au même (pour calculer la classe $\overset{\triangledown}{\varphi}{}_3^{\alpha,\beta}$) de prendre pour $\mathcal{D}(\zeta)$ le bichemin biinfini :

$$(III.1.6) \qquad \mathcal{D}(\zeta) = \left\{ \operatorname{Im} t_1 = \frac{1}{2}, \operatorname{Im} t_2 = \frac{1}{2} \right\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

à condition de prendre (*lemme* : c'est possible) des majeurs $\check{\varphi}_1$ et $\check{\varphi}_2$ *définis, holomorphes* et $\mathcal{O}(\varsigma^{-1})$ à l'*infini* sur tout un secteur de $\mathbb{C}_\infty$ d'ouverture $2\pi - \epsilon$ et contenant $\varsigma$ sur sa bissectrice. Ensuite, il ne reste plus qu'à prolonger analytiquement en $\varsigma$ (*relemme* : c'est possible).

*Majeurs et mineurs*

Pour toute fonction résurgente affléchie $\overset{\triangledown\alpha,\beta}{\varphi} \in \mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$, les germes $\check{\varphi} \in \overset{\triangledown\alpha,\beta}{\varphi}$ sont dits *majeurs* de $\overset{\triangledown\alpha,\beta}{\varphi}$ et le germe suivant :

$$(III.1.7) \qquad \hat{\varphi} = (1-R_\alpha)(1-R_\beta)\check{\varphi} \quad (\check{\varphi} \in \overset{\triangledown\alpha,\beta}{\varphi}\ ; R_\alpha \text{ et } R_\beta \text{ comme en (I.1.1.)})$$

ne dépend pas du choix de $\check{\varphi}$ et est dit *mineur* de $\overset{\triangledown\alpha,\beta}{\varphi}$. On note :

$$(III.1.8) \qquad \hat{\varphi} = \min \overset{\triangledown\alpha,\beta}{\varphi} \qquad (\hat{\varphi} \in \mathcal{P}\ ;\ \overset{\triangledown\alpha,\beta}{\varphi} \in \mathcal{R}!_{\alpha,\beta}).$$

Comparant (III.1.8) et (I.1.5), on voit que la relation qui lie majeur et mineur n'est pas du tout *la* même pour l'algèbre $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ que pour l'algèbre $\mathcal{R}!$. Cette relation, dans tout modèle convolutif, est dite *relation de qualification*. Le mineur est *qualifié* et le majeur est *qualifiant*. On peut donc considérer $\mathcal{R}!$ et $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ comme formées par des *mineurs qualifiés* chacun par une classe de *majeurs*. La quantité d'information *en défaut* dans le mineur est d'ailleurs exactement égale à la quantité d'information *en excès* dans les majeurs.

*Eléments $\theta$-intégrables, $\theta^\pm$-continus, $\theta^\pm$-exponentiels d'ordre $\sigma$*

Ces notions se définissent pour $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ exactement comme pour $\mathcal{R}!$, à partir des majeurs et des mineurs, et elles donnent lieu exactement aux mêmes relations de stabilité (et de non-stabilité). Les fonctions résurgentes de $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ qui sont $\theta$-intégrables sont entièrement déterminées par la donnée de leur mineur. D'où la possibilité de calculer leur produit de convolution directement sur ces mineurs, selon la formule :

(*III*.1.9)

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1 *_{\alpha,\beta} \hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}_3 \ \Leftrightarrow \\ \hat{\varphi}_3(\varsigma) = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \varphi_1(\varsigma t_1^\alpha t_2^\alpha)\varphi_2(\varsigma(1-t_1)^\alpha(1-t_2)^\beta)t_1^{\alpha-1}t_2^{\beta-1}(1-t_1)^{\alpha-1} \times \cdots \\ \qquad\qquad (1-t_2)^{\beta-1}dt_1dt_2 \quad (\varsigma \text{ petit}). \end{cases}$$

On le voit, l'intégrande a la même forme exactement que pour la convolution des majeurs (III.1.3) et seul change le bichemin d'intégration.

*Algèbres stellaires affléchies $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}(\&)$.*

Elles sont à $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ exactement ce que les $\mathcal{R}!(\&)$ sont à $\mathcal{R}!$.

*Dérivations étrangères affléchies $\Delta_\omega^{\alpha,\beta}$*

Il y a une manière canonique de définir sur $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ des opérateurs $\Delta_\omega^{\alpha,\beta}$ indexés par $\omega \in \mathbb{C}_\infty$, mesurant les singularités en $\omega$ et ayant la propriété d'être des *dérivations*. Nous n'indiquons pas cette définition directe, car il est plus simple de définir les $\Delta_\omega^{\alpha,\beta}$ comme *transmutés* des $\Delta_\omega$ par l'isomorphisme canonique (*afflexion*) de $\mathcal{R}!$ dans $\mathcal{R}!_{\alpha,b}$. Cet isomorphisme est construit à la section suivante.

*Groupe convolutif des* $(\overset{\triangledown}{J}{}^{\sigma}_{\alpha,b})^{\alpha,\beta}$

Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, notons $(\tilde{J}^{\sigma}_{\alpha,\beta})^{\alpha,\beta}$ l'élément de $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ qui possède un mineur $\hat{J}^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varsigma)$ et un majeur canonique $\check{J}^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varsigma)$ donnés par les formules :

$$(III.1.10) \qquad \text{mineur } \hat{J}^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varsigma) = \frac{\varsigma^{\sigma-1}}{\Gamma(\alpha\sigma)\Gamma(\beta\sigma)} \qquad (\forall\sigma)$$

$$(III.1.11) \quad \textit{majeur } \check{J}^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varsigma) = \frac{\varsigma^{\sigma-1}\cdot e^{i\pi\sigma}}{(2\pi i)^2}\Gamma(1-\alpha\sigma)\Gamma(1-\beta\sigma) \quad (\sigma \notin \frac{1}{\alpha}\mathbb{N}^*,\ \sigma \notin \frac{1}{\beta}\mathbb{N}^*)$$

$$(III.1.11\ bis) \quad \textit{majeur } \check{J}^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varsigma) = \frac{\varsigma^{\sigma-1}\cdot(\log\varsigma)\cdot e^{i\pi\sigma}}{(2\pi i)^2\cdot\alpha}\cdot\frac{\Gamma(1-\beta\sigma)}{\Gamma(\alpha\sigma)} \quad (\sigma \in \frac{1}{\alpha}\mathbb{N}^*, \sigma \notin \frac{1}{\beta}\mathbb{N}^*)$$

$$(III.1.11\ ter) \quad \textit{majeur } \check{J}^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varsigma) = \frac{\varsigma^{\sigma-1}\cdot(\log\varsigma)\cdot e^{i\pi\sigma}}{(2\pi i)^2\cdot\beta}\cdot\frac{\Gamma(1-\alpha\sigma)}{\Gamma(\beta\sigma)} \quad (\sigma \notin \frac{1}{\alpha}\mathbb{N}^*,\ \sigma \in \frac{1}{\beta}\mathbb{N}^*)$$

$(III.1.11\ quarto)$

$$\textit{majeur } \check{J}^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varsigma) = \frac{\varsigma^{\sigma-1}\cdot(\log\varsigma)^2}{(2\pi i)^2(1-\alpha^2-\beta^2)}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha\sigma)\Gamma(\beta\sigma)} \quad (\sigma \in (\frac{1}{\alpha}\mathbb{N}^*)\cap(\frac{1}{\beta}\mathbb{N}^*))$$

Le dernier cas (quarto) ne peut évidemment se produire que si $\alpha$ et $\beta$ sont commensurables. Les $(\overset{\triangledown}{J}{}^{\sigma}_{\alpha,\beta})^{\alpha,\beta}$ forment un groupe de convolution: $(III.1.12)$ $\left(\overset{\triangledown}{J}{}^{\sigma_1}_{\alpha,\beta}\right)^{\alpha,\beta} *_{\alpha,\beta} \left(\overset{\triangledown}{J}{}^{\sigma_2}_{\alpha,\beta}\right)^{\alpha,\beta} = \left(\overset{\triangledown}{J}{}^{\sigma_1+\sigma_2}_{\alpha,\beta}\right)^{\alpha,\beta}$ $(\forall\sigma_1,\sigma_2 \in \mathbb{R})$.Quant aux éléments $\left(\overset{\triangledown}{J}{}^{\sigma,r}_{\alpha,\beta}\right)^{\alpha,\beta}$ :

$$(III.1.13) \qquad \left(\overset{\triangledown}{J}{}^{\sigma,r}_{\alpha,\beta}\right)^{\alpha,\beta} := \left(-\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^r \left(\overset{\triangledown}{J}{}^{\sigma}_{\alpha,\beta}\right)^{\alpha,\beta}$$

ils forment un semi-groupe de convolution. Enfin l'élément $\left(\overset{\triangledown}{J}{}^{0}_{\alpha,\beta}\right)^{\alpha,\beta}$, de majeur $(2\pi i)^{-2}\cdot\varsigma^{-1}$ et de mineur $\equiv 0$, est l'unité de $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$.

## (III.2) Afflexion et déflexion.

PROPOSITION III.2.1. *Isomorphisme de* $\mathcal{R}!$ *et* $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$.

Il existe un isomorphisme unique( ) de $\mathcal{R}!$ dans $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ qui échange les éléments $\overset{\triangledown\sigma}{J}$ et $\left(\overset{\triangledown\sigma}{J}_{\alpha,\beta}\right)^{\alpha,\beta}$. On le note $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ et on l'appelle *afflexion.* L'isomorphisme réciproque, noté $\mathcal{F}^{\alpha,\beta}$, est appelé *déflexion.* Les flexions conservent chacune des notions suivantes : $\theta$-intégrabilité, $\theta^{\pm}$-continuité, $\theta^{\pm}$-exponentialité d'ordre $\sigma$.

Nous allons donner des flexions deux expressions, l'une élémentaire et l'autre plus directement utile. La première n'utilise que la fonction suivante, uniforme sur le recouvrement universel de $\mathbf{C}$ privé des points 0 et 1 :

$$(III.2.1) \qquad \mathbf{C}\ \widetilde{\{0,1\}} \to \mathbf{C}\ ;\ t \to t^{\alpha}(1-t)^{\beta}.$$

La seconde expression fait intervenir des noyaux non élémentaires, dits *flectrices*, et qui sont des fonctions de type "ultragéométrique" (cf.......).

LEMME III.2.1. *Afflectrice $F_{\alpha,\beta}$ et déflectrice $F^{\alpha,\beta}$.*
Les relations

$$(III.2.2)\quad F_{\alpha,\beta}(X) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\Gamma(n\alpha)\Gamma(n\beta)}{\Gamma(n)}\frac{(\sin \pi n\alpha)}{\pi}\frac{(\sin \pi n\beta)}{\pi}\cdot X^{n}\ \left(|\,X\,|< 1/\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\right)$$

$$(III.2.3)\quad F^{\alpha,\beta}(X) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\frac{n}{\alpha})}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+n\frac{\beta}{\alpha})}\cdot X^{n/\alpha} + \frac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\frac{n}{\beta})}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+n\frac{\alpha}{\beta})}\cdot X^{n/\beta}$$

$$\left(|\,X\,|< \alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\right)$$

définissent des fonctions qui, à partir de leurs disques de convergence, se prolongent analytiquement "partout sans coupure".

Nous pouvons maintenant exprimer les isomorphismes (flexions) entre $\mathcal{R}!$ et $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$. Parce que cela nous sera commode pour la suite, nous noterons $\hat{\varphi}_1$ et $\check{\varphi}_1$ (resp. $\hat{\varphi}_{11}$ et $\check{\varphi}_{11}$) les mineurs et majeurs des éléments de $\mathcal{R}!$ (resp. $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$) qui se correspondent :

$$(III.2.4)\qquad \begin{cases} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\ :\ \mathcal{R}! \to \mathcal{R}!_{\alpha,\beta}, & (\hat{\varphi}_1,\check{\varphi}_1) \to (\hat{\varphi}_{11},\check{\varphi}_{11}^{\alpha,\beta}) \\ \mathcal{F}^{\alpha,\beta}\ :\ \mathcal{R}!_{\alpha,\beta} \to \mathcal{R}!? & (\hat{\varphi}_{11},\check{\varphi}_{11}^{\alpha,\beta}) \to (\hat{\varphi}_1,\check{\varphi}_1). \end{cases}$$

PROPOSITION III.2.2. *Afflexion et déflexion : expression élémentaire.*
Pour les fonctions résurgentes $\theta$-intégrables, les flexions peuvent se calculer directement sur les *mineurs* au moyen des formules :

$$(III.2.5)\qquad \hat{\varphi}_{11}(\zeta_{11}) = \frac{\alpha\beta}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\int_{\gamma_{\alpha,\beta}}\hat{\varphi}_1\left(\zeta_1 t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\right)\zeta_1 t^{-\alpha-1}(1-t)^{-\beta-1}dt$$

$$(III.2.6)\qquad \hat{\varphi}_1(\zeta_1) = \int_0^1 \hat{\varphi}_{11}\left(\zeta_{11}t^{\alpha}(1-t)^{\beta}\right)t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

où $\gamma_{\alpha,\beta}$ désigne l'unique chemin (infini) de $\mathbf{C}$ qui traverse le segment $]0,1[$ et sur lequel la fonction $t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}$ (détermination principale) reste *réelle*. Quant aux fonctions résurgentes générales, les flexions doivent se calculer sur les *majeurs* au moyen des formules :

$$(III.2.7) \qquad \check{\varphi}_{11}(\zeta_{11}) = \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta_{11}} \int_{\gamma} \check{\varphi}_1\left(\zeta_1 t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\right) \zeta_1 t^{-\alpha-1}(1-t)^{-\beta-1} dt$$

$$(III.2.8) \qquad \check{\varphi}_1(\zeta_1) = \int_{\gamma} \check{\varphi}_{11}\left(\zeta_{11} t^{\alpha}(1-t)^{\beta}\right) t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$$

pour des chemins $\gamma_1$ et $\gamma_2$ *bornés* et *licites* (condition analogue à (III.1.5)).

PROPOSITION III.2.3. *Afflexion et déflexion : expression pratique.*
Pour les fonctions résurgentes $\theta$-intégrables, les flexions peuvent se calculer directement sur les *mineurs* au moyen des formules :

$$(III.2.9) \qquad \hat{\varphi}_{11}(\zeta_{11}) = \alpha\beta \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta_{11}} \int_0^{\zeta_{11}/\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}} \hat{\varphi}_1(\zeta_1) F_{\alpha,\beta}(\zeta_1/\zeta_{11}) d\zeta_1$$

$$(III.2.10) \qquad \hat{\varphi}_1(\zeta_1) = \frac{1}{\zeta_1} \int_0^{\zeta_1 \alpha^{\alpha}\beta^{\beta}} \hat{\varphi}_{11}(\zeta_{11}) F^{\alpha,\beta}(\zeta_{11}/\zeta_1) d\zeta_{11}.$$

Pour les fonctions résurgentes générales, les flexions doivent se calculer sur les *majeurs* au moyen des formules :

$$(III.2.11) \qquad \check{\varphi}_{11}(\zeta_{11}) = \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta_{11}} \int_{\zeta_{11}/\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}^{u_{11}} \check{\varphi}_1(\zeta_1) F^{\alpha,\beta}(\zeta_{11}/\zeta_1) d\zeta_1$$

$$(III.2.12) \qquad \check{\varphi}_1(\zeta_1) = \frac{2\pi i}{\zeta_1} \int_{\zeta_1 \alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}^{u_1} \check{\varphi}_{11}(\zeta_{11}) F_{\alpha,\beta}(\zeta_1/\zeta_{11}) d\zeta_{11}$$

où le choix du point $u_{11}$ (resp. $u_1$) influe sur le majeur $\check{\varphi}_{11}$ (resp. $\check{\varphi}_1$) mais pas sur sa classe $\overset{\triangledown}{\varphi}{}^{\alpha,\beta}_{11}$ (resp. $\overset{\triangledown}{\varphi}_1$).

