INTRODUCTION GÉNÉRALE

par

Christophe Breuil

Table des matières

1. Retour sur la genèse du programme de Langlands p-adique

Fixons un nombre premier p. Ce paragraphe contient une description de la genèse ayant conduit à la découverte des premiers cas de la correspondance locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

1.1. La conjecture de Fontaine-Mazur. — On peut dire sans exagération que la recherche d'une correspondance entre (certaines) représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ - ou de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ - et (certaines) représentations p-adiques de dimension 2 - ou de dimension n - de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, dont les représentations de de Rham de Fontaine, est un vieux désir de plusieurs arithméticiens : citons par exemple J.-P. Serre (voir [**29**]), B. Mazur, R. Langlands, J.-M. Fontaine ([**22**]), M. Harris, M.-F. Vignéras, P. Schneider, etc. Ce désir s'est trouvé (re)stimulé en 2000 par l'énoncé de la conjecture sur les multiplicités modulaires ([**11**], [**7**], [**25**]), elle-même issue des calculs ayant conduit aux derniers cas de Taniyama-Weil ([**18**], [**10**]). Mais il n'est nul besoin de faire appel à cette conjecture pour motiver *a priori* la recherche d'une correspondance p-adique, car cette dernière est en quelque sorte déjà en germe dans la conjecture de Fontaine-Mazur, comme nous tentons de l'expliquer ci-dessous.

Fixons une fois pour toutes des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit F un corps de nombres, $\mathbb{A}_F$ le groupe localement compact des adèles de F et $n \geq 1$ un entier. On normalise les applications de réciprocité locales de telle sorte que les Frobenius géométriques s'envoient sur les inverses des uniformisantes.

L'énoncé conjectural classique suivant est dû à Langlands, Fontaine, Mazur et Tate :

Conjecture 1.1.1. — *Il y a une unique bijection entre les deux ensembles :*

$\{$*classes d'isomorphismes de représentations automorphes paraboliques algébriques* $\pi = \otimes' \pi_{\mathfrak{l}}$ *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\}$

$$\updownarrow$$

$\{$*classes d'isomorphismes de représentations continues irréductibles* $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *non ramifiées en presque toutes les places et potentiellement semi-stables aux places divisant* $p\}$

telle que, pour toute place finie $\mathfrak{l} \mid \ell$, $\ell \neq p$, $\pi_{\mathfrak{l}}$ *et* $\rho\mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$ *se déterminent mutuellement par la correspondance de Langlands locale (convenablement normalisée).*

On rappelle que la correspondance locale a été établie dans [**23**] et [**24**] et qu'une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est algébrique si, pour chaque place infinie, la restriction à $\mathbb{C}^\times$ du paramètre de Langlands correspondant est une somme directe de caractères $z \mapsto z^{a-\frac{n-1}{2}}\overline{z}^{b-\frac{n-1}{2}}$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ (voir [**17**]). En fait, la correspondance $\pi_{\mathfrak{l}} \leftrightarrow \rho\mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$ ci-dessus passe par la représentation de Weil-Deligne, conjecturalement F-semi-simple, associée à la représentation p-adique $\rho\mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$. Mais pour $\ell \nmid p$, cette représentation de Weil-Deligne détermine $\rho\mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$. L'unicité dans la conjecture 1.1.1 est une conséquence du théorème de Čebotarev du côté galoisien et du théorème de multiplicité 1 fort du côté automorphe.

Plusieurs cas de la conjecture 1.1.1 sont démontrés (e.g. le cas $n = 1$), mais nous n'en faisons pas la liste ici. Aux places $\mathfrak{p}$ divisant p, il est connu depuis longtemps que $\pi_{\mathfrak{p}}$ en général *ne* determine *pas* $\rho\mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$, mais seulement (conjecturalement) une petite partie : la représentation de Weil-Deligne associée à $\rho\mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$ ([**21**]). Pourtant, π détermine bien la représentation globale ρ, donc *a fortiori* $\rho\mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$, ce qui veut dire que ce qui manque à $\pi_{\mathfrak{p}}$ pour déterminer $\rho\mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$ est quand même « quelque part » dans π. À l'origine du programme de Langlands p-adique est la volonté de comprendre ce qu'il faut rajouter à $\pi_{\mathfrak{p}}$ pour reconstruire $\rho\mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$. Autrement dit, on veut élucider l'apparition de la théorie de Hodge p-adique côté Galois en termes de théorie des représentations côté automorphe.

