

Dynamiques d'entropie non nulle sur les surfaces

Jérôme Buzzi, Sylvain Crovisier et Omri Sarig

Juillet 2023

Ce texte présente des progrès récents dans notre compréhension des dynamiques différentiables de surfaces. Nous nous proposons d'expliquer une approche de la dynamique en entropie non-nulle que nous avons développée pour résoudre un problème posé par Sheldon Newhouse [18, Problem 2] au Congrès international de Kyoto (1990).

1 Le cadre

On fixe un difféomorphisme $f : M \rightarrow M$ de classe C^∞ où M est une variété compacte et sans bord. En itérant f , on définit les *orbites* : ce sont les suites $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ pour $x \in M$. Nous adoptons un point de vue ergodique en cherchant à décrire, pour “la plupart” des points initiaux $x \in M$, leur statistique définie comme la mesure limite suivante (si elle existe) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)}$$

où δ_y est la mesure de Dirac en y et la limite est prise au sens de la topologie faible. L'entropie interviendra dans la formalisation de la notion de “la plupart des points”.

Les dynamiques de surface d'entropie non-nulle incluent beaucoup d'exemples importants comme les *applications de Hénon* $(x, y) \mapsto (1 - ax^2 + y, bx)$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ bien choisis (voir la figure 1 et [2, 19]) ou les *automorphismes hyperboliques* dont l'exemple le plus populaire est le “chat¹ d'Arnold” $T_A : z \mapsto A.z$ sur \mathbb{T}^2 avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème ergodique de Birkhoff. Le point de vue ergodique consiste à étudier les mesures boréliennes de probabilité μ qui sont *invariantes* : $\mu(M) = 1$ et $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout borélien A . On note $\mathbb{P}(f)$ l'ensemble de ces mesures. Muni de la topologie de la convergence faible, $\mathbb{P}(f)$ est un espace compact métrisable.

Le *bassin* d'une mesure μ est l'ensemble des points dont l'orbite s'équidistribue vers μ :

$$\mathcal{B}(\mu) := \left\{ x \in M : \mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)} \right\}.$$

Notons que ce bassin n'est non-vidé que lorsque $\mu \in \mathbb{P}(f)$. Ainsi $M_0 := M \setminus \bigcup_{\mu \in \mathbb{P}(f)} \mathcal{B}(\mu)$ est l'ensemble des points dont l'orbite n'admet pas de description statistique et $\{\mathcal{B}(\mu), \mu \in \mathbb{P}(f)\} \cup \{M_0\}$ est une partition de M .

1. Ainsi nommé en raison de l'illustration utilisée par [1].

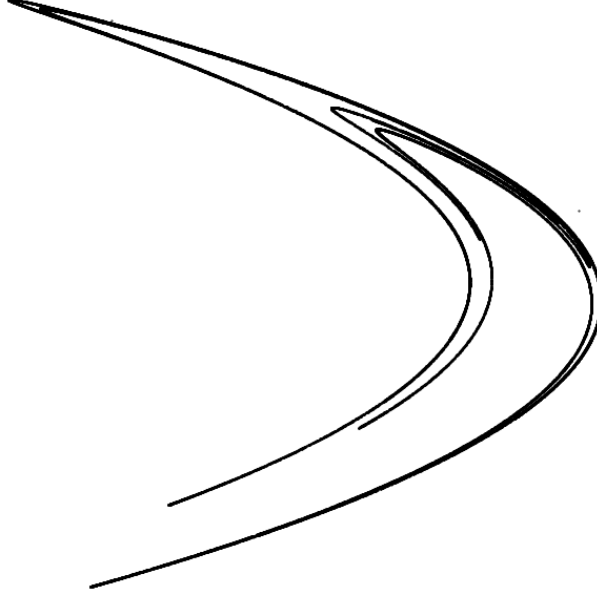


FIGURE 1 – Attracteur de l’application de Hénon. Pour des paramètres bien choisis, l’ensemble représenté Λ est compact invariant et possède la propriété suivante : pour tout point x au voisinage, $d(f^n(x), \Lambda) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On distingue les *mesures ergodiques*, c’est-à-dire les mesures qui ne peuvent être décomposées sous la forme $\mu = \alpha \nu_1 + (1 - \alpha) \nu_2$ avec $0 < \alpha < 1$ et $\nu_1 \neq \nu_2$ elles aussi dans $\mathbb{P}(f)$. On note $\mathbb{P}_{\text{erg}}(f) \subset \mathbb{P}(f)$ le sous-ensemble de ces mesures ergodiques. Il s’agit d’un sous-ensemble G_δ qui est souvent dense et non-dénombrable.