Notons le chassé-croisé : l'afflectrice $F_{\alpha,\beta}$ intervient dans l'afflexion des mineurs et la déflexion des majeurs, tandis que la *déflectrice* $F^{\alpha,\beta}$ intervient dans la déflexion des mineurs et l'afflexion des majeurs. Les flectrices ne sont vraiment élémentaires que dans le cas $\alpha = \beta = 1/2$, où l'on a :

$$(III.2.13) \qquad F_{1/2,1/2}(X) = \frac{1}{\pi} \frac{X}{\sqrt{1-(X/2)^2}}$$

$$(III.2.14) \qquad F^{1/2,1/2}(X) = \frac{4}{\sqrt{1-(2X)^2}}.$$

**(III.3) Ascension et descension.**

Considérons les inclusions :

$$(III.3.1) \qquad \mathcal{R}!(\ {}^{\theta} \parallel (\alpha:\theta^+) \text{ accélérable}) \subset \mathcal{R}!(\ {}^{\theta}) \qquad \begin{matrix} \textit{majeurs} & \textit{mineurs} \\ \Phi_1 & \varphi_1 \end{matrix}$$

$$(III.3.2) \qquad \mathcal{R}!_{\alpha,\beta}(\ {}^{\theta} \parallel (\alpha:\theta^+) \text{ accélérable}) \subset \mathcal{R}!_{\alpha,\beta}(\ {}^{\theta}) \qquad \begin{matrix} \textit{majeurs} & \textit{mineurs} \\ \Phi_{11} & \varphi_{11} \end{matrix}$$

$$(III.3.3) \qquad \mathcal{R}!(\ {}^{\alpha:\theta} \parallel (\alpha:\theta^+) \text{ accélérée}) \subset \mathcal{R}!(\ {}^{\alpha:\theta}) \qquad \begin{matrix} \textit{majeurs} & \textit{mineurs} \\ \Phi_2 & \varphi_2 \end{matrix}$$

où les algèbres des première et troisième lignes sont définies comme en § II.3 et où celles de la deuxième ligne se déduisent par l'*afflexion* $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ de celles de la première ligne.

PROPOSITION III.3.1. *Ascension et descension.*
Il existe un isomorphisme continu (pour les topologies naturelles) uniques de l'algèbre $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}(\ {}^{\theta} \parallel (\alpha:\theta)^+\text{-accélérable})$ dans l'algèbre $\mathcal{R}!(\ {}^{\alpha:\theta} \parallel (\alpha:\theta^+)\text{-accélérée})$ qui transforme les $(\overset{\triangledown\sigma}{J}_{\alpha,\beta})^{\alpha,\beta}$ en les $\overset{\triangledown\alpha\sigma}{J}$. Cet isomorphisme est noté $\mathcal{S}_{\alpha:\theta^+}$ et appelé *ascension*. L'isomorphisme réciproque est noté $\mathcal{S}^{\alpha}$ et appelé *descension*.

PROPOSITION III.3.2. *Ascension et descension des mineurs.*
Pour les fonctions résurgentes $\theta$-intégrables et $\theta^+$-exponentielles d'ordre $\beta^{-1}$, l'ascension $\mathcal{S}_{\alpha:\theta^+}$ peut se calculer directement sur les *mineurs* par la formule :

$$(III.3.4) \qquad \zeta_2\hat{\varphi}_2(\zeta_2) = \frac{1}{\beta}\int_{O_3}^{\infty_3} \hat{\varphi}_{11}(\zeta_{11})\exp\left(-\zeta_{11}^{1/\beta}\zeta_2^{-\alpha/\beta}\right) d\zeta_{11}$$

et la descension $\mathcal{S}^{\alpha}$ est donnée par :

$$(III.3.5) \qquad \zeta_{11}\hat{\varphi}_{11}(\zeta_{11}) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\alpha}{\beta}\int_{C_1}^{O_2} \hat{\varphi}_2(\zeta_2)\cdot\zeta_{11}^{1/\beta}\zeta_2^{-\alpha/\beta}\cdot\exp\left(\zeta_{11}^{1/\beta}\zeta_2^{-\alpha/\beta}\right) d\zeta_2$$

avec

$$(III.3.6) \qquad \begin{cases} \arg O_3 = \arg\infty_3 = \theta + O \quad (\text{intégrer "à gauche" de l'axe } \arg\zeta = \theta) \\ \arg O_1 = \theta'' - O = +\dfrac{\theta}{\alpha} + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\beta}{\alpha} - O \\ \arg O_2 = \theta' + O = \dfrac{\theta}{\alpha} - \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\beta}{\alpha} + O. \end{cases}$$

PROPOSITION III.3.3. *Ascension et descension des majeurs.*

Pour les fonction résurgentes $\theta^+$-exponentielles d'ordre $\beta^{-1}$ mais pas forcément $\theta$-intégrables, l'ascension $\mathcal{S}_{\alpha:\theta+}$ peut se calculer sur les *majeurs* par la formule :

$$(III.3.7) \qquad \zeta_2\check{\varphi}_2(\zeta_2) = \frac{1}{\beta}\int_{\infty_1}^{\infty_2} \check{\varphi}_{11}(\zeta_{11})\exp(-\zeta_{11}^{1/\beta}\zeta_2^{-\alpha/\beta})d\zeta_{11}$$

et la descension $\mathcal{S}^\alpha$ est donnée par :

$$(III.3.8) \qquad \zeta_{11}\check{\varphi}_{11}(\zeta_{11}) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\alpha}{\beta}\int_{O_3}^{u} \check{\varphi}_2(\zeta_2)\cdot\zeta_{11}^{1/\beta}\cdot\zeta_2^{-\alpha/\beta}\cdot\exp\left(\zeta_{11}^{1/\beta}\zeta_2^{-\alpha/\beta}\right)d\zeta_2$$

avec

$$(III.3.9) \qquad \begin{cases} \theta - 2\pi < \arg\infty_1 < \arg\infty_2 < \theta \\ \arg\infty_2 - \arg\infty_1 = \beta\pi + \epsilon \\ \theta' - 2\pi < \arg O_3 < \theta'' \quad (\theta' = \dfrac{\theta}{\alpha} - \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\beta}{\alpha}\ ;\ \theta'' = \dfrac{\theta}{\alpha} + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\beta}{\alpha}). \end{cases}$$

REMARQUE 1. L'intégrale (III.3.7) doit évidemment se calculer à partir d'un majeur $\check{\varphi}_{11}$ qui est à la fois *nettoyé* (cf. § I.4) et (au plus exponentiel d'ordre $\beta^{-1}$ uniformément sur tout secteur $\theta - 2\pi + \epsilon < \arg\zeta_{11} < \theta - \epsilon$, mais (lemme) de tels majeurs existent toujours si $\overset{\triangledown}{\varphi}{}_{11}^{\alpha,\beta}$ est elle-même $\theta^+$-exponentielle d'ordre $\beta^{-1}$.

REMARQUE 2. La borne $u$ de l'intégrale (III.3.8) influe sur la définition du majeur $\check{\varphi}_{11}$ mais pas sur celle de la classe $\check{\varphi}_{11}^{\alpha,\beta}$.

REMARQUE 3. Bien que les noyaux de scension soient tout simplement la *fonction exponentielle*, on notera la grande différence conceptuelle entre les scensions, *qui échangent deux modèles convolutifs* (l'un affléchi, l'autre pas) et les applications Borel-Laplace, *qui échangent un modèle convolutif et un modèle multiplicatif.* On observe aussi le chassé-croisé suivant : l'ascension $\mathcal{S}_{\alpha:\theta+}$ se calcule pour les mineurs (resp. majeurs) par une intégrale de type "Laplace" (resp. "Borel") et *vice versa* pour la descension $\mathcal{S}^\alpha$.

REMARQUE 4. Les ascensions $\mathcal{S}_{\alpha:\theta+}$ et $\mathcal{S}_{\alpha:\theta-}$ correspondent à des chemins d'intégration différents (à "gauche" ou à "droite" de l'axe $arg\ \zeta_{11} = \theta$), mais ce n'est pas le cas pour leur inverse "commun", la descension, qu'on peut en conséquence noter $\mathcal{S}^\alpha$ sans mention de la direction $\theta$ et encore moins de $\theta^+$ ou $\theta^-$. On exprime ce fait en disant que l'ascension est *polarisante* et la descension *dépolarisante.*

REMARQUE 5. D'après la section § II.4 et les propriétés de l'afflexion $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$, les fonctions résurgentes affléchies accélérables peuvent se remener à des fonctions résurgentes $\theta^+$-exponentielles d'ordre $\beta^{-1}$, pour lesquelles l'ascension peut se calculer par l'intégrale (III.3.7). Qui plus est, dans tous les cas usuels, on a une factorisation pro-rétro :

$$(III.3.10) \qquad \overset{\triangledown}{\varphi}{}_{11}^{\alpha,\beta} = \overset{\triangledown}{\psi}{}_{11}^{\alpha,\beta} *_{\alpha,\beta} \overset{\triangledown}{\Xi}{}_{11}^{\alpha,\beta}$$

avec un profacteur $\overset{\triangledown}{\psi}{}^{\alpha,\beta}_{11}$ à la fois $\theta$-intégrable et $\theta^+$-exponentiel d'ordre $\beta^{-1}$ (et donc ascendable par l'intégrale (III.3.4) à partir du mineur $\hat{\psi}_{11}$ et avec un rétrofacteur de la forme :

$$(III.3.11) \qquad \overset{\triangledown}{\Xi}{}^{\alpha,\beta}_{11} = \sum_{\sigma\leq 0} c_\sigma (\overset{\triangledown}{J}{}^{\sigma}_{\alpha,\beta})^{\alpha,\beta}$$

auquel l'ascension associe tout simplement le rétrofacteur :

$$(III.3.12) \qquad \overset{\triangledown}{\Xi}_2 = \sum_{\sigma\leq 0} c_\sigma \overset{\triangledown}{J}{}^{\alpha\sigma} .$$

## (III.4) Accélération et décélération.

PROPOSITION III.4.1. *Factorisation pratique de l'accélération et de la décélération.*
Les "factorisation pratiques" :

$$(III.4.1) \qquad \mathcal{C}_{\alpha:\theta+} = \mathcal{S}_{\alpha:\theta+} \cdot \mathcal{F}_{\alpha,\beta} \quad \text{(accélération)}$$

$$(III.4.2) \qquad \mathcal{C}^{\alpha} = \mathcal{F}^{\alpha,\beta} \cdot \mathcal{S}^{\alpha} \quad \text{(décélération)}$$

définissent deux isomorphismes récirpoques d'algèbres convolutives :

$$(III.4.3) \qquad \begin{cases} \mathcal{R}!(\ ^{\theta} \parallel (\alpha:\theta^+ (\text{accélérable}) \ \underset{\mathcal{C}_{\alpha:\theta+}}{\overset{\mathcal{C}^{\alpha}}{\leftrightarrows}} \ \mathcal{R}!(\ ^{\alpha:\theta} \parallel (\alpha:\theta^+) \text{ accéléré}) \\ \overset{\triangledown}{\varphi}_1 * \overset{\triangledown}{\psi}_1 \leftrightarrows \overset{\triangledown}{\varphi}_2 * \overset{\triangledown}{\psi}_2 \\ \overset{\triangledown}{J}{}^{\sigma} \leftrightarrows \overset{\triangledown}{J}{}^{\alpha\sigma} \qquad (\forall\sigma) \end{cases}$$

qui *coïncident* avec les isomorphismes d'*accélération* et de *décélération* qui ont été définis au chapitre II à partir de la factorisation "théorique" (II.3.4) qui faisait passer par le *modèle présommé.*

Bien que nous ayons des formules explicites pour les flexions et les scensions, et donc tout ce qu'il faut pour calculer les célérations, il est également possible de donner pour celles-ci des formules directes. Ces formules intégrales comportent comme noyaux des fonctions entières en $X^\beta$, dites célératrices, et dont voici la définition.

DEFINITION III.4.2. *Accélératrice $C_\alpha(X)$ et décélératrice $C^\alpha(X)$.*
Ce sont les fonctions entières de $X^\beta$ données par les formules :

$$(III.4.4) \qquad C_\alpha(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \pi n\beta}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{\Gamma(1+n)} \cdot X^{n\beta}$$

$$(III.4.5) \qquad C^{\alpha}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{\Gamma(1+n)} \cdot X^{n\beta}$$

et liées par :

$$(III.4.6) \qquad 2\pi i \; C_{\alpha}(X) = C^{\alpha}(X \cdot \mathrm{ex}(i\pi)) - C^{\alpha}(X \cdot \mathrm{ex}(-i\pi)).$$

LEMME III.4.3. *Représentation intégrale des célératrices.*
Pour $x > 0$ on a :

$$(III.4.7) \qquad x^{-1} C_{\alpha}(x^{-\alpha/\beta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{+xy} \cdot e^{-y^{\alpha}} dy$$

$$(III.4.8) \qquad x^{-1} C^{\alpha}(x^{-\alpha/\beta}) = \int_{0}^{+\infty} e^{-xy} \cdot e^{+y^{\alpha}} dy.$$

Il existe d'autres représentations intégrales des célératrices, notamment à partir des flectrices $F_{\alpha,\beta}$ et $F^{\alpha,\beta}$, mais pour l'instant nous n'aurons besoin que des estimations asymptotiques suivantes :

LEMME III.4.4. *Comportement asymptotique des célérations.*
Si l'on pose $x = \alpha^{\alpha/\beta} \cdot \beta \cdot X$, on a les comportements asymptotiques suivants, valables uniformément sur tout sous-secteur (fermé) des secteurs spécifiés:

$$(III.4.9) \qquad C_{\alpha}(X) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-x} \quad (\text{sur } -\frac{\pi}{2} < \arg X < \frac{\pi}{2})$$

$$(III.4.10) \qquad C^{\alpha}(X) \sim \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} \cdot \sqrt{x} \cdot e^{+x} \begin{cases} \text{sur } -\frac{\pi}{2} < \arg X < \frac{\pi}{2} \\ \text{sur } \frac{\pi}{2} < \arg X < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\beta} \\ \text{sur } -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\beta} < \arg X < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ces estimations, qui peuvent être précisées (voir les remarques en fin de section) montrent que les célérations (qui interviennent comme noyaux de célération) ont, sur le premier feuillet de $\mathbf{C}_{\infty}$, à peu près le même comportement à l'infini que les exponentielles (qui interviennent comme noyaux de scension) ce qui autorise à intégrer sur les mêmes chemins dans les deux cas.