Voilà une façon un petit peu moins vague de formuler cet objectif :

Question 1.1.2. — *Peut-on associer à* π *une représentation « p-adique naturelle »* $\widehat{\pi} = \otimes' \widehat{\pi}_{\mathfrak{l}}$ *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ *telle que, pour toute place finie* $\mathfrak{l}$, $\widehat{\pi}_{\mathfrak{l}}$ *et* $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$ *se déterminent mutuellement ?*

« Naturelle » veut dire par exemple que $\widehat{\pi}$ ou ses facteurs $\widehat{\pi}_{\mathfrak{l}}$ se réalisent dans des espaces de cohomologie convenables. Pour $\mathfrak{l} \nmid p$, on peut déjà prendre $\widehat{\pi}_{\mathfrak{l}} = \pi_{\mathfrak{l}}$, de sorte que la tâche principale est de définir $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} \mid p$. Plus précisément, on veut donc que $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}}$ détermine $\pi_{\mathfrak{p}}$, mais aussi contienne la donnée supplémentaire permettant de reconstruire complètement la représentation p-adique $\rho_{\mathfrak{p}} = \rho\mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$. D'un point de vue local, on cherche donc de nouvelles correspondances $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}} \leftrightarrow \rho_{\mathfrak{p}}$.

Si $\widehat{\pi}$ existe, l'espoir est que la correspondance $\pi \leftrightarrow \rho$ de la conjecture 1.1.1 se « factorise » naturellement par $\pi \to \widehat{\pi} \leftrightarrow \rho$ où, dans le dernier cas, les représentations locales se déterminent mutuellement place par place, et où l'analyse aux places infinies côté automorphe est remplacée par de l'analyse p-adique aux places divisant p. C'est exactement ce qui se passe lorsque $n = 1$, comme nous l'expliquons maintenant.

1.2. Le cas GL_1**.** — Soit $\mathbb{A}_F^f$ l'anneau des adèles finis de F et $(\mathbb{A}_F^\times)^0$ la composante connexe de 1 dans $\mathbb{A}_F^\times$. Lorsque $n = 1$, π (comme dans la conjecture 1.1.1) n'est autre qu'un caractère de Hecke algébrique :

$$\chi : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times.$$

Soit I l'ensemble des plongements $\iota : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ et χ_∞ la partie infinie de χ. Comme χ est algébrique, il y a un unique caractère $\chi_0 : \mathbb{A}_F^\times \to \{\pm 1\}$ trivial sur $(\mathbb{A}_F^f)^\times (\mathbb{A}_F^\times)^0$ et des entiers $(a_\iota)_{\iota \in I}$ uniques tels que pour $x \in F^\times$:

$$\chi_\infty(x) = \chi_0(x) \Pi_{\iota \in I} \iota(x)^{a_\iota}.$$

De plus, par des résultats classiques (voir e.g. [**24**]), $\chi(\mathbb{A}_F^f)$ est en fait contenu dans une extension finie de $\mathbb{Q}$ de sorte que, via les deux plongements fixés, on peut voir $\chi_{\mathfrak{l}}$ pour toute place finie $\mathfrak{l}$ comme un caractère :

$$\chi_{\mathfrak{l}} : F_{\mathfrak{l}}^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times.$$

À chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de F divisant p et chaque plongement $\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ est associé un unique plongement $\iota(\mathfrak{p}, \sigma) : F \hookrightarrow \mathbb{C}$, que l'on peut voir comme un plongement $\iota(\mathfrak{p}, \sigma) : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ via l'injection fixée $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F & \overset{\iota(\mathfrak{p},\sigma)}{\hookrightarrow} & \overline{\mathbb{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{\mathfrak{p}} & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & \overline{\mathbb{Q}}_p \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est le plongement fixé $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. On définit $\widehat{\chi} : \mathbb{A}_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ comme $\widehat{\chi} = \otimes' \widehat{\chi}_{\mathfrak{l}}$ où :

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_{\mathfrak{l}} &= \chi_0 \,|_{F_{\mathfrak{l}}^\times} \text{ si } \mathfrak{l} \text{ est infini} \\ \widehat{\chi}_{\mathfrak{l}} &= \chi_{\mathfrak{l}} \text{ si } \mathfrak{l} \text{ est fini, } \mathfrak{l} \nmid p \\ \widehat{\chi}_{\mathfrak{p}} &= \chi_{\mathfrak{p}} \prod_{\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \sigma^{a_{\iota(\mathfrak{p},\sigma)}} \text{ si } \mathfrak{l} = \mathfrak{p} \mid p. \end{aligned}$$

Notons :

$$r_F : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_F^\times / \overline{(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times}$$

l'application de réciprocité globale où $(\mathbb{A}_F^\times)^0$ est la composante connexe neutre de $\mathbb{A}_F^\times$ et $\overline{(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times}$ désigne la fermeture de $(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times$ dans $\mathbb{A}_F^\times$. Le lemme suivant est une conséquence facile des définitions qui précèdent, de la compatibilité entre les applications de réciprocité locale et globale et du théorème de Čebotarev :

Lemme 1.2.1. — *Le caractère* $\widehat{\chi} : \mathbb{A}_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ *se factorise en un caractère (encore noté)* $\widehat{\chi} : \mathbb{A}_F^\times/\overline{(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ *tel que :*

$$\widehat{\chi} \circ r_F : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times = \mathrm{GL}_1(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

est la représentation ρ *(de dimension* 1*) de la correspondance 1.1.1.*

En d'autres termes, la correspondance $\pi = \chi \leftrightarrow \rho$ de la conjecture 1.1.1 se factorise bien naturellement par $\pi \to \widehat{\pi} = \widehat{\chi} \leftrightarrow \rho$.