Le théorème ergodique de Birkhoff (e.g. [15]) affirme que $\mu(\mathcal{B}(\mu)) = 1$ pour toute mesure $\mu \in \mathbb{P}_{\text{erg}}(f)$. En particulier $\mu(M_0) = 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{P}(f)$. On voit donc M comme divisé en “univers indépendants”, $\mathcal{B}(\mu)$, chacun admettant sa propre *description statistique* par $\mu \in \mathbb{P}(f)$, modulo l’ensemble M_0 des points dépourvus d’une telle description.

Considérons par exemple le cas des automorphismes hyperboliques du tore comme le chat d’Arnold $T_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Ses points périodiques (les points $q \in \mathbb{T}^2$ vérifiant $q = T_A^\tau(q)$ pour un entier $\tau \geq 1$) sont exactement les points de \mathbb{T}^2 à coordonnées rationnelles. Ils forment donc une partie dénombrable et dense de \mathbb{T}^2 . Chacun d’entre eux définit une mesure invariante et ergodique : $\mu_q := \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} \delta_{f^k(q)}$, avec un bassin $\mathcal{B}(\mu_q)$ non-dénombrable. Mais cette transformations admet bien d’autres mesures invariantes et ergodiques, à commencer par la mesure de Lebesgue λ sur le tore. D’après le théorème ergodique, l’orbite de Lebesgue presque tout point est équidistribuée selon λ .

Remarque. Dans le cas de l’automorphisme T_A , l’ensemble M_0 des points sans description statistique, tout en étant de mesure nulle par rapport à toute mesure $\mu \in \mathbb{P}(f)$, est gros selon d’autres points de vue : (i) il est de dimension de Hausdorff égale à 2 ; (ii) il est générique au sens de Baire (i.e. il contient une intersection dénombrables d’ouverts denses).

Sélection de mesures invariantes et entropie. Si un difféomorphisme peut donc posséder un grand nombre de mesures invariantes, certaines peuvent être jugées plus pertinentes pour l’étude de sa dynamique. Un point de vue répandu adopte la mesure volume vol comme

mesure de référence (non-nécessairement invariante) et distingue les mesures $\mu \in \mathbb{P}(f)$ vérifiant $\text{vol}(\mathcal{B}(\mu)) > 0$. Cela mène aux notions de *mesures physiques* et de *mesures de Sinai-Ruelle-Bowen* (voir [23]).

Notre point de vue ici repose sur *l'entropie dynamique*, une quantité qui “compte le nombre d'orbites”. Elle admet plusieurs déclinaisons (e.g. [15]).

L'*entropie topologique* $h_{\text{top}}(f)$ compte *toutes* les orbites. On la définit de la façon suivante. Étant donnés $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$, on dit que deux points $x, y \in M$ sont (ϵ, n) -séparés si $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \epsilon$ pour un entier $0 \leq k < n$. En notant $s_f(\epsilon, n)$ le cardinal maximal d'une partie de M dont toutes les paires de points distincts sont (ϵ, n) -séparées, on pose :

$$h_{\text{top}}(f) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} h_{\text{top}}(f, \epsilon) \quad \text{avec} \quad h_{\text{top}}(f, \epsilon) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_f(\epsilon, n).$$

Il s'agit donc de l'exposant selon lequel croît (avec n) le nombre de segments d'orbites de longueur n que l'on peut distinguer en observant pendant un temps n avec une précision ϵ arbitrairement petite.

On peut encore définir *l'entropie topologique d'un compact* $K \subset M$ en procédant de façon similaire avec les orbites contenues dans K . On la note $h_{\text{top}}(f, K)$.