PROPOSITION III.4.4. *Accélération et décélération des mineurs.* Pour les fonctions résurgentes $\theta$-intégrables et $\theta^{+}$-exponentielles d'ordre $\beta^{-1}$, l'accélération $\mathcal{C}_{\alpha:\theta^+}$ peut se calculer directement sur les mineurs par la formule :

$$(III.4.11) \qquad \zeta_2 \hat{\varphi}_2(\zeta_2) = \int_{O_3}^{\infty_3} \hat{\varphi}_1(\zeta_1) C_{\alpha}(\zeta_1^{1/\beta} \zeta_2^{-\alpha/\beta}) d\zeta_1$$

et la décélération $C^{\not<}$ est donnée par :

$$(III.4.11) \qquad \zeta_1\hat{\varphi}_1(\zeta_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{O_1}^{O_2} (\hat{\varphi}_2) C^{\alpha}(\zeta_1^{1/\beta}\zeta_2^{-\alpha/\beta}) d\zeta_2$$

avec $O_1$, $O_2$, $O_3$, $\infty_3$ comme en (III.3.6).

PROPOSITION III.4.5. *Accélération et décélération des majeurs.*
Pour les fonctions résurgentes $\theta^{+}$-exponentielles d'ordre $\beta^{-1}$ mais pas forcément $\theta$-intégrables, l'accélération $C_{\alpha:\theta^+}$ peut se calculer sur les majeurs par la formule :

$$(III.4.12) \qquad \zeta_2\check{\varphi}_2(\zeta_2) = \int_{\infty_1}^{\infty_2} \check{\varphi}_1(\zeta_1) C^{\alpha}\left(\zeta_1^{1/\beta}\zeta_2^{-\alpha/\beta}\mathrm{ex}(+i\pi)\right) d\zeta_1$$

et la décélération $C^{\alpha}$ est donnée par :

$$(III.4.13) \qquad \zeta_1\check{\varphi}_1(\zeta_1) = \int_{O_3}^{u} \check{\varphi}_2(\zeta_2) C_{\alpha}\left(\zeta_1^{1/\beta}\zeta_2^{-\alpha/\beta}\mathrm{ex}(-i\pi)\right) d\zeta_2$$

avec $\infty_1$, $\infty_2$, $O_3$ comme en (III.3.9).

REMARQUE 1. Comme pour l'ascension des majeurs, il faut calculer l'intégrale (III.4.12) à partir d'un majeur $\check{\varphi}_1$ à la fois nettoyé et exponentiel d'ordre $\beta^{-1}$ sur tout secteur $\theta - 2\pi + \epsilon < \arg \zeta_1 < \theta - \epsilon$, mais de tels majeurs existent toujours si $\overset{\triangledown}{\varphi}_1$ est elle-même $\theta^{+}$-exponentielle d'ordre $\beta^{-1}$.

REMARQUE 2. La borne $u$ de l'intégrale (III.4.13) influe sur le majeur $\check{\varphi}_1$ mais pas sur sa classe $\overset{\triangledown}{\varphi}_1$ (car $C_{\alpha}(X)$ est une fonction entière de $X^{\beta}$).

REMARQUE 3. On observe le chassé-croisé habituel puisque l'accélératrice $C_{\alpha}(X)$ intervient dans la formule d'accélération des mineurs et de décélération des majeurs, tandis que la décélératrice $C^{\alpha}(X)$ intervient dans la formule de décélération des mineurs et d'accélération des majeurs.

REMARQUE 4. Comme l'ascension, l'accélération a un caractère *polarisant* (il faut préciser la direction $\theta^{+}$ ou $\theta^{-}$) et, comme la descension, la décélération a un caractère *dépolarisant*. Au contraire, les deux flexions (afflexion et déflexion) sont strictement neutres à cet égard : on peut les dire apolaires.

REMARQUE 5. Soulignons cette autre différence cruciale : les opérations "horizontales" (afflexion et déflexion) échangent $\mathcal{R}!$ et $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ toutes entières, tandis que les opérations ascendantes accélération et ascension (resp. descendantes décélération et descension) n'opèrent que sur des sous-algèbres définies par des conditions d'exponentialité à l'infini (resp. à l'origine) et aussi, accessoirement, par des conditions de prolongeabilité analytique des germes images. D'ailleurs, les flexions ne font pas apparaître de nouvelles dérivées étrangères (elles transmutent simplement les $\Delta_\omega$ en $\Delta_\omega^{\alpha,\beta}$) alors que les opérations ascendantes ou descendantes (célérations et scensions) en font, elles, apparaître de radicalement nouvelles.

REMARQUE 6. D'après la section § II.4, les fonctions résurgentes accélérables peuvent se ramener à des fonctions résurgentes $\theta^+$-exponentielles d'ordre $\beta^{-1}$, pour lesquelles l'accélération peut se calculer au moyen de l'intégrale (III.4.12). Qui plus est, dans tous les cas usuels, on a une factorisation pro-rétro :

$$\overset{\triangledown}{\varphi}_1 = \overset{\triangledown}{\psi}_1 * \overset{\triangledown}{\Xi}_1 \tag{III.4.14}$$

avec un profacteur $\overset{\triangledown}{\psi}_1$ à la fois $\theta$-intégrable et $\theta^+$-exponentiel d'ordre $\beta^{-1}$ (et donc accélérable par l'intégrale (III.4.11) à partir du mineur $\psi_1$) et avec un rétrofacteur de la forme

$$\overset{\triangledown}{\Xi}_1 = \sum_{\sigma \leq 0} c_\sigma \overset{\triangledown}{J}^{\sigma} \tag{III.4.15}$$

REMARQUE 7. *Le cas élémentaire* $\alpha = 1/2$.
Le seul cas où l'accélératrice (noyau d'accélération) est élémentaire est le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ (passage d'un niveau au niveau double). On a alors :

$$C_{1/2}(X) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{X} \cdot e^{-X/4}. \tag{III.4.17}$$

REMARQUE 8. *Résurgence des célératrices.*
Les estimations asymptotiques (III.4.9) et (III.4.10) peuvent être affinées. Plus précisément, il existe deux séries formelles :

$$\&_\alpha(x) = \sqrt{x}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{\alpha,n} x^{-n}\right) \quad (c_{\alpha,n} \in \mathbb{C}) \tag{III.4.18}$$

$$\&^\alpha(x) = \sqrt{x}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c'_{\alpha,n} x^{-n}\right) \quad (c'_{\alpha,n} \in \mathbb{C}) \tag{III.4.19}$$

telles que, sur les secteurs indiqués, on ait les développements asymptotiques de tout ordre:

$$C_\alpha(X) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} \&_\alpha(x) \qquad (x = \alpha^{\alpha/\beta} \cdot \beta \cdot X) \tag{III.4.20}$$

$$C^\alpha(X) \sim \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} \&^\alpha(x) \qquad (x = \alpha^{\alpha/\beta \cdot \beta \cdot X}). \tag{III.4.21}$$

Les séries formelles $\&_\alpha(x)$ et $\&^\alpha(x)$ sont dites bi-célératrices. Elles sont divergentes (sauf pour $\alpha = 1/2$) mais ce sont des fonctions résurgentes de $x$ (modèle formel). Leurs dérivées étrangères

$$(III.4.22) \qquad \Delta_1 \&_\alpha(x) = \&_\alpha(x) \qquad (\textit{triaccélératrice})$$

$$(III.4.23) \qquad \Delta_1 \&^\alpha(x) = \&^\alpha(x) \qquad (\textit{tridécélératrice})$$

ont des transformées de Borel qui (à une renormalisation près) cöincident avec les flectrices $F_{\alpha,\beta}$ et $F^{\alpha,\beta}$ et sont donc de coefficients connus. Quant aux coefficients $c_{\alpha,n}$ et $c'_{\alpha,n}$ de $a_\alpha(x)$ et $a^\alpha(x)$, leur expression fait intervenir les nombres de Bernoulli (cf. [...]).

REMARQUE 9. *Le phénomène de la double nature.*
On voit que les bicéléatrices $\&_\alpha(x)$ et $\&^\alpha(x)$ présentent une **double nature** : dans le *modèle formel*, ce sont des séries entières de $x^{-1}$ (au facteur $\sqrt{x}$ près) mais dans le *modèle sommé*, ce sont des *fonctions entières* de $x^\beta$ (ou de $X^\beta$, ce qui revient au même).

REMARQUE 10. *Fonctions ultragéométriques et hypergéométriques.*
Les flexions qui échangent $\mathcal{R}!$ et $\mathcal{R}!_{\alpha,\beta}$ et, plus généralement, celles qui échangent les algèbres $\mathcal{R}!_{\alpha_1,\cdots,\alpha_r}$ de la section § III.5, sont des fonctions de type *ultragéométrique :*

$$(III.4.24) \qquad \sum_n \frac{\Gamma(\alpha_1 n)\Gamma(\alpha_2 n)\cdots\Gamma(\alpha_r n)}{\Gamma(\beta_1 n)\Gamma(\beta_2 n)\cdots\Gamma(\beta_s n)} X^n$$

qui ne se ramènent à des (sommes de) fonctions *hypergéométriques:*

$$(III.4.25) \qquad \sum_n \frac{\Gamma(\tau_1+n)\Gamma(\tau_2+n)\cdots\Gamma(\tau_r+n)}{\Gamma(\sigma_1+n)\Gamma(\sigma_2+n)\cdots\Gamma(\sigma_s+n)} X^n$$

que dans le seul cas où les $\alpha_i$ et $\beta_i$ sont *rationnels.* Ces fonctions sont très liées au phénomène de la "*double nature*" (cf. remarque 9 ci-dessus) et interviennent aussi en résurgence quantique, dans l'expression des fonctions de Sibuya et Voros (les $S_j(x)$ et les $V_j(x)$, cf. [...]) qui, elles aussi, présentent une "double nature" (résurgentes en $x$ et fonctions entières d'une puissance non entière de $x$).

REMARQUE 11. *Le paradoxe de l'accélération.*
Plus rapprochés sont deux niveaux critiques, plus les opérateurs d'accélération et de décelération causent des changements brutaux. En effet, une accélération $\mathcal{C}_{\alpha:\theta}$ de rapport $\alpha$ très proche de 1 induit en général chez l'accélérée des coupures stellaires aux frontières d'une petite étoile $^{\alpha:\theta}$ (d'ouverture $\frac{\pi}{2}\frac{\beta}{\alpha}$) et, réciproquement, une décélération $\mathcal{C}^\alpha$ de rapport $\alpha$ proche de 1 induit chez la décélérée une croissance très rapide (en $\exp(|\,\zeta_1\,|^{1/\beta}$, avec $\beta$ petit) à l'infini. C'est le "**paradoxe de l'accélération**" qu'on peut exprimer ainsi : "**moins on accélère (ou décélère), plus il y a de secousses**". Ce phénomène s'accentue encore quand on passe à des accélérations non plus du type $z_1 = z_2^\alpha$ $(\alpha < 1)$ mais de type plus général $z_1 = z_2/\log z_2$ ou $z_1 = z_2/\log\log z_2$.

**(III.5) Algèbre afflèchie $\mathcal{R}!_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}$.**
Signalons en vue des applications (cf. chapitre V) qu'à tout multiindice $\alpha!$ de la forme :

$$(III.5.1) \qquad \alpha! = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \quad \text{avec} \quad \alpha_i > 0 \quad \text{et} \quad \sum \alpha_i = 1$$

on associe une algèbre afflèchie

$$(III.5.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{R}!_\alpha = \mathcal{R}!_{\alpha_1,\cdots,\alpha_r} = \mathcal{P}!/\mathcal{P}!_\alpha \quad \text{avec} \\ \mathcal{P}!_\alpha = \mathcal{P}! \cap \left\{\mathbb{C}\{\varsigma^{1/\alpha_1}\} + \mathbb{C}\left\{\varsigma^{1/\alpha_2}\right\} + \cdots \mathbb{C}\left\{\varsigma^{1/\alpha_r}\right\}\right. \end{cases}$$

avec une convolution $*_{\alpha!}$ calquée sur (III.1.3) + (III.1.4) et avec, entre majeurs $\check{\varphi}$ et mineurs $\hat{\varphi}$, la relation de qualification suivante :

$$(III.5.3) \qquad \hat{\varphi} = (1 - R_{\alpha_1})(1 - R_{\alpha_2}) \cdots (1 - R_{\alpha_r})\check{\varphi} \quad (R_\sigma \text{ comme en (II.1.1)}).$$

*Toutes* ces algèbres $\mathcal{R}!_\alpha$ sont strictement isomorphes, par des *flexions* facilement explicitables mais dont nous n'aurons pas besoin. En revanche, nous aurons besoin de la remarque suivante :

Soit $\alpha! = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ et soient $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha + \beta = 1$. Alors la partie de $\mathcal{R}!_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}(\&^{\alpha:\theta})$ formée par les fonctions $(\alpha : \theta^+)$ accélérées est en isomorphisme canonique avec la partie de $\mathcal{R}_{\alpha\alpha_1,\alpha\alpha_2,\cdots,\alpha\alpha_r,\beta}(\&^\theta)$ formées des fonctions $(\alpha : \theta^+)$ accélérables, et ceci pour des isomorphismes d'ascension et de descension qui sont donnés *exactement* par les mêmes formules qu'au § III.3. D'où le diagramme :

REMARQUE 1. *Flexions et singularités.*
Les flexions, c'est-à-dire les isomorphismes canoniques qui échangent deux algèbres afflèchies :

$$(III.5.4) \qquad \mathcal{R}!_{\alpha_1,\cdots,\alpha_r}\mathcal{R}!_{\beta_1,\cdots,\beta_s} \qquad \left(\sum \alpha_i = \sum \beta_j = 1\right)$$

ne modifient pas le "nombre" des singularités *vues* ou *entrevues* depuis $\mathcal{O}$, mais leur font simplement subir une homothétie de rapport :

$$(III.5.5) \qquad \gamma = (\alpha_1^{\alpha_1} \cdots \alpha_r^{\alpha_r})/(\beta_1^{\beta_1} \cdots \beta_r^{\beta_r}) \qquad (\omega \to \omega\gamma)$$

ou de rapport inverse. Elles peuvent toutefois provoquer l'*apparition* (ou la *disparition*) d'autres singularités, *invisibles* depuis $\mathcal{O}$. Toutefois, cela ne contredit en rien le fait, déjà signalé, selon lequel les flexions (contrairement à l'accélération et à la décélération) ne font apparaître aucune dérivée étrangère "nouvelle" (voir [...]).

