FORMES MODULAIRES DE HILBERT MODULO p ET VALEURS D'EXTENSIONS ENTRE CARACTÈRES GALOISIENS

par

Christophe Breuil & Fred Diamond

Résumé. — Soit F un corps totalement réel, v une place de F non ramifiée divisant p et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ une représentation continue irréductible dont la restriction $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est réductible et suffisamment générique. Si $\overline{\rho}$ est modulaire (et satisfait quelques conditions techniques faibles), nous montrons comment retrouver l'extension correspondante entre les deux caractères de $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ en terme de l'action de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ sur la cohomologie modulo p.

Abstract. — Let F be a totally real field, v an unramified place of F dividing p and $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ a continuous irreducible representation such that $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ is reducible and sufficiently generic. If $\overline{\rho}$ is modular (and satisfies some weak technical assumptions), we show how to recover the corresponding extension between the two characters of $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ in terms of the action of $\mathrm{GL}_2(F_v)$ on the cohomology mod p.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 11F41, 11S37, 22E50.
Mots clefs. — Représentations galoisiennes, formes modulaires de Hilbert, correspondance de Langlands locale; Galois representations, Hilbert modular forms, local Langlands correspondence.

C. B. remercie pour leur soutien le CNRS, l'université Paris-Sud, le projet ThéHopaD ANR-2011-BS01-005 et le Fields Institute. F. D. remercie l'I.H.É.S. pour son soutien durant la phase de recherche, le C.R.M. de Barcelone, l'I.A.S. et le Fields Institute pour leur hospitalité durant la phase de rédaction.

1. Introduction

Soit F un corps totalement réel, v une place de F divisant p et F_v le complété de F en v, le H^1 étale modulo p de tours de courbes de Shimura sur F de niveau en v arbitrairement grand fournit des représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ que l'on aimerait comprendre. Si f est une forme de Hilbert propre pour les opérateurs de Hecke de représentation galoisienne modulo p associée $\overline{\rho}_f$ irréductible, on aimerait par exemple déjà savoir décrire la partie $\overline{\rho}_f$-isotypique de ces représentations de $\mathrm{GL}_2(F_v)$. Ceci est chose faite lorsque $F_v = \mathbb{Q}_p$ (au moins lorsque $F = \mathbb{Q}$ [**19**], mais cela devrait s'étendre à tout F) mais demeure largement mystérieux lorsque $F_v \neq \mathbb{Q}_p$.

Une des premières tentatives a été de comprendre les représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$ apparaissant (à multiplicité près) dans le $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$-socle de cette partie $\overline{\rho}_f$-isotypique : dans [**8**], les auteurs donnent une liste conjecturale explicite de ces "poids de Serre" lorsque F_v est une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, conjecture qui vient d'être complètement démontrée par Gee et Kisin ([**25**], voir aussi le travail à venir de Newton). Cette liste ne dépend que de la représentation locale $\overline{\rho}_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ (et même seulement de sa restriction à l'inertie). À la suite de [**8**], des représentations lisses admissibles de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ avec les $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$-socles de [**8**] ont été construites dans [**5**] de manière purement locale en supposant $\overline{\rho}_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ suffisamment générique. Des résultats récents d'Emerton, Gee et Savitt ([**20**]) (faisant suite à des résultats partiels dans le cas de variétés de Shimura compactes à l'infini (cf. [**3**]) et des calculs informatiques de Dembélé (dans le même cadre, cf. [**15**])) montrent que la partie $\overline{\rho}_f$-isotypique ci-dessus contient l'une des représentations de [**5**] (lorsque $\overline{\rho}_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est générique). Mais l'une des nouveauté de [**5**] est que, dès que $F_v \neq \mathbb{Q}_p$ (avec F_v non ramifiée), alors il y a *énormément* de représentations lisses admissibles de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ de socle fixé (celui correspondant à $\overline{\rho}_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$). Plus précisément, dans les "diagrammes" que contiennent les représentations de [**5**] apparaissent de multiples "paramètres" dont le nombre grossit exponentiellement avec le degré $[F_v : \mathbb{Q}_p]$ et dont les valeurs sur la partie $\overline{\rho}_f$-isotypique ci-dessus (supposée contenir l'un de ces diagrammes) sont pour la plupart à ce jour mystérieuses (par exemple, on ignore si toutes sont locales, i.e. ne dépendent que de $\overline{\rho}_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$).