L'*entropie de Kolmogorov-Sinai* $h_\mu(f)$ se définit de manière similaire pour toute mesure $\mu \in \mathbb{P}(f)$ en restreignant le comptage aux orbites “significatives pour μ ”.

Entropie nulle, non-nulle ou maximale. La théorie ergodique présente une dichotomie entre mesures d'entropie nulle et non-nulle (e.g. [12]) :

- Une mesure d'entropie nulle obéit à un déterminisme fort : la connaissance approximative du passé détermine le futur à la même précision. (Ceci découle de la définition de Kolmogorov-Sinai.)
- Selon le théorème de Sinai une mesure d'entropie non-nulle contient un processus purement aléatoire (une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées) de même entropie.

Dans la suite de ce texte, nous nous intéresserons aux systèmes d'entropie non nulle et à leurs mesures de grande entropie, dégagées par le principe variationnel suivant (e.g. [15, 12]).

Théorème (Principe variationnel pour l'entropie). *Si f est une application continue d'un espace compact métrique dans lui-même, alors*

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\mu \in \mathbb{P}_{\text{erg}}(f)} h_\mu(f).$$

On peut dire que, collectivement, les mesures $\mu \in \mathbb{P}_{\text{erg}}(f)$ capturent “toute la complexité du système”.

Remarquons que la majoration du supremum est presque évidente au vu des définitions que nous avons données : l'entropie $h_\mu(f)$ ne compte que les segments d'orbites “significatifs pour μ ” alors que l'entropie topologique les compte tous. De façon peut-être plus inattendue, la minoration dit qu'il existe des mesures dont l'entropie approche celle du système tout entier.

Le principe variationnel mène à la question :

Existe-t-il des mesures dont l'entropie coïncide avec celle du système tout entier ?

Ces mesures $\mu \in \mathbb{P}(f)$ vérifiant

$$h_\mu(f) = \sup_{\nu \in \mathbb{P}(f)} h_\nu(f) = h_{\text{top}}(f)$$

sont appelées *mesures maximisant l'entropie*.

La réponse peut être négative dans un cadre purement topologique ou même en régularité C^r pour tout $r < \infty$ (voir [16] en dimension ≥ 4 et [6] sur les surfaces). Newhouse [17] a montré que l'existence était garantie en régularité infinie :

Théorème (Newhouse). *Si f est une application de classe C^∞ d'une variété compacte dans elle-même, alors le précédent supremum est réalisé : il existe des mesures $\mu \in \mathbb{P}_{\text{erg}}(f)$ maximisant l'entropie, i.e., vérifiant $h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f)$.*

2 Dynamiques sur les surfaces

En dimension 2, demander l'annulation de l'entropie topologique est une contrainte forte. Comme exemple d'une telle dynamique, on peut donner l'application temps-un du flot associé au pendule libre (voir la figure 2). Des résultats de rigidité ont été obtenus [11] pour les difféomorphismes de surface d'entropie topologique nulle, et nous renvoyons à [10] pour une introduction à ce sujet. Remarquons que lorsque l'entropie topologique s'annule, toute mesure invariante maximise l'entropie : il peut alors exister une infinité de mesures ergodiques maximisant l'entropie.

Dans la suite de ce texte nous nous concentrerons sur les dynamiques d'entropie strictement positive sur les surfaces. En reprenant l'exemple du pendule, on parvient facilement à créer un système d'entropie topologique non nulle en introduisant un forçage (voir la figure 2).