REMARQUE 2. La factorisation de l'accélération en produit d'une afflexion et d'une ascension (cf. § III.4) se généralise aux accélérations "générales" du type $z_1 = h(z_2) = o(z_2)$ (par exemple $z_1 = z_2^{\alpha}(\log z_2)^{\alpha'}(\log \log z_2)^{\alpha''}(\log \log \log z_2)^{\alpha''}$, avec $0 < \alpha < 1$) mais cette factorisation fait transiter par des algèbres affléchies où la *relation de qualification* (entre majeurs $\check{\varphi}$ et mineurs $\hat{\varphi}$) n'est pas du type (III.1.7) ni même du type (III.5.3), mais d'un type encore moins élémentaire.

# IV. MONOMES DE RESURGENCE A PLUSIEURS NIVEAUX

## (IV.1) Monômes isotropes. Prosolutions et rétrosolutions

Dans toute la suite, les indices *simples* seront notés par des lettres *maigres* et éventuellement subindexés *en bas*, tandis que les *multiindices* seront notés par des lettres grasses et éventuellement subindexés *en haut*. Ainsi :

*indices simples :* $\varpi$ ; $\varpi_i$ $\quad (\varpi,\ \varpi_i \in \mathcal{A})$
*multiindices :* $\boldsymbol{\varpi} = (\varpi_1, \cdots, \varpi_r)$ ; $\boldsymbol{\varpi}^i = (\varpi_1^i, \cdots, \varpi_{r_i}^i)$ $\quad (\varpi_j, \varpi_j^i \in \mathcal{A})$.

DEFINITION IV.1.1. *Prosolutions et rétrosolutions.*
Soit $\mathcal{A}$ l'espace des polynômes $\varpi(z)$ en $z$ sans terme constant :

$$(IV.1.1) \qquad (\varpi \in \mathcal{A}) \Leftrightarrow \left( \varpi(z) = \sum_{p=1}^{d} \omega_p \cdot z^p \text{ avec } \omega_p \in \mathbb{C},\ \varpi(0) = 0 \right).$$

A chaque $\varpi \in \mathcal{A}$ on associe l'opérateur différentiel :

$$(IV.1.2) \qquad D_\varpi = (e^{-\varpi(z)}) \cdot (z\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (e^{\varpi(z)}) = z\varpi'(z) + z\frac{\partial}{\partial z}$$

et on note $(D_\varpi)^{-1}_{\text{pro}}$ (resp. $(D_\varpi)^{-1}_{\text{retro}}$) l'opérateur qui à tout monôme $z^{-\sigma}$ ($\sigma$ irrationnel) associe l'unique solution formelle $\varphi_{\text{pro}}$ (resp. $\varphi_{\text{retro}}$) en puissances décroissantes $z^{-\sigma-m}$ (resp. en puissances croissantes $z^{-\sigma+m}$, $m$ entier) de l'équation :

$$(IV.1.3) \qquad D_\varpi \varphi = z^{-\sigma}.$$

Autrement dit :

$$(IV.1.4) \qquad (D_\varpi)^{-1}_{\text{pro}} \cdot z^{-\sigma} = \varphi_{\text{pro}}(z) \in z^{-\sigma}\mathbb{C}[[z^{-1}]] \quad (\sigma \text{ irrationnel})$$

$$(IV.1.5) \qquad (D_\varpi)^{-1}_{\text{retro}} \cdot z^{-\sigma} = \varphi_{\text{retro}}(z) \in z^{-\sigma}\mathbb{C}[[z]] \quad (\sigma \text{ irrationnel}).$$

$\varphi_{\text{pro}}$ et $\varphi_{\text{retro}}$ sont dites *prosolution* et *retrosolution* de l'équation (IV.1.3). Pour tout $p > 0$, on pose :

$$(IV.1.6) \qquad (D_\varpi)^{-1}_p = \begin{cases} (D_\varpi)^{-1}_{\text{pro}} & \text{si degré } (\varpi) \geq p \\ (D_\varpi)^{-1}_{\text{retro}} & \text{si degré } (\varpi) < p. \end{cases}$$

DEFINITION IV.1.2. *Monômes isotropes de niveau p*
Pour tout $p, r \in \mathbb{N}$, tous $\varpi_1, \cdots, \varpi_r \in \mathcal{A}$ et tous $\sigma_1, \cdots, \sigma_r \in \mathbb{R}$, on pose :

$$(IV.1.7) \qquad \begin{cases} \mathcal{V}^{\boldsymbol{\varpi}}_{\boldsymbol{\sigma}}(z_p \parallel p) = \mathcal{V}^{\varpi_1,\cdots,\varpi_r}_{\sigma_1,\cdots,\sigma_r}(z_p \parallel p) = \\ (D_{\varpi_1+\cdots\varpi_r})^{-1}_p \cdot z^{-\sigma_r} \cdots (D_{\varpi_1+\varpi_2})^{-1}_p \cdot z^{-\sigma_r}(D_{\varpi_1})^{-1}_p \cdot z^{-\sigma_1} \\ \text{avec } z_p = z^{+p}. \end{cases}$$

Cela veut dire qu'on calcule la deuxième ligne, de proche en proche, à partir de la droite, par une succession de prosolutions et de rétrosolutions, puis qu'on effectue le changement de variable $z = (z_p)^{+1/p}$. Les séries formelles $\mathcal{V}_\sigma^\varpi(z_p \parallel p)$ sont dites *monômes de résurgence* (nous verrons pourquoi) *isotropes de niveau* $p$ (nous verrons aussi pourquoi).

REMARQUE 1. Quand $p = 1$ (resp. quand $p$ est assez grand) la seconde ligne de (IV.1.7) s'obtient par une succession de pures prosolutions (resp. rétrosolutions) et chaque coefficient s'obtient comme somme finie, sans aucune difficulté de convergence. Dans le cas général, au contraire, la seconde ligne de (IV.1.8) fait intervenir un mélange de prosolutions et de rétrosolutions si bien qu'à chacune des $r$ étapes, la série formelle obtenue a des coefficients qui se présentent comme *sommes infinies* des coefficients calculés à l'étape précédente. Il se trouve cependant (lemme) que ces sommes de coefficients *convergent*, si bien que, là encore, la définition des $\mathcal{V}_\sigma^\varpi(z_p \parallel p)$ garde tout son sens. Bien entendu, comme *séries formelles* (bilatérales ou "bigrades") en $z_p$, les $\mathcal{V}_\sigma^\varpi(z_p \parallel p)$ sont généralement *divergentes*

REMARQUE 2. A priori, la définition (IV.1.7) n'a de sens que pour les suites $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ vérifiant :

$$(IV.1.8) \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots \sigma_i \in \mathbb{R} \dot{-} \mathbb{Q} \qquad (\forall i).$$

Il existe toutefois un moyen canonique d'étendre la définition des $\mathcal{V}_\sigma^\varpi(z_p \parallel p)$ à des suites $\sigma$ quelconques. Simplement, quand certaines des sommes partielles $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots \sigma_i$ sont rationnelles, on peut voir apparaître( ) dans $\mathcal{V}_\sigma^\varpi(z_p \parallel p)$ des termes en $(\log z)^s$ avec $s \leq r$.

PROPOSITION IV.1.3. *Résurgence des monômes isotropes*
Pour chaque niveau $p$, les monômes isotropes :

$$(IV.1.9) \qquad \mathcal{V}_{\sigma!}^{\varpi!}(z_p \parallel p) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\varpi!, \sigma! \parallel p) \quad z^{-\|\sigma!\| p^{-1} - m p^{-1}} \qquad (\ )$$

sont des *fonctions résurgentes* appartenant au modèle formel $\mathcal{R}^{\text{quasi}}$. Plus précisément, les transformées de Borel :

$$(IV.1.10) \qquad \mathcal{V}_{\sigma!}^{\varpi!}(\zeta_p \parallel p) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\varpi, !\sigma! \parallel p) \qquad J^{\|\sigma!\| p^{-1} + m p^{-1}}(\zeta_p)$$

ont un mineur

(IV.1.11)

$$\hat{\mathcal{V}}_{\sigma!}^{\varpi!}(\zeta_p \parallel p) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\varpi, !\sigma! \parallel p)(\zeta_p)^{\|\sigma!\| p^{-1} + m p^{-1} - 1} / \Gamma(\| \sigma! \| p^{-1} + m p^{-1})$$

qui converge pour $\zeta_p$ proche de $\mathbb{O}$ et se prolonge "partout sans coupure", mais qui présente en général de très fortes singularités en $\mathbb{O}$ et ailleurs( ).

PROPOSITION IV.1.4. *Multiplication des monômes isotropes.*
Elle a un sens et elle s'écrit :

$$\text{IV.1.12)} \qquad \mathcal{V}^{\varpi!^1}_{\sigma!^1}(z^p \parallel p)\mathcal{V}^{\varpi!^2}_{\sigma!^2}(z_p \parallel p) = \sum_{\binom{\varpi!^1}{\sigma!^1},\binom{\varpi!^2}{\sigma!^2}\subset\binom{\varpi!}{\sigma!}} \mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p$$

où la somme finie du second membre est étendue à tous les multiindices $\binom{\varpi!}{\sigma!}$ obtenus par *battage* ("shuffling") des multiindices $\binom{\varpi!^1}{\sigma!^1}$ et $\binom{\varpi!^2}{\sigma!^2}$. On traduit cette propriété en disant que le *moule* $\mathcal{V}^{\bullet}(z_p \parallel p)$ est *symétral* (cf....) ( ).

## (IV.2) Monômes polarisés.

PROPOSITION IV.2.1. *Monômes polarisés de niveau p.*
Les monômes isotropes de niveau 1 :

$$(IV.2.1) \qquad \mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_1 \parallel 1) = \mathcal{V}^{\varpi_1,\cdots,\varpi_r}_{\sigma_1,\cdots,\sigma_r}(z_1 \parallel 1)$$

dont nous avons vu qu'ils étaient *prograd*es (dévelopables en puissances négatives de $z_1$), sont aussi *uniformément* et *indéfiniment accélérables*( ). Plus précisément, pour toute multipolarisation $\theta!$ de niveau $< p$ :

$$(IV.2.2) \qquad \theta! = (\theta_1^{\epsilon_1}, \theta_2^{\epsilon_2}, \cdots, \theta_{p-1}^{\epsilon_{p-1}}) \quad \text{avec} \quad \theta_i \in \mathbb{R} \;\; \text{et} \;\; \epsilon_i = + \text{ ou } -$$

la relation suivante (écrite par commodité dans le modèle formel, mais opérative dans le modèle convolutif) :

$$(IV.2.3) \qquad \begin{cases} \mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p : \theta!) = \mathcal{V}^{\varpi_1,\cdots,\varpi_r}_{\sigma_1,\cdots,\sigma_r}(z_p \parallel p : \theta_1^{\epsilon_1}, \cdots, \theta_{p-1}^{\epsilon_{p-1}}) = \\ \left(\mathcal{C}_{\alpha_{p-1}:\theta_{p-1}^{\epsilon_{p-1}}}\right)\cdots\left(\mathcal{C}_{\alpha_2:\theta_2^{\epsilon_2}}\right)\left(\mathcal{C}_{\alpha_1:\theta_1^{\epsilon_1}}\right)\cdot\mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_1 \parallel 1) \end{cases}$$

définit une fonction résurgente $\mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p : \theta!)$ dite *monôme $\theta!$-polarisé de niveau p.* Cela reste vrai même quand la multipolarisation $\theta!$ ne vérifie pas la condition (II.4.3) de compatibilité.

PROPOSITION IV.2.2. *Propriétés des monômes polarisés.*
Commençons par le modèle formel. Le monôme $\mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p : \theta)$ appartient non seulement à $\mathcal{R}(\ ^{\alpha_{p-1}:\theta_{p-1}^{\epsilon_{p-1}}})$ mais aussi à l'algèbre non-stellaire $\mathcal{R}$ et même à l'algèbre $\mathcal{R}^{\text{quasi}}$. Cette dernière appartenance signifie qu'il possède une série formelle :

$$(IV.2.4) \qquad \mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p : \theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(\varpi!, \sigma! \parallel p : \theta!)\ (z_p)^{-\|\sigma!\|_p^{-1} - mp^{-1}} \quad (\ )$$

qui le détermine (via le modèle convolutif).

Passons au modèle convolutif. Le niveau $\hat{\mathcal{V}}^{\varpi!}_{\sigma!}(\zeta_p \parallel p : \theta!)$ est somme de la série :

$$(IV.2.5) \qquad \hat{\mathcal{V}}^{\varpi!}_{\sigma!}(\zeta_p \parallel p : \theta!) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\varpi!, \sigma! \parallel p : \theta!) \cdot (\zeta_p)^{\|\sigma!\| p^{-1} + mp^{-1} - 1} / \Gamma(\| \sigma! \| p^{-1} + mmp^{-1})$$

qui converge uniformément sur tout un voisinage (ramifié) de $\mathbb{O}$. La fonction $\zeta_p \to \hat{\mathcal{V}}^{\varpi!}_{\sigma!}(\zeta_p \parallel p : \theta!)$ présente en général un comportement explosif au voisinage de l'origine $\mathbb{O}$. Toutefois, lorsque la multipolarisation $\theta!$ vérifie la relation de compatibilité (II.4.3) et que $\zeta_p$ tend vers $\mathbb{O}$ à l'intérieur du secteur $S^{\alpha_{p-1}:\theta_{p-1}}$ ( ), ce mineur $\hat{\mathcal{V}}^{\varpi!}_{\sigma!}(\zeta_p \parallel p : \theta!)$, bien que toujours *somme* de la série *"bigrade"* (bilatérale) (IV.2.5), admet un *développement asymptotique* de tout ordre donné par la série *"prograde"* (unilatérale) :

$$(IV.2.6) \qquad \hat{\mathcal{V}}^{\varpi!}_{\sigma!}(\zeta_p \parallel p : \theta!) \sim \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m(\varpi!, \sigma! \parallel 1)(\zeta_p)^{\|\sigma!\| p^{-1} + mp^{-1} - 1} / \Gamma(\| \sigma! \| p^{-1} + mp^{-1})$$

qui est radicalement différente de (IV.2.5) et qu'on déduit de la série prograde de niveau 1 :

$$(IV.2.7) \qquad \mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_1 \parallel 1) = \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m(\varpi!, \sigma! \parallel 1) z_1^{-\|\sigma!\| - m} \qquad \text{(modèle formel)}$$

par changement de variable $z_1 = (z_p)^{1/p}$ suivi de la transformation de Borel formelle :

$$(IV.2.8) \qquad z_p^{-\tau} \to (\zeta_p)^{\tau - 1} / \Gamma(\tau).$$

PROPOSITION IV.2.3. *Multiplication des monômes polarisés.*
Elle a évidemment un sens et obéit aux mêmes règles exactement que celle des monômes isotropes :

$$(IV.2.9) \qquad \mathcal{V}^{\varpi!^1}_{\sigma!^1}(z_p \parallel p : \theta!) \mathcal{V}^{\varpi!^2}_{\sigma!^2}(z_p \parallel p : \theta!) = \sum_{\binom{\varpi!^1}{\sigma!^1}, \binom{\varpi!^2}{\sigma!^2} \subset \binom{\varpi!}{\sigma!}} \mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p : \theta!)$$

ce qu'on exprime en disant que le moule $\mathcal{V}^{\bullet}(z_p \parallel p : \theta)$ est symétral.