Pour passer au cas $n > 1$, il faut d'abord généraliser la construction du caractère « localement algébrique » $\widehat{\chi}_{\mathfrak{p}}$ ci-dessus. Cela n'est pas difficile si l'on suppose que la représentation automorphe algébrique π est de plus « régulière » au sens de [**17**].

1.3. Représentations localement algébriques de $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}})$**.** — Rappelons qu'à une représentation algébrique π comme au §1.1 et à un plongement $\iota : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ est associée une liste de poids $a_\iota = (a_{\iota,1}, \cdots, a_{\iota,n})$ dans $\mathbb{Z}$: voir [**17**, §3.3] (attention que la normalisation n'est pas tout à fait la même que celle de *loc. cit.* : on remplace ici $\pi|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}$ par $\pi|\cdot|^{\frac{n-1}{2}}$). On dit que π est régulière si, pour tout plongement ι, les $a_{\iota,j}$ sont des entiers distincts, que l'on ordonne de façon croissante avec j.

Soit $L(\iota)$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ (sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$) de plus haut poids :

$$a_{\iota,1} \leq a_{\iota,2} - 1 \leq a_{\iota,3} - 2 \leq \cdots \leq a_{\iota,n} - n + 1,$$

i.e. $L(\iota)$ est l'induite « algébrique » des matrices triangulaires supérieures à $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ du caractère algébrique :

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1^{a_{\iota,1}} x_2^{a_{\iota,2}-1} \cdots x_n^{a_{\iota,n}-n+1}.$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de F divisant p, $\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ un plongement et $\iota(\mathfrak{p}, \sigma) : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ le plongement associé au couple $(\mathfrak{p}, \sigma)$ défini au §1.2. On note $\mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}(\sigma)$ la représentation de $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}})$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ donnée par :

$$\mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}(\sigma) = L(\iota(\mathfrak{p}, \sigma)) \circ \sigma$$

où l'on désigne encore par σ l'injection $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ induite par $\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. On pose enfin :

$$\begin{aligned} \mathrm{alg}_{\mathfrak{p}} &= \bigotimes_{\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}(\sigma) \\ \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}} &= \pi_{\mathfrak{p}} \otimes \mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

La représentation localement algébrique $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ est l'exact analogue du caractère localement algébrique $\chi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}} = \widehat{\chi}_{\mathfrak{p}} = \chi_{\mathfrak{p}} \otimes (\otimes_{\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \sigma^{a_{\iota(\mathfrak{p},\sigma)}})$ du §1.2 (modulo le décalage ci-dessus sur les poids $a_{\iota(\mathfrak{p},\sigma),j}$ que nous n'expliquons pas ici). Mais contrairement au cas $n = 1$, on ne peut poser $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ car la représentation $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ n'est toujours pas suffisante en général pour déterminer la représentation galoisienne $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$. L'idée supplémentaire est alors que la donnée manquante pour « retrouver » la représentation $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$, au moins lorsque celle-ci est irréductible, pourrait être la donnée d'une *complétion p-adique unitaire* convenable de $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$, ou, ce qui revient au même, la donnée d'une norme p-adique sur $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ (à équivalence près) invariante sous l'action de $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}})$.

À l'heure actuelle, et avec ce degré de généralité, il n'est pas sûr que ce scénario soit le bon (il est peut-être encore trop simpliste). Mais on sait maintenant que pour $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, c'est vraiment ce qui se passe. L'idée de l'existence de diverses complétions de $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ a été suggérée par la conjecture sur les multiplicités modulaires de [**11**]. Nous expliquons ceci maintenant.

1.4. La conjecture sur les multiplicités modulaires. — Rappelons d'abord brièvement son énoncé. Considérons les données suivantes :
(i) k est un entier ≥ 2 ;
(ii) $\tau : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est une représentation de noyau ouvert qui s'étend à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (où $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ est le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$) ;
(iii) $\overline{\rho}_p : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est une représentation de noyau ouvert satisfaisant $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) = \overline{\mathbb{F}}_p$.

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ tel que τ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ et $\overline{\rho}_p$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}})$ (le corps résiduel). Mazur a montré qu'il existait une $\mathcal{O}$-algèbre locale noethérienne complète $R(\overline{\rho}_p)$ de corps résiduel $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$ et une représentation continue $\rho_p^{\mathrm{univ}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(R(\overline{\rho}_p))$ se réduisant sur $\overline{\rho}_p$ modulo l'idéal maximal de $R(\overline{\rho}_p)$ et possédant la propriété d'être une déformation « universelle » de $\overline{\rho}_p$.