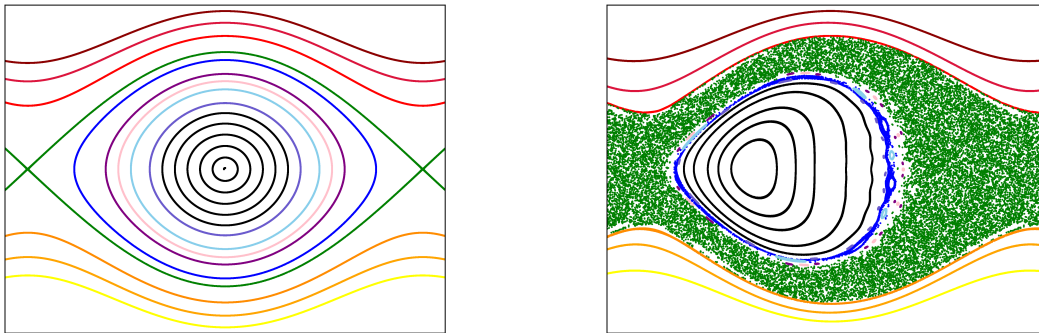


FIGURE 2 – Dynamique du pendule. À gauche : courbes invariantes pour le pendule libre (entropie topologique nulle). À droite : exemples d'ensembles invariants pour le pendule forcé (entropie topologique strictement positive).

Une classe de difféomorphismes (introduite par Anosov et Smale) se distingue : ce sont les *systèmes uniformément hyperboliques*. Leur dynamique a été particulièrement bien décrite dans les années 1960–1970 et depuis lors sert de modèle pour décrire des classes plus générales. Cette classe contient par exemple le chat d'Arnold sur \mathbb{T}^2 .

Finitude de l'ensemble des mesures d'entropie maximale. Les propriétés des systèmes uniformément hyperboliques ainsi que les travaux de Hofbauer [13] sur les applications de l'intervalle² ont conduit Newhouse à formuler la conjecture suivante [18] :

Conjecture (Newhouse). *Pour les difféomorphismes C^∞ de surfaces compactes d'entropie topologique non nulle, l'ensemble des mesures ergodiques d'entropie maximale est fini.*

Les mesures d'entropie maximale non-nécessairement ergodiques s'obtiennent alors comme combinaisons linéaires des mesures d'entropie maximale ergodique et forment donc un simplexe de dimension finie.

Dans [7], nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème (Buzzi-Crovisier-Sarig). *La conjecture de Newhouse est vraie.*

De plus, si un difféomorphisme f (comme dans la conjecture) admet une orbite $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ dense dans M , alors il existe une unique mesure d'entropie maximale.

Un difféomorphisme admettant une orbite dense est appelé difféomorphisme *transitif*. Cette propriété est une forme d'irréductibilité dynamique : on ne peut alors pas décomposer M comme réunion de deux parties compactes invariantes propres. Plus généralement, on dit qu'un ensemble compact K invariant par f est transitif s'il coïncide avec l'adhérence d'une orbite :

$$K = \overline{\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Décomposition de la dynamique. Pour les difféomorphismes uniformément hyperboliques, un théorème "de décomposition spectrale" dû à Smale explique comment décomposer la dynamique en un nombre fini d'ensembles compacts invariants transitifs deux à deux disjoints. Dans [7], nous avons obtenu la généralisation suivante :

Théorème (Buzzi-Crovisier-Sarig). *Considérons un difféomorphisme C^∞ d'une surface compacte, d'entropie topologique non nulle. Il existe une famille au plus dénombrable d'ensembles compacts invariants transitifs H_1, H_2, H_3, \dots d'entropies non-nulles telle que :*

1. *les ensembles sont essentiellement disjoints : $\forall i \neq j, h_{\text{top}}(f, H_i \cap H_j) = 0$;*
2. *toute mesure ergodique d'entropie non nulle est portée par l'un des H_i ;*
3. *l'ensemble $\{H_i \mid h_{\text{top}}(f, H_i) > \delta\}$ est fini pour tout $\delta > 0$;*
4. *chaque ensemble H_i porte exactement une mesure d'entropie $h_{\text{top}}(H_i)$. De plus, le support de cette mesure coïncide avec H_i .*

Remarquons qu'il existe des exemples de difféomorphismes pour lesquels la famille des H_i est infinie et les intersections $H_i \cap H_j$ pour $i \neq j$ ne sont pas toutes vides.

2. [13] obtenait un nombre fini de mesures ergodiques maximisant l'entropie pour toute application de l'intervalle d'entropie topologique non-nulle en supposant qu'il n'y a qu'un nombre fini de points critiques, hypothèse ultérieurement remplacée par la régularité C^∞ par l'un d'entre nous [5].