REMARQUE. *Secteur de régularité.*
Le secteur de régularité du mineur $\hat{\mathcal{V}}^{\varpi!}_{\sigma!}(\zeta_p \parallel p : \theta!)$, c'est-à-dire le secteur sur lequel il possède le développement asymptotique (IV.2.6), est en réalité un peu plus grand que l'étoile $^{\alpha_{p-1}:\theta_{p-1}}$. Il est exactement égal à l'étoile :

$$(IV.2.10) \qquad = \cup \; ^{\alpha_{p-1}:\hat{\theta}_{p-1}} \qquad (\hat{\theta}! \text{ équivalente à } \theta)$$

où la réunion s'étend à toutes les multipolarisations $\hat{\theta}!$ qui vérifient la condition de compatibilité (II.4.3) et qui sont équivalentes à $\theta!$, c'est-à-dire telles que les secteurs d'angles $[\theta_q, \hat{\theta}_q]$ ou $[\hat{\theta}_q, \theta_q]$ ne contiennent pas de singularités de niveau $q$ $(q = 1, 2, \cdots, p-1)$.

**(IV.3) Equations de résurgence et coefficients de résurgence.**
Pour écrire les équations de résurgence des monômes isotropes ou polarisés, il est commode de leur associer des monômes de résurgence pointés :

$$(IV.3.1) \qquad \underset{\bullet}{\mathcal{V}}\,{}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p) = e^{\|\varpi!(z)\|}\mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p) \quad \text{(modèle formel)}$$

$$(IV.3.2) \qquad \underset{\bullet}{\mathcal{V}}\,{}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p:\theta) = e^{\|\varpi!(z)\|}\mathcal{V}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p:\theta!) \quad \text{(modèle formel)}$$

en les multipliant par un facteur :

$$(IV.3.3) \qquad \begin{cases} e^{\|\varpi!(z)\|} = e^{\varpi_1(z)+\cdots+\varpi_r(z)=e^{\varpi_1(z_p^{1/p})+\cdots\varpi_r(z_p^{r/p})}} \\ \varpi = (\varpi!_1, \cdots, \varpi_r), \quad \| \varpi! \| = \varpi_1 + \cdots + \varpi_r \ ; \ \varpi_i \in \Omega \end{cases}$$

dont la partie *subexponentielle* en $z_p$ doit s'interpréter comme une *rétrofonction* tandis que la partie *exponentielle* ou *surexponentielle* en $z_p$ a le statut d'un pur symbole.

PROPOSITION IV.3.1. *Equations de résurgence de niveau p : notations compacte.*
Pour tout $\omega_0 \in \mathbf{C}_\infty$ de projection $\dot{\omega}_0$ sur $\mathbf{C}$, notons $\Delta_{\omega_0}$ la dérivation étrangère en $z_p$ (modèle formel), c'est-à-dire en $\zeta_p$ (modèle convolutif) et notons $\dot{\Delta}_{\omega_0}$ la dérivation étrangère pointée correspondante :

$$(IV.3.4) \qquad \dot{\Delta}_{\omega_0} = e^{-\omega_0 z_p}\Delta_{\omega_0} \quad \text{(modèle formel ; voir § I.3).}$$

Avec ces notations, les monômes (isotropes ou polarisés) de niveau $p$ vérifient les équations de résurgence suivantes (écrites dans le modèle formel):

$$(IV.3.5) \qquad \dot{\Delta}_{\omega_0}\underset{\bullet}{\mathcal{V}}\,{}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p) = \sum_{\binom{\varpi!^1}{\sigma!^1},\binom{\varpi!^2}{\sigma!^2}=\binom{\varpi!}{\sigma!}} V^{\varpi!^1}_{\sigma!^1}(\omega_0 \parallel p)\,\underset{\bullet}{\mathcal{V}}\,{}^{\varpi!^2}_{\sigma!^2}(z_p \parallel p)$$

$$(IV.3.6) \qquad \dot{\Delta}_{\omega_0}\underset{\bullet}{\mathcal{V}}\,{}^{\varpi!}_{\sigma!}(z_p \parallel p:\theta) = \sum_{\binom{\varpi!^1}{\sigma!^1},\binom{\varpi!^2}{\sigma!^2}=\binom{\varpi!}{\sigma!}} V^{\varpi!^1}_{\sigma!^1}(\omega_0 \parallel p:\theta!)\,\underset{\bullet}{\mathcal{V}}\,{}^{\varpi!^2}_{\sigma!^2}(z_p \parallel p:\theta)$$

où les sommes finies des seconds membres sont étendues aux $(r+1)$ factorisations :

$$(IV.3.7) \qquad \binom{\varpi!^1}{\sigma!^1}\binom{\varpi!^2}{\sigma!^2} = \binom{\varpi_1, \varpi_2, \cdots, \varpi_i}{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_i}\cdot\binom{\varpi_{i+1}, \cdots, \varpi_r}{\sigma_{i+1}, \cdots, \sigma_r} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, r)$$

du multiindice $\begin{pmatrix} \varpi! \\ \sigma! \end{pmatrix}$ et où les $V_{\sigma!}^{\varpi!}(\omega_0 \parallel p)$ et $V_{\sigma!}^{\varpi!}(\omega_0 \parallel p : \theta!)$ désignent des *scalaires*, dits *coefficients de résurgence* (isotropes ou polarisés) et possédant la propriété suivante :

$$(IV.3.8) \qquad V_{\sigma!}^{\varpi!}(\omega_0 \parallel p) = V_{\sigma!}^{\varpi!}(\omega_0 \parallel p : \theta!) = 0 \text{ sauf si } \parallel \varpi! \parallel_{\tilde{p}} \dot{\omega}_0$$

ce qui veut dire que le polynôme $\parallel \varpi!(z) \parallel$ admet $\omega_0 z^p$ pour terme dominant.

PROPOSITION IV.3.2. *Caractère alternal des moules $V^\bullet(\omega_0 \parallel p)$ et $V^\bullet(\omega_0 \parallel p : \theta!)$.* Pour toute paire $\begin{pmatrix} \varpi!^1 \\ \sigma!^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varpi!^2 \\ \sigma!^2 \end{pmatrix}$ de multiindices, les coefficients de résurgence vérifient les identités :

$(IV.3.10)$

$$0 = \sum_{\begin{pmatrix} \varpi!^1 \\ \sigma!^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varpi!^2 \\ \sigma!^2 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \varpi! \\ \sigma! \end{pmatrix}} V_{\sigma!}^{\varpi!}(\omega_0 \parallel p) = \sum_{\begin{pmatrix} \varpi!^1 \\ \sigma!^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varpi!^2 \\ \sigma!^2 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \varpi! \\ \sigma! \end{pmatrix}} V_{\sigma!}^{\varpi!}(\omega_0 \parallel p : \theta!)$$

($\subset$ désigne le "battage") ce que l'on résume en disant que les moules $V^\bullet(\omega_0 \parallel p)$ et $V^\bullet(\omega_0 \parallel p : \theta!)$ sont alternals.

*Interprétation des équations de résurgence*
Revenant aux monômes de résurgence (isotropes ou polarisés) non pointés, les équations de résurgence de niveau $p$ s'écrivent :

$$(IV.3.11) \qquad \Delta_{\omega_0} \mathcal{V}_{\sigma!}^{\omega!}(z_p \parallel p) = \sum e^{\dot{\omega}_0 z_p - \parallel \omega!^1 (z_p^{1/p}) \parallel} V_{\sigma!^1}^{\omega!^1}(\omega_0 \parallel p) \mathcal{V}_{\sigma!^2}^{\omega!^2}(z_p \parallel p)$$

$$(IV.3.12) \qquad \Delta_{\omega_0} \mathcal{V}_{\sigma!}^{\omega!}(z_p \parallel p : \theta!) = \sum e^{\dot{\omega}_0 z_p - \parallel \omega!^1 (z_p^{1/p}) \parallel} V_{\sigma!^1}^{\omega!^1}(\omega_0 \parallel p : \theta!) \mathcal{V}_{\sigma!^2}^{\omega!^2}(z_p \parallel p : \theta!)$$

où les sommes $\sum$ des seconds membres s'étendent aux factorisations :

$$(IV.3.13) \qquad \begin{pmatrix} \omega!^1 \\ \sigma!^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega!^2 \\ \sigma!^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega! \\ \sigma! \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \parallel \omega!^1 \parallel_{\tilde{p}} \dot{\omega}_0.$$

Pour ces factorisations, le polynôme :

$$(IV.3.14) \quad \dot{\omega}_0 z^p - \parallel \omega!^1(z) \parallel = \dot{\omega}_0 \cdot z^p - \varpi_1(z) - \varpi_2(z) \cdots - \varpi_i(z) \quad (\omega!^1 = (\varpi_1, \cdots, \varpi_i))$$

est toujours de degré $< p$ en $z$. Par conséquent le facteur $\exp\left(\dot{\omega}_0 z_p - \parallel \omega!^1(z_p^{1/p}) \parallel\right)$ est *subexponentiel* en $z_p$ et représente donc une *rétrofonction*.

Les équations (IV.3.11) et (IV.3.12), interprêtées dans le modèle convolutif, montrent que les mineurs $\mathcal{V}!_{\sigma!}^{\omega!}(\zeta_p \parallel p)$ et $\mathcal{V}!_{\sigma!}^{\omega!}(\zeta_p \parallel p : \theta!)$ ont en général un comportement extrêmement explosif en leurs singularités, sans que cela empêche aucunement leur prolongeabilité analytique “partout sans coupure”. Ces mêmes équations montrent aussi que les mineurs de niveau $p$ ont toutes leurs singularités au dessus des points $\omega_0 \in \mathbf{C}_\infty$ pour lesquels

$$\dot{\omega}_0 \tilde{p}\ \omega!_1 + \omega!_2 + \cdots \omega!_i \tag{IV.3.14}$$

pour un certain $i \leq r$.

## (IV) Passage de l'isotrope au polarisé et passage inverse

PROPOSITION IV.4.1. *Polarisation et dépolarisation*
Pour tout niveau $p$ et toute multipolarisation $\theta! = (\theta_1^{\epsilon_1}, \cdots, \theta_{p-1}^{\epsilon_{p-1}})$ de niveau $< p$, il existe un moule *scalaire symétral* $W^\bullet(p :: \theta!)$ qui permet le passage de l'isotrope au polarisé, et réciproquement :

$$\underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\bullet}(z_p \parallel p : \theta!) = W^\bullet(p :: \theta!) \times \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\bullet}(z_p \parallel p) \times W^{\bullet -1}(p :: \theta!) \tag{IV.4.1}$$

$$\underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\bullet}(z_p \parallel p) = W^{\bullet -1}(p :: \theta!) \times \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\bullet}(z_p \parallel p :: \theta!) \times W^\bullet(p :: \theta!) \tag{IV.4.2}$$

$$V^\bullet(\omega_0 \parallel p : \theta!) = W^\bullet(p :: \theta!) \times V^\bullet(\omega_0 \parallel p) \times W^{\bullet -1}(p :: \theta!) \tag{IV.4.3}$$

$$V^\bullet(\omega_0 \parallel p) = W^{\bullet -1}(p :: \theta!) \times V^\bullet(\omega_0 \parallel p : \theta!) \times W^\bullet(p :: \theta!). \tag{IV.4.4}$$

Ici, le signe $\times$ denote la multiplication des *moules* (cf. [ ]) ; les points supérieurs désignent des multiindices :

$$\begin{pmatrix} \varpi! \\ \sigma! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi_1, \cdots, \varpi_r \\ \sigma_1, \cdots, \sigma_r \end{pmatrix} \qquad (\varpi_i \in \mathcal{A}\ ;\ \sigma_i \in \mathbb{R}))) \tag{IV.4.5}$$

et les points inférieurs signalent simplement que l'on prend les monômes de résurgence pointés, c'est-à-dire flanqués du coefficient exp $\parallel \varpi!(z_p^{1/p}) \parallel$ . Enfin, $W^{\bullet -1}(p :: \theta!)$ désigne l'inverse multiplicatif du moule $W^\bullet(p :: \theta!)$ :

$$W^{\bullet -1}(p :: \theta!) \times W^{\bullet -1}(p :: \theta!) = 1^\bullet \qquad (1^\bullet = \text{moule unité})$$

et comme $W^\bullet(p :: \theta!)$ est symétral, son inverse $W^{\bullet -1}(p :: \theta!)$ est lui aussi symétral et s'en déduit par l'*involution des moules :*

$$W^{\varpi_1, \cdots, \varpi_r}_{\sigma_1, \cdots, \sigma_r}(p :: \theta!) \ \rightarrow\ (-1)^r W^{\varpi_r, \cdots, \varpi_1}_{\sigma_r, \cdots, \sigma_1}(p :: \theta!). \tag{IV.4.7}$$

REMARQUE. Bien qu'il ne soit pas question de les expliciter dans ce rapide survol, il existe une méthode et même une formule assez simple pour le calcul du moule polarisant $W^\bullet(p :: \theta!)$ et donc de son inverse, le moule dépolarisant $W^{\bullet -1}(p :: \theta!)$. Cette formule ne fait intervenir que les deux ingrédients suivants :

(i) les moules alternals isotropes $V^\bullet(\omega_0 \parallel q)$ relatifs aux niveaux $q = 1, 2, \cdots, p-1$.

(ii) un moule élémentaire, de type symétrel (et non symétral ; cf. [ ]), dit moule de Bernouilli, et explicité par la formule :

$$(IV.4.8) \qquad \mathcal{B}^{\sigma_1,\cdots,\sigma_r} = \left(e^{2\pi i\sigma_1} - 1\right)^{-1} \left(e^{2\pi i(\sigma_1+\sigma_2)} - 1\right)^{-1} \cdots \left(e^{2\pi i(\sigma_1+\cdots+\sigma_r)} - 1\right)^{-1}.$$

En somme, les moules polarisés $\mathcal{V}^\bullet(z_p \parallel p : \theta!)$ et $V^\bullet(\omega_0 \parallel p : \theta!)$, qui sont les *briques élémentaires* en quoi on peut décomposer toutes les fonctions résurgentes accélérables usuelles ainsi que leurs invariants (voir chapitres V et VI), ces moules polarisés, disons-nous, se révèlent très explicitement calculables à partir des moules isotropes $\mathcal{V}^\bullet(z_p \parallel p)$ et $V^\bullet(\omega_0 \parallel p)$, lesquels sont très faciles à construire à partir des règles de dérivation étrangère et de la récurrence (IV.1.7), laquelle se réduit à de pures manipulations sur séries formelles (par un jeu de prosolutions et de rétrosolutions).