Définition 1.4.1. — *On dit qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $R(\overline{\rho}_p)$ est de type (k,τ) s'il existe un morphisme continu de $\mathcal{O}$-algèbres $\iota : R(\overline{\rho}_p) \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ de noyau $\mathfrak{p}$ tel que la représentation composée :*

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\rho_p^{\mathrm{univ}}} \mathrm{GL}_2(R(\overline{\rho}_p)) \xrightarrow{\iota} \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

possède les propriétés suivantes :
(i) ρ_p est de Rham à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$;
(ii) la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ de la représentation de Weil-Deligne associée à ρ_p ([**21**]*) est isomorphe à τ.*

Rappelons que les travaux de Mebkhout, André puis Kedlaya (indépendamment) ajoutés à ceux de Berger ([**1**]) ont permis de démontrer qu'une représentation de de Rham était la même chose qu'une représentation potentiellement semi-stable (cf. [**1**]).

Notons :

$$R(k,\tau,\overline{\rho}_p) = \frac{R(\overline{\rho}_p)}{\cap_{(k,\tau)}\mathfrak{p}}$$

l'intersection étant prise sur les idéaux premiers de type (k,τ) (s'il n'y en a pas, on convient que $R(k,\tau,\overline{\rho}_p) = 0$). Notons $\mu_{\mathrm{gal}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ la multiplicité de Hilbert-Samuel de l'anneau local $R(k,\tau,\overline{\rho}_p)\otimes \mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$. L'idée est que l'entier $\mu_{\rm gal}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$, purement galoisien, peut être *prédit* par l'étude de certaines représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Plus précisément, Henniart a montré dans l'appendice de [**11**] que, via la correspondance locale de Langlands usuelle pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on pouvait associer de manière canonique à la représentation τ une représentation irréductible d'image finie $\sigma(\tau)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ (définie sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ par exemple). Considérons la représentation p-adique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$:

$$\sigma(k,\tau)=\sigma(\tau)\otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2.$$

On peut « classer selon $\overline{\rho}_p$ » les représentations irréductibles apparaissant dans la décomposition de la semi-simplifiée modulo p de $\sigma(k,\tau)$ et on peut considérer le nombre $\mu_{\rm aut}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ de composantes dans chaque classe (c'est une somme de multiplicités). La conjecture est alors :

Conjecture 1.4.2 ([11],[7]). — $\mu_{\rm aut}(k,\tau,\overline{\rho}_p)=\mu_{\rm gal}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$.

Pour être précis, la conjecture initiale de [**11**] supposait par prudence $k<p$ (car elle n'avait été vérifiée que dans de tels cas, cf. le commentaire de [**7**, §8.3]). Ce sont les travaux de Kisin qui ont permis de supprimer sans remords cette hypothèse inutile, tout en prouvant une partie significative de la conjecture 1.4.2 et en montrant du même coup qu'elle était effectivement intimement liée à la correspondance p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**25**]).

Voici l'heuristique : la raison pour laquelle la conjecture 1.4.2 peut faire penser à une correspondance p-adique est, en gros, la suivante. Les calculs montrent que les anneaux $R(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ font intervenir "à fond" la théorie de Hodge p-adique, c'est-à-dire qu'ils dépendent, et avec eux les multiplicités $\mu_{\rm gal}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$, de façon compliquée des représentations galoisiennes p-adiques ρ_p de la définition 1.4.1, et pas seulement de leurs poids de Hodge-Tate ou de leurs représentations de Weil-Deligne associées. Or, il est *quand même* possible de retrouver les multiplicités $\mu_{\rm gal}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ à partir des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentations localement algébriques $\sigma(\tau)\otimes\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$. Cela suggère qu'en poussant plus loin la théorie des représentations côté GL_2, il doit être possible de retrouver les représentations galoisiennes ρ_p elles-mêmes à partir de représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (contenant par exemple $\sigma(\tau)\otimes\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$).

1.5. Les premiers cas. — Partons donc d'une représentation de de Rham irréductible $\rho_p:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)\to\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ de poids de Hodge-Tate distincts $(0,k-1)$ et de déterminant ε^{k-1} où ε est le caractère cyclotomique p-adique. Supposons pour simplifier que la représentation de Weil-Deligne associée à ρ_p par [**21**] est F-semi-simple et que la représentation lisse irréductible π_p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui lui correspond est de dimension infinie. On normalise ici π_p de sorte que son caractère central est donné par $x\mapsto |x|_p^{k-2}$ où $|\cdot|_p$ est la norme p-adique sur $\mathbb{Q}_p^\times$ ($|p|_p=1/p$).

Puisque, lorsque le groupe est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, on est amené dans la conjecture 1.4.2 à considérer des représentations localement algébriques $\sigma\otimes\mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$, il est naturel de considérer, lorsque le groupe est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, les représentations localement algébriques

$\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$. Quand π_p est supercuspidale, on les obtient par exemple par induction compacte des précédentes.