Classes de conjugaison boréliennes. Les classifications de systèmes dynamiques sont envisagées à conjugaison près : on identifie deux systèmes (M, f) et (N, g) , s'il existe un isomorphisme entre les espaces $\varphi: M \rightarrow N$ tel que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Il est courant de considérer des conjugaisons topologiques, c'est-à-dire par homéomorphismes, entre dynamiques différentiables. Ici nous considérons des conjugaisons seulement boréliennes : nous demandons que φ et φ^{-1} préservent les tribus boréliennes des variétés M, N . La conjugaison conserve alors le cardinal de l'ensemble des orbites périodiques de chaque période, l'entropie topologique, le nombre de mesures ergodiques d'entropie maximale.

Nous obtenons une classification particulièrement agréable à énoncer dans le cas des difféomorphismes *topologiquement mélangeants*, i.e. tels que $f^n(U) \cap V$ est non vide pour tous ouverts $U, V \neq \emptyset$ dès que n est assez grand. Dans l'énoncé suivant $\text{Per}(f)$ désigne l'ensemble des points périodiques de f .

Théorème (Buzzi-Crovisier-Sarig). *Soient $f: M \rightarrow M, g: N \rightarrow N$ des difféomorphismes C^∞ de surface, topologiquement mélangeants, et dont les entropies topologiques coïncident et ne s'annulent pas. Il existe une bijection borélienne $h: M \setminus \text{Per}(f) \rightarrow N \setminus \text{Per}(g)$ qui conjugue $f|_{M \setminus \text{Per}(f)}$ à $g|_{N \setminus \text{Per}(g)}$.*

Il n'existe généralement pas de conjugaison topologique sous les hypothèses ci-dessus, même dans le cas $M = N$. Nous renvoyons à [4] pour un énoncé sans hypothèse de mélange moyennant le recours à des invariants additionnels.

3 Classes homoclines

Les ensembles H_i décrits précédemment peuvent être construits à partir des orbites périodiques. Un point périodique x de période k est *hyperbolique de type selle* si l'application tangente $Df^k(x)$ possède deux valeurs propres, de modules respectivement strictement plus petit et strictement plus grand que 1. Les ensembles stables et instable de x ,

$$W^s(x) = \left\{ y, d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\} \quad \text{et} \quad W^u(x) = \left\{ y, d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \right\}$$

sont alors des courbes immergées de M . Ceci permet de définir la classe homocline topologique de l'orbite de x à partir de l'ensemble $W^s(x) \pitchfork W^u(x)$ des points d'intersection transverse entre les variétés stables et instables (voir la figure 3) :

$$H(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(\overline{W^s(x) \pitchfork W^u(x)}).$$

Les classes homoclines topologiques sont les ensembles compacts invariants H_i de la section précédente. Chacune contient un ensemble dense d'orbites périodiques hyperboliques. Toute mesure ergodique d'entropie non nulle est portée par une classe H_i en conséquence d'un résultat dû à Katok [14].

Pour montrer qu'elles sont essentiellement disjointes, on considère deux classes homoclines $H(x_1), H(x_2)$. On suppose qu'elles se rencontrent selon un ensemble d'entropie non nulle : sur une surface, ceci force les variétés stables et instables de x_1 et x_2 à se traverser. Un *lemme de Sard dynamique* [7, section 4] conclut alors qu'il existe des intersections transverses $W^s(x_i) \pitchfork W^u(x_j)$ et que les classes associées à x_1 et x_2 sont les mêmes.