# V. RESOLUTION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS A PLUSIEURS NIVEAUX

**(V.1) Système-type à plusieurs niveaux** Considérons le système différentiel normal suivant :

$$\frac{t^{1+p_i}}{p_i}\frac{d}{dt}y_i + \lambda_i y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu) \tag{V.1.1}$$

avec une suite de *niveaux* entiers $p_i$ rangés par ordre croissant :

$$1 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \cdots \leq p_\nu \tag{V.1.2}$$

et prenant les valeurs distinctes :

$$1 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \cdots < q_{\nu_*} \qquad (1 \leq \nu_* \leq \nu) \tag{V.1.3}$$

et avec des *multiplicateurs* $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ qui, à un niveau donné, ne présentent ni résonance( )ni quasirésonance( ).

Le système (V.1.1) est dit système normal "type" à plusieurs niveaux. Il admet pour solution évidente :

$$y_i(t) = u_i \exp(\lambda_i t^{-p_i}) \qquad (i = 1, \cdots, \nu; u_i = \text{cste}). \tag{V.1.4}$$

Considérons maintenant le système différentiel local le plus général :

$$\begin{cases} \dfrac{t^{1+p_i}}{p_i}\dfrac{d}{dt}x_i + \lambda_i x_i = b_i(t, x_1, \cdots, x_\nu) \quad (i = 1, \cdots, \nu) \\ \text{avec} \quad b_i(0, \cdots, 0) = 0 \ \text{ et } \ b_i(t, x_1, \cdots, x_\nu) \in \mathbb{C}\{t, x_1, x_\nu\} \end{cases} \tag{V.1.5}$$

qui soit **formellement** conjugué au système normal (V.1.1) par un changement d'inconnues (formel et formellement inversible) du type :

$$\begin{cases} x_i = h_i(t, y_1, \cdots, y_\nu) \in \mathbb{C}[[t, {}_1, \cdots, {}_\nu]] \\ \text{avec } h_i(0, \cdots, 0) = 0. \end{cases} \tag{V.1.6}$$

Nous fixerons notre attention sur le cas type (V.1.5), *parce qu'il est parfaitement représentatif des systèmes*( ). Nous allons, grâce aux fonctions résurgentes et à la théorie de l'accélération, non seulement étudier les *solutions* de ces systèmes mais aussi obtenir, constructivement et explicitement, leur *classification analytique* (au moyen d'invariants scalaires).

**(V.2) Résurgence de l'intégrale formelle**
Observons tout d'abord, en portant (V.1.4) dans le changement d'inconnues (V.1.6), que le système (V.1.5) admet une *intégrale formelle* :

$$\begin{cases} x(t, u) = (x_1(t, u), \cdots, x_\nu(t, u)) \\ x_i(t, u) = \displaystyle\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^\nu} u^{\mathbf{n}} E^{\mathbf{n}}(t) \varphi_i^{\mathbf{n}}(t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu) \end{cases} \tag{V.2.1}$$

avec

$$(V.2.2) \qquad u^{\mathbf{n}} = u_1^{n_1} \cdots u_\nu^{n_\nu}$$

$$(V.2.3) \qquad E^{\mathbf{n}}(t) = E^{n_1,\cdots,n_\nu}(t) = \exp\left(\textstyle\sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_i t^{-p_i}\right)$$

$$(V.2.4) \qquad \varphi_i^{\mathbf{n}}(t) = \varphi_i^{n_1,\cdots,n_\nu}(t) \in \mathbf{C}[[t]]$$

et que cette intégrale formelle est unique modulo une dilatation des paramètres $u$ :

$$(V.2.5) \qquad u_i \to c_i u_i \qquad (c_i = \text{cste} \ ; \ i = 1, \cdots, \nu).$$

PROPOSITION V.2.1. *Résurgence de l'intégrale formelle.*
L'intégrale formelle $x(t,u)$ a pour composantes $\varphi_i^{\mathbf{n}}(t)$ des séries généralement divergentes de $t$, mais le changement de variable :

$$(V.2.6) \qquad t \to z_1 = t^{-q_1} \qquad (\text{avec } q_1 = p_1 = \inf_i p_i)$$

livre une intégrale formelle :

$$(V.2.7) \qquad \begin{cases} x(z_1, u \parallel q) = (x_1(z_1, u \parallel q_1), \cdots, x_\nu(z_1, u \parallel q_1)) \\ x_i(z_1, u \parallel q_1) = \displaystyle\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\nu} u^{\mathbf{n}} \cdot E^{\mathbf{n}}(z_1 \parallel q_1) \cdot \varphi_i^{\mathbf{n}}(z_1 \parallel q_1) \\ \text{avec } E^{\mathbf{n}}(z_1 \parallel q_1) = E^{\mathbf{n}}(z_1^{-1/q}) \ \text{ et } \ \varphi_i^{\mathbf{n}}(z_1 \parallel q_1) = \varphi_i^{\mathbf{n}}(z_1^{-1/q}) \end{cases}$$

qui est dite *intégrale formelle de plus bas niveau* et qui est *résurgente* en $z_1$ en ce sens que chacune de ses composantes $\varphi_i^{\mathbf{n}}(z_1 \parallel q_1)$ l'est. Plus précisément, si $\varphi(z_1 \parallel q_1)$ désigne l'une quelconque de ces composantes, de série formelle :

$$(V.2.8) \qquad \varphi(z_1 \parallel q_1) = \sum c_n \cdot z_1^{-n/q_1}$$

sa transformée de Borel $\overset{\triangledown}{\varphi}(\zeta_1 \parallel q_1)$ appartient à $\mathcal{R}$ et est $\theta$ intégrable pour tout $\theta$, et donc entièrement déterminée par son mineur :

$$(V.2.8) \qquad \hat{\varphi}(\zeta_1 \parallel q_1) = \sum c_n \zeta_1^{n/q_1 - 1} / \Gamma(n/q_1)$$

lequel converge pour $\zeta_1$ petit et se prolonge "partout sans coupures".

## (V.3) Accéléro-sommabilité de l'intégrale formelle.

PROPOSITION V.3.1. *L'intégrale formelle est indéfiniment accélérable.*
L'intégrale formelle de plus bas niveau $x(z_1, u \parallel q_1)$ est indéfiniment (et uniformément) accélérable en ce sens que chacune de ses composantes $\varphi_i^{\mathbf{n}}(z_1 \parallel q_1)$ l'est. Plus précisément,

si $\varphi(z_1 \parallel q_1)$ désigne l'une quelconque de ces composantes et si l'on fixe un niveau $q_i > q_1$ et une polarisation $\theta$ de niveau $< q_i$ :

$$(V.3.1) \qquad \theta! = (\theta_1^{\epsilon_1}, \theta_2^{\epsilon_2}, \cdots, \theta_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}) \ (\theta_j \in \mathbb{R} \ ; \ \epsilon_j = \pm \ ; \text{ polarisation de niveau } q_j)$$

vérifiant la relation de compatibilité :

$$(V.3.2) \qquad \left| \frac{\theta_j}{q_j} - \frac{\theta_{j+1}}{q_{j+1}} \right| < \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{q_j} - \frac{1}{q_{j+1}} \right) \qquad (j = 1, 2, \cdots, i-2)$$

on peut appliquer successivement à $\varphi(z_1 \parallel q_1)$ les accélérateurs :

$$(V.3.3) \qquad C_{\alpha_j : \theta_j^{\epsilon_j}} \quad \text{avec} \quad \alpha_j = q_j / q_{j+1}$$

pour $j = 1$, puis 2, puis 3, etc..., et cela livre une fonction résurgente :

(V.4.3)

$$\begin{cases} \varphi(z_i \parallel q_i : \theta) = \left( C_{\alpha_{i-1} : \theta_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}} \right) \cdots \left( C_{\alpha_1 : \theta_1^{\epsilon_1}} \right) \varphi\,(z_1 \parallel q_1) \quad \text{(modèle formel)} \\ \overset{\triangledown}{\varphi}\,(\zeta_i \parallel q_i : \theta!) = (C_{\alpha_{i-1}} : \theta_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}) \cdots \left( C_{\alpha_1 : \theta_1^{\epsilon_1}} \right) \overset{\triangledown}{\varphi}\,(\zeta_1 \parallel q_1) \quad \text{(modèle convolutif)} \\ z_i = (z_1)^{q_i} \ ; \ \zeta_i \text{ variable conjuguée de } z_i \end{cases}$$

dont le mineur $\hat{\varphi}(\zeta_i \parallel q_i : \theta!)$ est défini et prolongeable "sans coupure" au-dessus de l'étoile $^{\alpha_{i-1}:\theta_{i-1}}$ mais aussi, grâce à l'*uniforme* accélérabilité, sur une étoile $(q_i : \theta!)$ plus vaste obtenue par balayage par rapport à toutes les multipolarisations $\hat{\theta}!$ *équivalentes* à $\theta!$ :

$$(V.3.5) \qquad (q_i : \theta!) = \bigcup_{\hat{\theta}} {}^{\alpha_{i-1}:\hat{\theta}_{i-1}} \quad (\hat{\theta}! \text{ équivalente à } \theta!).$$

En revanche, sur toute la longueur des deux axes bordant cette étoile de régularité( ), le mineur $\hat{\varphi}(\zeta_i \parallel q_i : \theta!)$ présente généralement des *coupures*, dites *coupures stellaires* (cf. [ ]). L'intégrale correspondante :

$$(V.3.6) \qquad x\,(z_i \parallel q_i : \theta) = \sum u^{\mathbf{n}} \cdot E^{\mathbf{n}}(z_i \parallel q_i) \varphi^{\mathbf{n}}(z_i \parallel q_i : \theta!)$$

est dite *intégrale $\theta!$-polarisée de niveau $q_i$*. Les blocs élémentaires $E^{\mathbf{n}}(z_i \parallel q_i)$ doivent bien entendu s'interprêter comme produits de deux facteurs $E^{\mathbf{n}'}$ et $E^{\mathbf{n}''}$ :

$$(V.3.7) \qquad \begin{cases} E^{\mathbf{n}}(z_i \parallel q_i) = E^{\mathbf{n}'}(z_i \parallel q_i) E^{\mathbf{n}''}(z_i \parallel q_i) \\ E^{\mathbf{n}'}(z_i \parallel q_i) = \exp \left( \sum_{p_j \geq q_i} n_j \lambda_j (z_i)^{p_j/q_i} \right) \\ E^{\mathbf{n}''}(z_i \parallel q_i) = \exp \left( \sum_{p_j < q_i} n_j \lambda_j (z_i)^{p_j/q_i} \right) \end{cases}$$

dont le premier, qui est au moins exponentiel en $z_i$, doit se lire comme un pur symbole, tandis que le second, qui est strictement subexponentiel en $z_i$, doit être considéré comme une rétrofonction résurgente.

PROPOSITION V.3.2. *L'intégrale formelle est accéléro-sommable.*
L'intégrale formelle (i.e. ses composantes) n'est pas seulement (uniformément) *indéfiniment accélérable*, mais aussi (uniformément *accéléro-sommable* (i.e. les accélérées de plus haut niveau sont uniformément sommables) si bien qu'à toute multipolarisation $\theta!$ totale, c'est-à-dire affectant chacun des $\nu_*$ niveaux critiques $q_j$ :

$$(V.3.8) \qquad \theta! = \left(\theta_1^{\epsilon_1}, \cdots, \theta_{\nu_*}^{\epsilon_{\nu_*}}\right) \qquad \left(\begin{matrix}\theta_j \in \mathbb{R},\ \epsilon_j = \pm,\ \theta_j^{\epsilon_j} \\ \text{polarisation de niveau } q_j\end{matrix}\right)$$

et vérifiant les conditions de compabibilité (V.3.2), se trouve associé un *modèle sommé :*

$$(V.3.9) \qquad x\left(z_{\nu_*}, u \parallel q_{\nu_*}\right) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N}^\nu} u^{\mathbf{n}} E^{\mathbf{n}}\left(z_{\nu_*}, u \parallel q_{\nu_*}\right) \varphi^{\mathbf{n}}\left(z_{\nu_*} \parallel q_{\nu_*}\right)$$

qui est solution effective du système (V.1.5).

Précisons le sens de cet énoncé. Il signifie *d'abord* que la solution particulière correspondant à $u_1 = u_2 = \cdots u_\nu = 0$, qui s'écrit :

$$(V.3.10) \qquad x_j = x_j\left(z_{\nu_*}, 0 \parallel q_{\nu_*} : \theta!\right) = \varphi_j^{0,\cdots,0}\left(z_{\nu_*} \parallel q_{\nu_*} : \theta!\right) \quad (j = 1, \cdots, \nu)$$

et qui est régulière à l'infini dans tout un secteur du plan des $z_{\nu_*}$ d'ouverture au moins égale à

$$(V.3.11) \qquad \pi \cdot \left(\frac{q_{\nu_*} - q_{\nu_*-1}}{q_{\nu_*-1}} + \frac{1}{2}\right)$$

est toujours une solution effective du système (V.1.5). Prenant toutes les multipolarisations $\theta!$ possibles, on obtient des solutions canoniques (V.3.10) sur des secteurs qui, ensemble, forment un recouvrement du voisinage de l'infini. L'énoncé signifie *ensuite* que les solutions générales obtenues en gardant certains des $u_i$ (ou tous les $u_i$) fournissent également des solutions effectives du système, pourvu que les blocs exponentiels $E^{\mathbf{n}}\left(z_{\nu_*} \parallel q_{\nu_*}\right)$ correspondants soient des infiniment petits dans le secteur de régularité induit par la multipolarisation $\theta!$. Pour une discussion détaillée, voir [ ].

## (V.4) Le grand triangle accélération-afflexion-ascension

Fixons comme précédemment une composante $\varphi(z_1 \parallel q_1)$ de l'intégrale formelle (isotrope) de plus bas niveau et considérons ses accélérées $\varphi\left(z_i \parallel q_i : \theta!\right)$ de niveaux $q_i > q_1$. Fixons aussi la polarisation $\theta!$, ce qui permet d'adopter les notations simplifiées :

$$(V.4.1) \qquad \varphi_1(z_1) = \varphi(z_1 \parallel q_1)$$

$$(V.4.2) \qquad \varphi_i(z_i) = \varphi(z_i \parallel q_i : \theta!) \qquad (i = 2, \cdots, \nu_*).$$

Comme on a vu, la fonction de plus bas niveau, dans le modèle convolutif, est $\theta$-intégrable pour tout $\theta$ et entièrement déterminée par son *mineur :*

$$(V.4.3) \qquad \hat{\varphi}_1(\zeta_1) = \sum c_n \zeta_1^{n/q_1 - 1} / \Gamma(n/q_1)$$

et les *mineurs* $\hat{\varphi}_i(\zeta_i)$ des accélérées peuvent se calculer à partir de $\hat{\varphi}_1(\zeta_1)$, par application répétée de la formule (III.4.11) d'accélération des mineurs. Mais ces formules ont pour noyaux intégraux les accélératrices $C_\alpha(X)$, qui ne sont pas entièrement élémentaires ; aussi est-il avantageux, du point du vue du calcul numérique, de passer par les *algèbres affléchies* et les seules opérations d'ascension, dont le noyau intégral, qui est l'exponentielle, est indiscutablement élémentaire.