Le premier cas test est celui où ρ_p est cristalline (dans ce cas, π_p est une série principale non ramifiée). Des calculs montrent alors que, lorsque π_p vient d'une représentation cristalline ρ_p comme ci-dessus, les représentations $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ admettent toutes un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-réseau (de type fini sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) et que, de plus, la réduction de ce réseau modulo l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}_p$ a pour semi-simplification une représentation lisse admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui a l'une des deux formes $I(r,\eta)$ ou $R(r,\lambda,\eta)$ suivantes :

$$\begin{aligned} I(r,\eta) &= \Big(\big(\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2\big)/T\Big) \otimes (\eta \circ \mathrm{dét}) \\ R(r,\lambda,\eta) &= \Big(\big(\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2\big)/(T-\lambda)\Big)^{\mathrm{ss}} \otimes (\eta \circ \mathrm{dét}) \\ &\quad \oplus \Big(\big(\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^{[p-3-r]} \overline{\mathbb{F}}_p^2\big)/(T-\lambda^{-1})\Big)^{\mathrm{ss}} \otimes (\eta \circ \mathrm{dét}) \end{aligned}$$

où $r \in \{0,\cdots,p-1\}$, $[p-3-r]$ est l'unique entier dans $\{0,\cdots,p-2\}$ congru à $p-3-r$ modulo $p-1$, $\eta : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un caractère lisse, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, « ss » signifie « semi-simplifiée » et T est l'opérateur de Hecke « T_p ». De plus, à chaque fois que l'on trouve la forme $I(r,\eta)$, la semi-simplifiée modulo p de ρ_p est irréductible de restriction à l'inertie $\omega_2^{r+1}\eta \oplus \omega_2^{p(r+1)}\eta$, et à chaque fois que l'on trouve la forme $R(r,\lambda,\eta)$, la semi-simplifiée modulo p de ρ_p est réductible isomorphe à $\mathrm{nr}(\lambda^{-1})\omega^{r+1}\eta \oplus \mathrm{nr}(\lambda)\eta$ (où $\mathrm{nr}(x)$ est le caractère non-ramifié de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ envoyant un Frobenius arithmétique absolu sur x, ω est le caractère ε modulo p et ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2).

Ces phénomènes ont été découverts par des calculs sur des valeurs spéciales, ou petites, de k dans [**6**], mais sont maintenant prouvés en généralité (voir [**3**]). Ils amènent clairement à *définir* la correspondance semi-simple modulo p suivante :

(i) $I(r,\eta)$ correspond à la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ de restriction à l'inertie $\omega_2^{r+1}\eta \oplus \omega_2^{p(r+1)}\eta$ et de déterminant $\omega^{r+1}\eta^2$;

(ii) $R(r,\eta)$ correspond à la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ isomorphe à $\mathrm{nr}(\lambda^{-1})\omega^{r+1}\eta \oplus \mathrm{nr}(\lambda)\eta$.

1.6. Cas semi-stables non cristallins. — Le deuxième cas test est celui où ρ_p est semi-stable non-cristalline (toujours irréductible). Dans ce cas, π_p est, à torsion non ramifiée près, la représentation de Steinberg. On souhaite comme précédemment trouver des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ possédant des réseaux dont les semi-simplifications correspondent aux semi-simplifications des représentations semi-stables ρ_p par la correspondance semi-simple modulo p du §1.5. Mais si l'on considère un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-réseau de type fini sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$, on se rend compte assez vite que sa réduction modulo l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}_p$ est de longueur *infinie*, et donc ne peut être de l'une des deux formes $I(r,\eta)$ ou $R(r,\lambda,\eta)$ précédentes.

Par ailleurs, les représentations semi-stables ρ_p comme ci-dessus dépendent, outre de k, d'un paramètre $\mathcal{L} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ (appelé l'« invariant $\mathcal{L}$ ») et les calculs de [**11**] montrent que ce paramètre se retrouve dans la semi-simplification modulo p de $\rho_p = \rho_p(k, \mathcal{L})$. L'idée est alors la suivante : il existe en fait plusieurs classes de commensurabilité de $\overline{\mathbb{Z}}_p$-réseaux stables sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ (mais pas engendrés par un nombre fini de vecteurs sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$), ces classes sont paramétrées par $\mathcal{L} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ et leur réduction est de la forme $I(r, \eta)$ ou $R(r, \lambda, \eta)$. De plus, chaque classe de commensurabilité donne lieu à une classe d'équivalence de normes en posant, si $R_{\mathcal{L}}$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $v \in R_{\mathcal{L}}$:

$$\|v\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \\ \lambda v \in R_{\mathcal{L}}}} |\lambda|_p$$

et on peut considérer le complété $\widehat{\pi}_p$ de $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ pour la (classe d'équivalence de la) norme $\| \cdot \|_{\mathcal{L}}$. On espère que cet espace de Banach p-adique unitaire (i.e. possédant une norme invariante, à savoir le prolongement continu de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$) « correspond » à la représentation galoisienne semi-stable $\rho_p(k, \mathcal{L})$, et que les semi-simplifiées modulo p se correspondent comme au §1.5. Notons que cela entraîne alors en particulier que ce Banach est *admissible* au sens de [**28**].