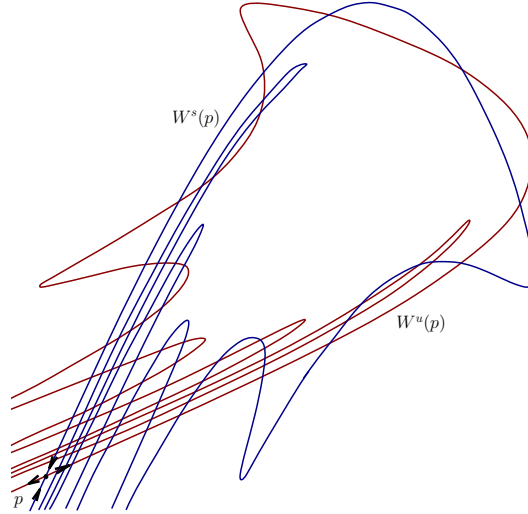


FIGURE 3 – Classe homocline $H(p)$ d'un point fixe hyperbolique.

Théorie de Yomdin. Les points périodiques hyperboliques de chaque période sont isolés; en particulier les classes homoclines topologiques sont en nombre au plus dénombrable. Lorsqu'il existe une famille infinie de classes homoclines H_i , la suite des entropies $h_{\text{top}}(f, H_i, \varepsilon)$ pour chaque échelle $\varepsilon > 0$ doit tendre vers 0 : dans le cas contraire, la séparation des orbites de chaque classe à une échelle fixée force les orbites de certaines classes à chevaucher l'écheciveau formé par les variétés stables et instables d'autres classes ce qui à nouveau implique que des classes homoclines doivent coïncider. La *théorie de Yomdin* [22] permet ensuite de borner les différences $h_{\text{top}}(f, H_i) - h_{\text{top}}(f, H_i, \varepsilon)$ par une fonction $h^*(f, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ et d'en déduire la convergence $h_{\text{top}}(f, H_i) \xrightarrow{i} 0$. La régularité C^∞ est cruciale pour cette étape.

Hyperbolicité non-uniforme, codage. Il reste à étudier la dynamique sur chaque classe homocline topologique. En dimension 2, les mesures ergodiques d'entropie positive vérifient une propriété d'*hyperbolicité non-uniforme* et certaines techniques développées pour les systèmes uniformément hyperboliques (voir [3]) peuvent être poussées dans ce contexte. Ainsi, Sarig [21] a construit des partitions de Markov dénombrables permettant de relever une grande partie de la dynamique (une partie de mesure totale pour toute mesure non-uniformément hyperbolique) dans un espace de suites $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ sur un alphabet dénombrable \mathcal{A} . Nous avons montré [7] que ce *codage* de la dynamique préserve la transitivité des classes homoclines, ce qui assure l'unicité des mesures maximisant l'entropie sur chaque H_i .

4 Prolongements

Les résultats présentés dans ce texte sont valables un peu plus généralement :

- La finitude de l'ensemble des mesures ergodiques d'entropie maximale ne s'étend pas en dimension supérieure (le produit d'un difféomorphisme d'entropie non nulle avec l'identité sur le cercle est un contre-exemple). Toutefois l'unicité de la mesure maximisant l'entropie sur une classe subsiste en dimension supérieure pourvu que l'on remplace les classes homoclines topologiques par une version *mesurée* [7, § 1.6].

– Notre étude s’étend à une classe plus large de mesures invariantes : les états d’équilibre non-uniformément hyperboliques associés à des potentiels Hölder-continus ou géométriques [7, § 1.3] (les mesures maximisant l’entropie correspondent au potentiel nul). On établit notamment une version un peu plus générale d’un résultat d’unicité sur les mesures de Sinaï-Ruelle-Bowen des difféomorphismes transitifs de surfaces [20].

L’approche développée pour résoudre le problème de Newhouse suggère l’existence d’une forme d’hyperbolicité intermédiaire entre l’uniforme et le non-uniforme. Dans cet esprit, le travail en cours [9] propose une condition générale, la *réurrence positive forte*³. Nous montrons qu’elle est satisfaite par tous les difféomorphismes de surface d’entropie strictement positive (grâce au résultat [8] de continuité des exposants de Lyapunov). C’est une propriété de type “trou spectral” qui entraîne notamment le mélange exponentiel pour les mesures maximisant l’entropie ainsi que de nombreuses propriétés statistiques comme le théorème central limite, les grandes déviations ou le principe d’invariance presque sûr.