Plus précisément, posons :

(V.4.4)

$$\begin{cases} \alpha_i = q_i/q_{i+1} & (1 \leq i \leq \nu_*) \\ \begin{cases} \alpha^{i,j} = \left(\alpha_0^{i,j}, \alpha_1^{i,j}, \alpha_3^{i,j}, \cdots, \alpha_j^{i,j}\right) \\ \quad = \left(1 - \dfrac{q_i}{q_{i+1}}, \dfrac{q_i}{q_{i+1}} - \dfrac{q_i}{q_{i+2}}, \ldots, \dfrac{q_i}{q_{i+j-1}} - \dfrac{q_i}{q_{i+j}}, \dfrac{q_i}{q_{i+j}}\right) \end{cases} & (1 \leq i, j \leq \nu_*; i + j \leq \nu_*) \end{cases}$$

et introduisons les algèbres affléchées générales :

$$(V.4.5) \qquad \mathcal{R}_{\alpha!^{i,j}} = \mathcal{R}_{1-\frac{q_i}{q_{i+1}}, \ldots, \frac{q_i}{q_{i+j}}}$$

définies comme à la section § III.5. Toujours d'après § III.5, les scensions d'indice $\alpha_i$ échangent $\mathcal{R}_{\alpha!^{i+1,j}}$ et $\mathcal{R}_{\alpha!^{i,j+1}}$. D'où les diagrammes suivants, où pour simplifier on a pris le nombre $\nu_*$ de niveaux critiques égal à 4 :

Pour la raison qu'on a dite, on peut se limiter aux *mineurs* $\hat{\varphi}_i$ et $\hat{\varphi}_{ij}$. De plus, pour calculer les accélérées $\hat{\varphi}_i$ (ce qui est notre but) uniquement par ascensions successives (ce qui est commode) il faut partir des afflêchies de plus bas niveau :

$$\hat{\varphi}_{11}, \hat{\varphi}_{12}, \hat{\varphi}_{13}, \hat{\varphi}_{14}, \cdots \tag{V.4.6}$$

Or celles-ci s'obtiennent directement par la formule :

$$\hat{\varphi}_{1j}(\zeta_{1j}) = \sum c_n \frac{(\zeta_{1j})^{n/q_1 - 1}}{\Gamma\left(\frac{n}{q_1}\alpha_0^{1,j}\right)\Gamma\left(\frac{n}{q_1}\alpha_1^{1,j}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n}{q_1}\alpha_j^{1,j}\right)} \tag{V.4.7}$$

immédiatement déduite de (V.2.8) par une modification purement formelle des dénominateurs, sans aucunement passer par les opérateurs d'afflexion et leurs noyaux relativement compliqués.

**(V.5) Lien avec les monômes de résurgence.**

Il existe une formule, d'ailleurs assez simple (cf. [ ]), permettant d'exprimer les intégrales polarisées de niveau $q_i$ comme séries infinies de monômes de résurgence polarisés de niveau $q_i$, eux-mêmes obtensibles (sans accélération explicite) à partir des monômes de résurgence isotropes de niveau $q_i$. Mais relevons ici deux différences importantes, qui montrent combien les monômes de résurgence sont, parmi les fonctions accélérables, élémentaires :

(i) sauf dans des cas très particuliers (comme pour les systèmes linéaires ou affines) il n'existe en général pas, aux niveaux supérieurs, d'*intégrale isotrope* du système (V.1.5) qui fasse pendant aux *monômes isotropes* (voir toutefois le § VI.4 sur l'existence d'invariants isotropes pour le système (V.1.5)).

(ii) les intégrales polarisées des niveaux $q_i$ supérieurs (ou plus exactement leurs composantes $\varphi^{\mathbf{n}}$) présentent en général (dans le modèle convolutif) des *coupures stellaires* à la limite de leur secteur de définition, alors que les monômes de résurgence n'en présentent jamais. Il s'ensuit que le développement des intégrales polarisées en séries de monômes polarisés ne converge qu'à l'intérieur de l'étoile de définition de ces intégrales polarisées.

# VI. CLASSIFICATION ANALYTIQUE DES SYSTEMES DIFFERENTIELS A PLUSIEURS NIVEAUX

## (VI.1) L'équation du pont au plus bas niveau

DEFINITION VI.1.1. *Réseau de résurgence de niveau p*
Pour tout niveau critique $p$ du système (V.1.5), considérons le réseau $\Omega(p)$ engendré par les multiplicateurs $\lambda_i$ de niveau $p$ :

$$(VI.1.1) \qquad \Omega(p) = \Big\{\omega \; ; \; \omega \in \mathbb{C} \; ; \; \omega = \sum_{p_j=p} n_j\lambda_j$$

$$\text{avec des } n_j \text{ entiers et tous } \geq 0 \text{ sauf au plus un qui peut valoir } -1\Big\}.$$

$\Omega(p)$ est dit *réseau de résurgence de niveau p*. On note $\Omega_\infty(p)$ l'ensemble des points de $\mathbb{C}_\infty$ situés au-dessus de $\Omega(p)$.

PROPOSITION VI.1.2. *Equation du pont de plus bas niveau*
Les seules dérivations étrangères susceptibles d'agir (sans l'annuler) sur l'*intégrale formelle de plus bas niveau* (le niveau $q_1$) du système (V.1.5) sont les $\Delta_\omega$ avec $\omega$ dans $\Omega_\infty(q_1)$ et les équations de résurgence correspondantes s'écrivent dans le modèle formel :

$$(VI.1.2) \qquad \dot{\Delta}_\omega \; x(z_1, u \parallel q_1) = \mathcal{A}_{\omega\|q_1} x(z_1, u \parallel q_1) \qquad (\omega \in \Omega_\infty(q_1))$$

où $\dot{\Delta}_\omega$ désigne la dérivation étrangère pointée en $z_1$ (cf. § I.3) et où les $\mathcal{A}_{\omega\|q_1}$ désignent des opérateurs différentiels en $u$ de la forme :

$$(VI.1.3) \qquad \mathcal{A}_{\omega\|q_1} = u^{\mathbf{n}(\omega)} \sum_{j=1}^{\nu} A^j_{\omega\|q_1} u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \qquad (A^j_{\omega\|q_1} \in \mathbb{C})$$

avec un facteur $u^{\mathbf{n}(\omega)}$ ne faisant intervenir que les $u_i$ de niveau $q_1$ :

$$(VI.1.4) \qquad u^{\mathbf{n}(\omega)} = \prod_{p_j=q_1} u_j^{n_j(\omega)} \quad \text{avec} \quad \omega = \sum_{p_j=q_1} n_j(\omega)\lambda_j.$$

L'équation (V.1.3) est un cas particulier de l'EQUATION DU PONT( ), ainsi nommée parce qu'elle jette un pont entre les deux calculs différentiels : l'ordinaire et l'étranger. C'est évidemment une équation très compacte, qui doit s'interpréter composante par composante :

$$(VI.1.5) \qquad \Delta_\omega \cdot \varphi_j^{\mathbf{n}}(z_1 \parallel q_1) = \langle \mathbf{n}', A_{\omega\|q_1} \rangle \cdot \varphi_j^{\mathbf{n}'}(z_1 \parallel q_1) \quad (1 \leq j \leq \nu, \; \mathbf{n} \in \mathbb{N}^\nu)$$

où $\mathbf{n}' = (n'_1, \cdots, n'_\nu)$ désigne l'unique multiindice de $\mathbb{N}^\nu$ tel que :

$$(VI.1.6) \qquad \mathbf{n} = \mathbf{n}(\omega) + \mathbf{n}'$$

et où les scalaires $\langle \cdots \rangle$ sont donnés par la formule :

$$(VI.1.7) \qquad \langle \mathbf{n}', A_{\omega \| q_1} \rangle = \sum_{j=1}^{\nu} n'_j A^j_{\omega \| q_1}.$$

Les équations de résurgence (V.1.5) contiennent toute l'information relative aux singularités des mineurs $\varphi_j^{\mathbf{n}}(\zeta_1 \| q_1)$ et à leurs surfaces de Riemann.

## (VI.2) L'équation du pont aux niveaux supérieurs

PROPOSITION VI.2.1. *Equation du pont aux niveaux supérieurs*
Les seules dérivations étrangères susceptibles d'agir (sans l'annuler) sur une intégrale polarisée de niveau $q_i > q_1$ du système (V.1.5) sont les $\Delta_\omega$ d'indice $\omega$ situé à la fois dans le réseau $\Omega_\infty(q_i)$ de niveau $q_i$ et dans l'étoile $(q_i : \theta!)$ où est définie l'intégrale polarisée en question. On a alors l'équation du pont :

$$(VI.2.1) \qquad \dot{\Delta}_\omega \, x(z_i, u \| q_i : \theta!) = \mathcal{A}_{\omega \| q_i : \theta!} x(z_i, u \| q_i : \theta!))$$

où $\dot{\Delta}$ désigne la dérivation étrangère pointée (cf. § I.3) en la variable $z_i$ et où $\mathcal{A}_{\omega \| q_i : \theta!}$ désigne un opérateur différentiel en $u$ de la forme :

$$(VI.2.2) \qquad \mathcal{A}_{\omega \| q_i : \theta!} = u^{\mathbf{n}(\omega)} \left\{ \sum_{p_j = q_i} A^j_{\omega \| q_i : \theta!}(u) u_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{p_j < q_i} A_{\omega \| q_i : \theta!}(u) \frac{\partial}{\partial u_j} \right\}$$

avec un facteur $u^{\mathbf{n}(\omega)}$ ne faisant intervenir que les $u_j$ de niveau $q_i$ :

$$(VI.2.3) \qquad u^{\mathbf{n}(\omega)} = \prod_{p_j = q_i} u_j^{n_j(\omega)} \quad \text{avec} \quad \omega = \begin{array}{c} p_j = q_i \\ n_j(\omega)\lambda_j \end{array}$$

et avec des composantes $A^j_{\omega \| q_i : \theta!}(u)$ qui sont des séries formelles en les $u_k$ de niveau $p_k < q_i$

$$(VI.2.4) \qquad A^1_{\omega \| q_i : \theta!}(u), \cdots, A^\nu_{\omega \| q_i : \theta!}(u) \in \mathbf{C}[[u_k \ ; \ \text{avec } p_k < q_i]].$$

D'une façon plus explicite, l'opérateur $\mathcal{A}_{\omega \| q_i : \theta!}$ peut s'écrire :

$$(VI.2.5) \qquad \mathcal{A}_{\omega \| q_i : \theta!} = u^{\mathbf{n}(\omega)} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{\mathbf{n}''} u^{\mathbf{n}''} A^{j, \mathbf{n}''}_{\omega \| q_i : \theta!} u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \quad \left( A^{j, \mathbf{n}''}_{\omega \| q_i : \theta!} \in \mathbf{C} \right)$$

avec des coefficients $A^{j, \mathbf{n}''}_{\omega \| q_i : \theta!}$ *scalaires* et des monômes $u^{\mathbf{n}''}$ ne faisant intervenir que les $u_k$ de niveaux $p_k < q_i$.

Ici encore, l'équation du pont (VI.2.1) doit s'interpréter composante par composante. Elle livre alors :

$$(VI.2.6) \qquad \Delta_\omega \varphi_j^{\mathbf{n}}(z_i \parallel q_i : \theta) = \sum_{\mathbf{n}(\omega)+\mathbf{n}'+\mathbf{n}''=\mathbf{n}} \left\langle \mathbf{n}', A^{\mathbf{n}''}_{\omega\|q_i:\theta!} \right\rangle \cdot \varphi_j^{\mathbf{n}'}(z_i \parallel q_i : \theta!)\, E^{\mathbf{n}''}_{(z_i\|q_i)}$$

- avec une somme $\sum$ qui est *finie*,
- avec des scalaires $\langle\cdot,\cdot\rangle$ donnés par la formule :

$$(VI.2.7) \qquad \left\langle \mathbf{n}', A^{\mathbf{n}''}_{\omega\|q_i:\theta!} \right\rangle = \exp\left( \sum_{p_k<q_i} n_k'' \cdot (z_i)^{p_k/q_i} \right)$$

qui sont strictement subexponentiels en $z_i$ et doivent s'interpréter comme des *rétrofacteurs*.

Résumons les principales différences entre les intégrales $x(z_i, u \parallel q_i : \theta!)$ de niveaux supérieurs et l'intégrale $x(z_1, u \parallel q_1)$ de plus bas niveau :

(i) celle-ci appartient à $\mathcal{R}$ ; celles-là appartiennent à $\mathcal{R}(\ (q_i : \theta!))$

(ii) celle-ci est isotrope ; celles-là dépendent crucialement d'une multipolarisation $\theta!$.

(iii) celle-ci a des composantes $\overset{\triangledown}{\varphi}{}_j^{\mathbf{n}}(\zeta_i \parallel q_i : \theta!)$ à singularités *dures*, de type fortement explosif, du fait de la présence du rétrofacteur $E^{\mathbf{n}''}$ dans l'équation de résurgence (VI.2.6).

(iv) celle-ci (resp. celles-là) présente (dans le modèle convolutif) des singularités descriptibles chacune au moyen d'un opérateur $\mathcal{A}_{\omega\|q_1}$ (resp. $\mathcal{A}_{\omega\|q_i:\theta!}$) comportant un nombre *fini* (resp. *infini*) de paramètres scalaires.

Rappelons enfin une dernière différence, qui cette fois oppose les intégrales de *plus haut niveau* $q_{\nu_*}$ (ce sont les "plus polarisées"), qui sont toujours *sommables*, et celles de niveaux inférieurs, qui *en général ne le sont pas*. (Une intégrale de niveau intermédiaire est sommable si et seulement si tous les invariants des niveaux supérieurs sont nuls.)

Là s'arrêtent les différences entre les intégrales de différents niveaux : tout le reste n'est que similitudes.

## (VI.3) Systèmes complets et libres d'invariants holomorphes

PROPOSITION VI.3.1. *Invariance des* $\mathcal{A}_\omega$
Considérés comme définis modulo une dilatation $u_i \to u_i c_i$, les opérateurs $\mathcal{A}_\omega$ intervenant dans les différentes équations du pont sont des invariants analytiques du système (V.1.5), en ce sens qu'ils ne changent pas si on remplace (V.1.5) par un système qui lui est analytiquement conjugué. De plus les $\mathcal{A}_\omega$ sont des *invariants holomorphes*, en ce sens qu'ils sont des fonctions *entières* du système (V.1.5), c'est-à-dire de l'infinité des coefficients des fonctions $b_i(t, x_1, \cdots, x_\nu)$.

PROPOSITION VI.3.2. *Systèmes complets d'invariants analytiques*

L'ensemble de tous les $\mathcal{A}_{\omega\|q_1}$ de plus bas niveau et de tous les $\mathcal{A}_{\omega\|q_i:\theta!}$ de niveaux supérieurs constitue un *système complet* d'invariants analytiques du système différentiel (V.1.5) : deux tels systèmes différentiels sont analytiquement conjugués si et seulement si ils ont même $\mathcal{A}_{\omega\|q_1}$ et mêmes $\mathcal{A}_{\omega\|q_i:\theta!}$.

Notons bien que les invariants des différents niveaux sont parfaitement indépendants : il faut mettre tous les niveaux à contribution pour obtenir un système complet d'invariants.