Un candidat pour ces complétions a été défini dans [**8**] via le demi-plan de Drinfeld et la théorie des représentations localement analytiques de Schneider et Teitelbaum ([**26**], [**27**]), puis plus directement dans [**9**, §3] comme espace fonctionnel. Des calculs assez laborieux ont montré que, pour de petites valeurs de k, la réduction modulo p de ces complétions avait bien les bonnes propriétés ([**12**]). Nous notons $B(k, \mathcal{L})$ ces complétions dans la suite.

1.7. Compatibilité local-global. — Se pose alors la question de relier les espaces de Banach $B(k, \mathcal{L})$ à la théorie globale. Soit $(Y(p^n)_{\overline{\mathbb{Q}}})_n$ la tour des courbes modulaires affines sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont les points complexes sont $\mathfrak{h}/\Gamma(p^n)$ (en fait, il faut prendre plusieurs copies de cette tour), dans [**19**], Emerton étudie les espaces de Banach p-adiques munis d'une action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\widehat{H}^1 = \Big(\varprojlim_m \big(\varinjlim_n H^1_{\text{ét}}(Y(p^n)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Z}}_p/p^m\overline{\mathbb{Z}}_p)\big)\Big)\Big[\frac{1}{p}\Big]$$

et montre d'une part qu'ils sont admissibles, d'autre part qu'ils contiennent toutes les représentations localement algébriques $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ pour π_p composante locale en p d'une représentation automorphe parabolique algébrique régulière π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Lorsque la représentation galoisienne globale ρ est semi-stable non-cristalline en restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (comme au §1.6), il est tentant de demander que la complétion de $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ induite par $\widehat{H}^1$ soit précisément (à torsion près) $B(k, \mathcal{L})$ (où k est le « poids » de π et $\mathcal{L}$ l'invariant apparaissant sur $\rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$). Un premier effort, utilisant les symboles modulaires et une construction due à Darmon et Orton, a abouti à montrer dans la première version de [**9**] qu'il y avait au moins (dans beaucoup de cas) un morphisme continu de $B(k, \mathcal{L})$ dans cette complétion. Cela entraînait le résultat nouveau suivant (déduit de la description explicite de $B(k, \mathcal{L})$, voir [**9**]) :

Théorème 1.7.1. — *Les distributions p-adiques μ_p associées à la représentation automorphe π annulent les fonctions $h(z)$ sur $\mathbb{Q}_p$ de la forme :*

$$h(z) = \sum_{i\in I} \lambda_i (z-a_i)^{n_i}\big(\log_0(z-a_i) + \mathcal{L}\mathrm{val}(z-a_i)\big)$$

où I est fini, $\lambda_i \in \overline{\mathbb{Q}}_p$, $a_i \in \mathbb{Q}_p$, $-1+k/2 < n_i \leq k-2$, $\deg(\sum_{i\in I} \lambda_i(z-a_i)^{n_i}) < -1+k/2$, $\log_0$ est le logarithme d'Iwasawa et val *la valuation p-adique usuelle.*

Ce résultat allait conduire Colmez à découvrir que la théorie des (φ,Γ)-modules devait jouer un rôle absolument crucial dans le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

1.8. La découverte de l'interprétation par les (φ,Γ)-modules. — Le lien avec les (φ,Γ)-modules est une découverte fondamentale pour la suite du programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui a permis d'une part de remplacer les conjectures et résultats partiels par des théorèmes complets d'autre part de pousser la théorie (pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) beaucoup plus loin.

Son origine est la suivante : la théorie de Coleman, Kato et Perrin-Riou donne une construction des distributions p-adiques μ_p ci-dessus via la cohomologie galoisienne à partir d'un système d'Euler. Par ailleurs la théorie des (φ,Γ)-modules due à Fontaine, puis étendue par Colmez et Berger, est une théorie qui fournit un cadre approprié pour reformuler les résultats et constructions de Perrin-Riou et Kato en donnant une description particulièrement explicite des représentations galoisiennes p-adiques et de leur cohomologie. En cherchant à redémontrer le théorème 1.7.1 via la construction de μ_p issue des (φ,Γ)-modules, Colmez découvrit dans [**14**] que le dual topologique $B(k,\mathcal{L})^*$ du Banach $B(k,\mathcal{L})$ pouvait se reconstruire *directement* à partir du (φ,Γ)-module $D(k,\mathcal{L})$ (un $\overline{\mathbb{Q}}_p[[X]][1/X]^\wedge$-module libre de rang 2) de la représentation galoisienne $\rho_p(k,\mathcal{L})$.