La réurrence positive forte admet une formulation naturelle en toute dimension et en termes d’exposants de Lyapunov. La généralité de cette nouvelle classe de dynamique reste à comprendre, mais c’est là une autre histoire.

Références

- [1] V.I. Arnold, A. Avèz, *Ergodic problems of celestial mechanics*. Advanced Books Classics, 1989.
- [2] M. Benedicks, L. Carleson, The dynamics of the Hénon map. *Ann. of Math.* **133** (1991), 73–169.
- [3] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Lecture Notes in Mathematics **470**, Springer-Verlag, 1975.
- [4] M. Boyle, J. Buzzi, The almost Borel structure of surface diffeomorphisms, Markov shifts and their factors. *J. Eur. Math. Soc.* **9** (2017), 2739–2782.
- [5] J. Buzzi, Intrinsic ergodicity of smooth interval maps, *Israel J. Math.* **100** (1997), 125–161.
- [6] J. Buzzi, C^r surface diffeomorphisms with no measure maximizing the entropy. *Erg. Th. Dyn. Syst.* **34** (2014), 1770–1793.
- [7] J. Buzzi, S. Crovisier, O. Sarig, Measures of maximal entropy for surface diffeomorphisms. *Ann. of Math.* **195** (2022), 421–508.
- [8] J. Buzzi, S. Crovisier, O. Sarig, Continuity properties of Lyapunov exponents for surface diffeomorphisms. *Inventiones Mathematicae* **230** (2022), 767–849.
- [9] J. Buzzi, S. Crovisier, O. Sarig, Exponential mixing and strong positive recurrence for C^∞ surface diffeomorphisms. *In preparation*.
- [10] S. Crovisier, E. Pujals, From zero to positive entropy. *Notices Amer. Math. Soc.* **69** (2022), 748–761.
- [11] S. Crovisier, E. Pujals, C. Tresser, Mildly dissipative diffeomorphisms of the disk with zero entropy. À paraître à *Acta Mathematica*.
- [12] T. Downarowicz, *Entropy in dynamical systems*. New Math. Monogr. **18**. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [13] F. Hofbauer, On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy. II. *Israel J. Math.* **38** (1981), 107–115.

3. Ce nom (strong positive recurrence) a été donné par analogie avec une propriété des dynamiques symboliques.

- [14] A. Katok, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **51** (1980), 137–173.
- [15] A. Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **54**. Cambridge University Press, 1995.
- [16] M. Misiurewicz, Diffeomorphisms without any measure with maximal entropy. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **21** (1973), 903–910.
- [17] S. Newhouse, Continuity properties of entropy. *Ann. Math.* **129** (1989), 215–235.
- [18] S. Newhouse, Entropy in smooth dynamical systems. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Kyoto, 1990), 1285–1294, 1991.
- [19] J. Palis, F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **35**. Cambridge University Press, 1993.
- [20] F. Rodriguez-Hertz, M.-A. Rodriguez-Hertz, A. Tahzibi, R. Urès, Uniqueness of SRB measures for transitive diffeomorphisms on surfaces. *Comm. Math. Phys.* **306** (2011), 35–49.
- [21] O. Sarig, Symbolic dynamics for surface diffeomorphisms with positive entropy. *J. Amer. Math. Soc.* **26** (2013), 3451–426.
- [22] Y. Yomdin, Volume growth and entropy. *Israel J. Math.* **57** (1987), 285–300.
- [23] L.S. Young, What are SRB measures, and which dynamical systems have them? *J. Statist. Phys.* **108** (2002), 733–54.

Jérôme Buzzi

Laboratoire de Mathématiques
d’Orsay, CNRS - UMR 8628
Université Paris-Saclay
Orsay 91405, France
jerome.buzzi
@universite-paris-saclay.fr

Sylvain Crovisier

Laboratoire de Mathématiques
d’Orsay, CNRS - UMR 8628
Université Paris-Saclay
Orsay 91405, France
sylvain.crovisier
@universite-paris-saclay.fr

Omri Sarig

Faculty of Mathematics
and Computer Science
The Weizmann Institut
of Science
Rehovot, 7610001, Israel
omsarig@gmail.com