PROPOSITION VI.3.3. *Systèmes libres d'invariants analytiques*
Soit $\Omega_{q_i}(q_i)$ une partie de $\mathbb{C}_\infty$ qui, pour tout $\dot{\omega} \in \Omega(q_i) \subset \mathbb{C}$, contienne exactement $q_i$ points distincts $\omega$ situés au-dessus de $\dot{\omega}$. Soit ensuite, pour tout $\omega \in \Omega_{q_i}(q_i)$, une multipolarisation :

$$\theta! = \theta!(\omega) = (\theta_1^{\epsilon_1}(\omega), \cdots, \theta_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}(\omega)) \tag{VI.3.1}$$

qui soit compatible avec $\omega$, c'est-à-dire telle que :

$$\omega \in \quad (q_i : \theta!). \tag{VI.3.2}$$

Alors, la famille des invariants :

$$\{\mathcal{A}_{\omega\|q_i:\theta!(\omega)} \ ; \ 1 \le i \le \nu_* \ ; \ \omega \in \Omega_{q_i}(q_i)\} \tag{VI.3.3}$$

constitue un système *complet* et *libre* d'invariants analytiques du système différentiel (V.1.5).

Ici "libre" veut dire qu'il n'y a pas un seul invariant superflu. Pour une définition précise, voir [...].

REMARQUE 1. En cas de quasirésonance des $\lambda_i$ de même niveau, il apparaît des invariants analytiques dits *métaholomorphes* (qui ne sont ni holomorphes ni même constructibles) mais les $\mathcal{A}_\omega$ n'en constituent pas moins, même dans ce cas, un système complet d'invariants *holomorphes* du système différentiel (V.1.5). Enfin, en cas de *résonance* de $\lambda_i$ de même niveau, l'intégrale formelle change complètement d'aspect, mais notre méthode continue de s'appliquer, en utilisant des accélérations plus générales (permettant de passer non plus d'un niveau à un autre, mais d'une génération à une autre, voir [...]).

REMARQUE 2. *Calcul des invariants*
L'équation du pont détermine *constructivement* les invariants $\mathcal{A}_\omega$ et conduit à des calculs numériques tout à fait abordables. En outre, de même qu'il existe une formule développant l'intégrale polarisée $x(z_i, u \parallel q_i : \theta!)$ en séries de monômes de résurgence polarisés $\mathcal{V}_{\sigma!}^{\varpi!}(z \parallel q_i : \theta!)$, il existe une formule développant chaque invariant holomorphe $\mathcal{A}_{\omega\|q_i:\theta!}$ en série convergente de scalaires $V_{\sigma!}^{\varpi!}(\omega \parallel q_i : \theta!)$. Voir à ce sujet [...].

## (VI.4) Dépolarisation des invariants holomorphes

PROPOSITION VI.4.1. *Passage d'une polarisation à une autre (transpolarisation).*

Fixons un niveau critique $q_i$, puis choisissons un $\omega$ dans $\Omega_\infty(q_i)$ et deux multipolarisations $\theta!$ et $\hat{\theta}!$ qui soient chacune compatible avec $\omega$ :

$$(VI.4.1) \qquad \theta! = (\theta_1^{\epsilon_1}, \cdots, \theta_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}) \quad \text{et} \quad \omega \in \ (q_i : \theta!)$$

$$(VI.4.2) \qquad \hat{\theta}! = \left(\hat{\theta}_1^{\hat{\epsilon}_1}, \cdots, \hat{\theta}_{i-1}^{\hat{\epsilon}_{i-1}}\right) \quad \text{et} \quad \omega \in \ (q_i : \hat{\theta}).$$

Alors on passe de l'opérateur polarisé $\mathcal{A}_{\omega||q_i:\theta!}$ à l'opérateur polarisé $\mathcal{A}_{\omega||q_i:\hat{\theta}}$ par une substitution *convergente* $S(q_i :: \hat{\theta}!, \theta!)$ de la forme

$$(VI.4.3) \qquad S_{q_i::\hat{\theta}!,\theta!} \begin{cases} u_j \ \rightarrow \ u_j + f_j(u) \\ \text{avec } f_j(u) \in \mathbf{C}\{u_k; p_k < q_i\}. \end{cases}$$

Soit explicitement :

$$(VI.4.4) \qquad \mathcal{A}_{\omega||q_i:\hat{\theta}!} = S_{q_i::\hat{\theta}!\theta!} \cdot \mathcal{A}_{\omega||q_i:\theta!} \cdot S_{q_i::\theta!,\theta!}.$$

Les coefficients de la substitution $S_{q_i::\hat{\theta}!\theta!}$ et de son niveau $S_{q_i::\theta!,\hat{\theta}!}$ se calculent (très explicitement d'ailleurs : voir [$\cdots$]) à partir de deux ingrédients :

(i) le moule scalaire $W^\bullet(q_i :: \theta!)$ de la section § IV.4.
(ii) les invariants $\mathcal{A}_{\omega'||q_j:\theta!}$ de niveau $q_j < q_i$ et dont l'indice $\omega'$ est situé dans le secteur limité par les axes $\theta_j$ et $\hat{\theta}_j$.

La possibilité de *transpolariser* n'est nullement surprenante : elle résulte d'ailleurs directement des résultats de la section précédente sur la complétude des systèmes d'invariants. Ce qui est plus inattendu, en revanche, c'est la possibilité de *dépolariser* les invariants de tout niveau (alors que, comme on l'a signalé, on *ne peut pas dépolariser* les intégrales de niveaux supérieurs).

PROPOSITION VI.4.2. *Passage du polaire à l'isotrope (dépolarisation)*
Pour tout niveau critique $q_i$ et toute multipolarisation $\theta!$, il existe une substitution canonique $S_{q_i::\theta!}$ analogue aux substitutions $S_{q_i::\hat{\theta}!,\theta!}$ de transpolarisation, mais faisant passer des invariants polarisés $\mathcal{A}_{\omega||q_i:\theta!}$ à des invariants $\mathcal{A}_{\omega||q_i}$ qui sont dit *isotropes* car ils ne sont entachés d'aucune polarité :

$$(VI.4.5) \qquad \mathcal{A}_{\omega||q_i} = S^{-1}_{q_i::\theta!} \cdot \mathcal{A}_{\omega||q_i:\theta!} \cdot S_{q_i::\theta!}.$$

Les coefficients de la substitution dépolarisante, comme ceux des substitutions transpolarisantes, se calculent explicitement à partir du moule $W^\bullet(q_i :: \theta!)$ et des invariants de niveaux inférieurs. Evidemment, l'ensemble de tous les invariants isotropes $\mathcal{A}_{\omega||q_i}$ forme un *système complet* d'invariants analytiques du système différentiel (V.1.5) et il n'est pas difficile d'en extraire des systèmes complets et libres.

**(VI.5) La méthode de l'intégrale epsilonnisée.**

On peut calculer les invariants isotropes $\mathcal{A}_{\omega\|q_i}$ *directement*, sans passer par les invariants polarisés $\mathcal{A}_{\omega\|q_i:\theta!}$. La méthode est la suivante :

*Premièrement*, on remplace le système (V.1.5) par un système épsilonnisé :

$$(VI.5.1) \qquad \frac{t^{1+p_i}}{p_i}\frac{d}{dt}x_i + \lambda_i x_i = \epsilon\, b_i(t, x_1, \cdots, x_\nu) \qquad (i = 1, \cdots, \nu).$$

*Deuxièmement*, on calcule, par le même jeu de prosolutions et de rétrosolutions qu'au § IV.1, les solutions *isotropes* de niveau $q_i$ du système épsilonnisé. Ce sont des développements formels du type :

$$(VI.5.2) \qquad x\,(z_i, u, \epsilon \parallel q_i) = \sum_{n_0\in\mathbb{N}} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\nu} \epsilon^{n_0} u^{\mathbf{n}} E^{\mathbf{n}}(z_i \parallel q_i)\varphi^{n_0,\mathbf{n}}(z_i \parallel q_i)$$

avec des $\varphi^{n_0,\mathbf{n}}(z_i \parallel q_i)$ développables en séries bigrades et résurgentes (mais **sans coupures stellaires** dans le modèle convolutif).

*Troisièmement*, on écrit l'équation du pont épsilonnisé de niveau $q_i$ que vérifie (VI.5.3). Celle-ci fait intervenir des opérateurs $\mathcal{A}_{\omega\|q_i}(\epsilon)$ de la forme :

$$(VI.5.3) \qquad \mathcal{A}_{\omega\|q_i}(\epsilon) = \sum_{n_0\in\mathbb{N}} \epsilon^{n_0} \mathcal{A}^{n_0}_{\omega\|q_i}$$

où chaque $\mathcal{A}_{\omega\|q_i}$ est de la forme (VI.2.2).

*Quatrièmement*, on somme en $\epsilon$ dans (VI.5.3) et on fait $\epsilon = 1$. Le miracle est que cela soit possible (la somme en $\epsilon$ existe) alors que l'intégrale épsilonnisée isotrope ne peut pas, elle, être sommée en $\epsilon$ - sauf dans le cas très particulier des systèmes affines et linéaires (voir ci-après).

## (VI.6) Le cas très particulier des systèmes linéaires ou affines

Supposons que le système (V.1.5) soit linéaire ou affine, c'est-à-dire du type :

$$(VI.6.1) \qquad \frac{t^{1+p_i}}{p_i}\frac{d}{dt}x_i + \lambda_i x_i = b_i(t) + \sum_{j=1}^{\nu} x_j b_{ij}(t) \quad (1 \le i, j \le \nu)$$

avec $b_i(t)$ et $b_{ij}(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. (Le cas linéaire correspond évidemment à la nullité des $b_i$). Tous les résultats précédents s'appliquent à ce cas, mais avec plusieurs particularités notables :

*Premièrement*, les intégrales polarisées de tout niveau (elles sont évidemment linéaires ou affines en $u$) ne présentent aucune coupure stellaire : dans le modèle convolutif, l'étoile de définition est $\mathbb{C}_\infty$ tout entier.

*Deuxièmement*, il existe, à tout niveau $q_i$, une notion naturelle d'intégrale isotrope $x(z_i, u \parallel q_i)$ et les invariants isotropes $\mathcal{A}_{\omega\|q_i}$ peuvent se calculer directement à partir de l'équation du pont appliquée à $x(z_i, u \parallel q_i)$, sans passer par les invariants polarisés ni même par l'intégrale épsilonnisée.( )

*Troisièmement*, au niveau $q_i$, les seules dérivations étrangères $\Delta_\omega$ susceptibles d'agir (sans l'annuler) sur l'intégrale isotrope $x(z_i, u \parallel q_i)$ correspondent à des indices $\omega$ de projection :

$$(VI.6.2) \qquad \dot{\omega} = \lambda_j - \lambda_k \quad \text{pour} \quad p_j = p_k = q_i$$

ou de projection :

$$(VI.6.3) \qquad \dot{\omega} = \pm\lambda_j \quad \text{pour} \quad p_j = q_i.$$

*Quatrièmement*, les opérateurs invariants $\mathcal{A}_{\omega\|q_i}$ revêtent la forme :

$$(VI.6.4) \qquad \mathcal{A}_{\omega\|q_i} = A_\omega^{jk}\, u_j \frac{\partial}{\partial u_k} \qquad \text{si } \dot{\omega} = \lambda_j - \lambda_k$$

$$(VI.6.5) \qquad \mathcal{A}_{\omega\|q_i} = \sum_{p_k < p_j} A_\omega^{jk}\, u_j \frac{\partial}{\partial u_k} \qquad \text{si } \dot{\omega} = \lambda_j$$

$$(VI.6.6) \qquad \mathcal{A}_{\omega\|q_i} = \sum_{p_j < p_k} A_\omega^{jk}\, u_j \frac{\partial}{\partial u_k}^{(\ )} \qquad \text{si } \dot{\omega} = -\lambda_k.$$

Les coefficients de $\mathcal{A}_{\omega\|q_i}$ sont notés uniformément $A_\omega^{ji}$ dans les trois cas, mais comme le signe de $p_j - p_k$ est différent (nul, positif, négatif) dans ces trois cas, aucune confusion n'est à craindre. Il n'est pas non plus nécessaire d'indiquer de quel niveau $q_i$ provient l'invariant $A_\omega^{jk}$ car ce niveau est donné par $q_i = \sup(p_j, p_k)$.

# NOTES

( )si $\deg(\varpi_1 + \cdots \varpi_i) < p$ et si par conséquent une rétrosolution est requise à l'étape $i$.

( )Bien sûr, les $c_m(\cdots)$ sont des scalaires $\in \mathbf{C}$. Pour alléger l'écriture, mais faisons l'hypothèse d'irrationalité qui écarte les termes en $(\log z)^s$.

( )Sur la localisation des singularités et la forme des équations de résurgence, voir § IV.3 ci-après.

( )Par exemple $\mathcal{V}^{\varpi_1}_{\sigma_1}(\cdots)\mathcal{V}^{\varpi_2,\varpi_3}_{\sigma_1,\sigma_2}(\cdots) = \mathcal{V}^{\varpi_1,\varpi_2,\varpi_3}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3} + \mathcal{V}^{\varpi_2,\varpi_1,\varpi_3}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\cdots) + \mathcal{V}^{\varpi_1,\varpi_2,\varpi_3}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\cdots)$.

( )et même (uniformément) *accéléro-sommables*, car les accélérées correspondant au plus haut niveau critique sont (uniformément) *sommables.*

( )comme d'habitude on fait, pour simplifier les écritures, l'hypothèse d'irrationalité qui écarte les $\log z$.

( )et même sur un secteur un peu plus grand (voir remarque ci-après).

( )autrement dit, pour tout $p$ : $\left\{\sum_{p_i=p} n_i\lambda_i = 0; n_i \in \mathbb{Z}\right\} \Leftrightarrow \{n_i = 0\}$

( )cela veut dire que les combinaisons entières $\sum_{p_i=p} n_i\lambda_i$ ne peuvent pas approcher 0 trop vite, ce qui équivaut à une certaine condition diophantienne toujours réalisée en pratique (en particulier pour des $\lambda_i$ algébriques).

( )les systèmes locaux à plusieurs niveaux les plus généraux ont une forme normale qui, à la différence de (V.1.1), peut comporter une infinité de termes "croisés" mais cela ne change RIEN quant aux difficultés d'analyse.

( )ou parfois une étoile plus grande. Il y a lieu de distinguer l'étoile de régularité et l'étoile maximale de définition. Voir à ce sujet [ ].

( )voir notre livre "L'équation du point et la classification analytique des objets locaux". Publ. Math. Orsay, 1981.

( )Il existe toujours de telles $\theta$ :! on peut en particulier prendre une multipolarisation "constante", c'est-à-dire vérifiant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \cdots \epsilon_{i-1} = +$ et $\frac{\theta_1}{q_1} = \frac{\theta_2}{q_2} = \cdots = \frac{\theta_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{\arg \omega}{q_i}$.

( )un autre cas important où cela se produit est celui des systèmes "unilatéraux" (par opposition à "sesquilatéraux, cf. $[\cdots]$).