Théorème 1.8.1 ([14]). — *On a un isomorphisme naturel :*

$$B(k,\mathcal{L})^* \simeq \big(\varprojlim_{\psi} D(k,\mathcal{L})\big)^{\mathrm{b}}$$

où $\psi : D(k,\mathcal{L}) \to D(k,\mathcal{L})$ est un certain opérateur surjectif et où $\big(\varprojlim_\psi D(k,\mathcal{L})\big)^{\mathrm{b}}$ (aussi noté $\psi^{-\infty}(D(k,\mathcal{L}))^{\mathrm{b}}$) est le $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel des suites (infinies) ψ-compatibles bornées d'éléments de $D(k,\mathcal{L})$.

De plus, les structures du (φ,Γ)-module $D(k,\mathcal{L})$ (à savoir, l'action du Frobenius φ et celle du groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\sqrt[p^\infty]{1})/\mathbb{Q}_p))$ permettent de retrouver facilement l'action du sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des matrices triangulaires supérieures. Mais surtout, l'isomorphisme ci-dessus permet de montrer, en utilisant les propriétés de $D(k,\mathcal{L})$, que $B(k,\mathcal{L})$ est toujours non-nul, admissible, topologiquement irréductible en restriction au Borel, et, par [**3**], qu'il a la « bonne » réduction modulo p (voir §1.5).

Ce théorème a été rapidement étendu dans [**4**] au cas cristallin du §1.5, et permet dans ce cas de montrer que $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ n'a qu'une seule complétion p-adique unitaire (mais dans le cas cristallin, ρ_p ne dépend de rien d'autre que π_p et k). Puis il a été étendu dans [**15**] au cas où ρ_p est trianguline mais plus forcément de Rham. Dans ce cas, on ne dispose plus de représentations localement algébriques analogues aux représentations $\pi_p \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ (mais on dispose de séries principales localement analytiques au sens de [**26**]).

1.9. Fin de la genèse et développements ultérieurs. — Avec l'apparition des (φ,Γ)-module, on peut dire que la période de genèse, échelonnée entre 2000 et 2004, s'achève (pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ du moins) et que la théorie "sérieuse" commence. Depuis 2004, citons en bref et par ordre chronologique les principales nouvelles étapes : la construction des bonnes représentations $\widehat{\pi}_p = B(\rho_p)$ (encore des espaces de Banach munis d'une action unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) lorsque ρ_p est de Rham mais réductible ([**13**]), la construction d'un foncteur associant des représentations p-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ à certains Banach admissibles munis d'une action unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**16**]), la construction, via des arguments de déformations, puis par des arguments directs, de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach admissibles unitaires $B(\rho_p)$ pour *toute* représentation p-adique ρ_p de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ ([**16**]), la description (presque) complète du $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach $\widehat{H}^1$ du §1.7 utilisant l'ensemble des résultats obtenus sur le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**20**]) et enfin la description des vecteurs localement analytiques de $B(\rho_p)$ en termes de "(φ,Γ)-modules analytiques" et, dans les cas de Rham, des vecteurs localement algébriques en termes de "φ-modules filtrés" ([**16**]). Je renvoie les lecteurs à l'introduction du volume II (par Colmez) pour une description plus détaillée de l'aspect (φ,Γ)-modules.

2. Contenu des trois volumes

L'idée de départ en janvier 2004 était de réunir en un volume beaucoup des articles sur le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, qui à l'époque concernaient principalement le cas des représentations semi-stables de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Mais les résultats et la théorie évoluant très rapidement au fil des mois (puis des années !), il fallut passer de un volume à trois, tandis que certains articles sur le sujet paraissaient déjà dans d'autres revues. Il devint aussi naturel d'inclure des articles sur les (φ,Γ)-modules (vu l'importance grandissante de ces derniers) ne faisant pas directement référence au programme de Langlands p-adique.

Les deux premiers volumes sont donc consacrés aux (φ,Γ)-modules, tandis que le dernier volume contient des articles globaux ou locaux sur le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (et des questions liées) n'utilisant pas les (φ,Γ)-modules (dont les premiers articles sur le sujet). Décrivons très succintement le contenu de chaque volume.

Le premier volume ne parle pas de représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, mais parle abondamment de représentations p-adiques de groupes de Galois comme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ traitées via leurs (φ,Γ)-modules associés. En particulier, il contient (entres autres) la courte preuve par Berger de la conjecture "faiblement admissible implique admissible" (via les (φ,Γ)-modules et un théorème de Kedlaya), un article de Berger-Colmez traitant le cas de familles de représentations galoisiennes, des articles de Iovita, Brinon et

Andreatta sur les (φ,Γ)-modules en dimension supérieure, un article de Kedlaya sur la filtration par les pentes et divers articles de Colmez sur les (φ,Γ)-modules, dont celui définissant les représentations triangulines.

Le deuxième volume contient le traitement par les (φ,Γ)-modules du programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, c'est-à-dire la construction et l'étude des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires $B(\rho_p)$ associés aux représentations p-adiques ρ_p de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (leurs vecteurs localement analytiques et algébriques, leur réduction modulo p, etc.). Les articles sont pour l'essentiel dus à Colmez, avec un article de Berger sur la réduction modulo p et un article de Breuil-Berger sur le cas cristabellin. Il contient aussi en préambule un article de Vignéras expliquant la construction de $\mathrm{GL}_n(F)$-Banach unitaires ℓ-adiques ($\ell \neq p$) associés aux représentations ℓ-adiques de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ ainsi qu'un article de référence dû à Colmez sur les résultats d'analyse p-adiques utilisés. Voir l'introduction du volume II pour une description plus détaillée de ces articles et de leur genèse.

Enfin, le troisième volume contient des articles pour beaucoup écrits avant ceux du deuxième volume et ne faisant pas intervenir les (φ,Γ)-modules : les premiers cas non-triviaux de compatibilité local-global dans le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (Breuil et Breuil-Emerton : cas semi-stables et ordinaires), les premiers calculs de compatibilité à la réduction modulo p utilisant le demi-plan de Drinfeld (Breuil-Mézard), plusieurs articles sur l'invariant $\mathcal{L}$ (Colmez, puis Bertolini-Darmon-Iovita), un article de Iovita-Coleman sur une explicitation via la géométrie rigide des théorèmes de comparaison de Tsuji et Faltings dans le cas des courbes. Enfin, il contient aussi des articles récents d'Emerton et Paskunas calculant les groupes d'extensions entre représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ en caractéristique p.

Références

[1] Berger L., *Représentations p-adiques et équations différentielles*, Inv. Math. 148, 2002, 219-284.

[2] Berger L., *Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés*, volume I.

[3] Berger L., *Représentations modulaires de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et représentations galoisiennes de dimension 2*, volume II.

[4] Berger L., Breuil C., *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, volume II.

[5] Breuil C., *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *I*, Compositio Math. 138, 2003, 165-188.

[6] Breuil C., *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *II*, J. Inst. Math. Jussieu 2, 2003, 1-36.

[7] Breuil C., *p-adic Hodge theory, deformations and local Langlands*, cours au C.R.M. de Barcelone, 2001, disponible à l'adresse : http ://www.ihes.fr/˜breuil/publications.html.

[8] Breuil C., *Invariant $\mathcal{L}$ et série spéciale p-adique*, Annales Scientifiques E.N.S. 37, 2004, 559-610.

[9] Breuil C., *Invariant $\mathcal{L}$ et cohomologie étale complétée*, volume III.

[10] Breuil C., Conrad B., Diamond F., Taylor R., *On the modularity of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$ *: wild 3-adic exercices*, Journal of the American Mathematical Society 14, 2001, 843-939.

[11] Breuil C., Mézard A., *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ *en* $\ell = p$ (avec un appendice par G. Henniart), Duke Math. J. 115, 2002, 205-310.

[12] Breuil C., Mézard A., *Représentations semi-stables de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*, demi-plan p-adique et réduction modulo* p, volume III.

[13] Breuil C., Emerton M., *Représentations p-adiques ordinaires de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et compatibilité local-global*, volume III.

[14] Colmez P., *Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension* 2, volume II.

[15] Colmez P., *Série principale unitaire pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et représentations triangulines de dimension* 2, volume II.

[16] Colmez P., *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ, Γ)*-modules*, volume II.

[17] Clozel L., *Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité*, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, Perspectives in Math. 10, Academic Press, 1990, 77-159.

[18] Conrad B., Diamond F., Taylor R., *Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations*, Journal of the American Mathematical Society 12, 1999, 521-567.

[19] Emerton M., *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Inv. Math. 164, 2006, 1-84.

[20] Emerton M., *A local global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for* $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, Pure and Applied Math. Quarterly 2, 2006, 279-393.

[21] Fontaine J.-M., *Représentations* ℓ*-adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 321-347.

[22] Fontaine J.-M., *Lettre à M.-F. Vignéras, 14 février 1988.*

[23] Harris M., Taylor R., *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Studies 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[24] Henniart G., *Une preuve simple des conjectures de Langlands locales pour* GL_n *sur un corps p-adique*, Inv. Math. 139, 2000, 439-455.

[25] Kisin M., *The Fontaine-Mazur conjecture for* GL_2, prépublication 2006.

[26] Schneider P., Teitelbaum J., *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to* GL_2, J. Amer. Math. Soc. 15, 2002, 443-468.

[27] Schneider P., Teitelbaum J., $U(\mathfrak{g})$*-finite locally analytic representations*, Representation Theory 5, 2001, 111-128.

[28] Schneider P., Teitelbaum J., *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. 127, 2002, 359-380.

[29] Serre J.-P., *Lettre à Tate, 7 aôut 1987*, Oeuvres complètes, volume IV, Springer, 524-534.

C. Breuil, C.N.R.S. & I.H.É.S., Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
E-mail : breuil@ihes.fr