Du côté représentations de Galois, il n'y a pas de paramètres nouveaux qui apparaissent lorsque l'on passe de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$, *sauf si la représentation de* $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ *est une extension non scindée entre deux caractères* : on sait en effet que l'espace de ces extensions est génériquement de dimension $[F_v : \mathbb{Q}_p]$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Une question naturelle se pose alors : est-ce que parmi les nombreux paramètres qui apparaissent côté $\mathrm{GL}_2(F_v)$ il s'en trouve au moins quelques uns dont les valeurs déterminent complètement l'extension entre les deux caractères de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ lorsque celle-ci est (générique) réductible non scindée ? Le but de cet article est de montrer que oui : lorsque $\overline{\rho}_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est générique réductible, nous montrons d'une part que certains des paramètres de [**5**] côté $\mathrm{GL}_2(F_v)$ sont bien définis (sans aucune conjecture) sur la partie $\overline{\rho}_f$-isotypique du H^1 étale ci-dessus, et d'autre part que leurs valeurs permettent de retrouver effectivement l'extension précise entre les caractères de $\overline{\rho}_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$. Notons que ce genre de résultat n'a d'équivalent ni modulo $\ell \neq p$ (puisque génériquement il n'y a pas d'extension non scindée entre deux caractères de $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ modulo $\ell \neq p$) ni modulo p pour $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ (puisque génériquement il y a alors une seule extension non scindée).

Énonçons maintenant plus précisément les résultats principaux de l'article. On suppose donc F_v non ramifiée et on note k_v son corps résiduel. On fixe une représentation continue, irréductible, totalement impaire $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ et on suppose que $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est réductible générique, c'est-à-dire de la forme (quitte à tordre par un caractère) :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)} \cong \begin{pmatrix} \mathrm{nr}_v \prod_{\sigma:k_v\hookrightarrow\overline{\mathbb{F}_p}} \omega_\sigma^{r_{v,\sigma}+1} & * \\ 0 & \mathrm{nr}'_v \end{pmatrix}$$

où $r_{v,\sigma} \in \{0, \cdots, p-3\}$ (non tous égaux à 0 ou à $p-3$), ω_σ est le caractère fondamental de Serre associé au plongement σ et $\mathrm{nr}_v, \mathrm{nr}'_v$ des caractères non ramifiés. On peut alors décrire explicitement $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ par le truchement de son module de Fontaine-Laffaille contravariant :

$$\prod_{\sigma:k_v\hookrightarrow\overline{\mathbb{F}_p}} \left(M^\sigma = \overline{\mathbb{F}_p}e^\sigma \oplus \overline{\mathbb{F}_p}f^\sigma, \mathrm{Fil}^{r_{v,\sigma}+1}M^\sigma = \overline{\mathbb{F}_p}f^\sigma\right)$$

avec $\begin{cases} \varphi(e^\sigma) & = & \alpha_{v,\sigma}e^{\sigma\circ\varphi^{-1}} \\ \varphi_{r_{v,\sigma}+1}(f^\sigma) & = & \beta_{v,\sigma}(f^{\sigma\circ\varphi^{-1}} + x_{v,\sigma}e^{\sigma\circ\varphi^{-1}}) \end{cases}$ où $\alpha_{v,\sigma}, \beta_{v,\sigma} \in \overline{\mathbb{F}_p}^\times$ et $x_{v,\sigma} \in \overline{\mathbb{F}_p}$. Maintenant, on suppose $\overline{\rho}$ modulaire, c'est-à-dire :

$$\pi_D(\overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}_p}[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)]}\Big(\overline{\rho}, \varinjlim_U H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{F}_p})(1)\Big) \neq 0$$

où $(X_U)_U$ est une tour de courbes de Shimura sur F associée à une algèbre de quaternions D sur F déployée en une seule des places infinies de F ainsi qu'aux places divisant p (U parcourant les sous-groupes ouverts compacts de $(D \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}})^{\times}$). Sous quelques hypothèses techniques sur $\overline{\rho}$ (que nous n'avons pas cherché à optimiser, cf. début du § 3.3), on peut utiliser l'action de $(D \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}})^{\times}$ sur $\pi_D(\overline{\rho})$ aux places différentes de v pour définir un "facteur local" $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ en v qui est une représentation lisse admissible de $(D \otimes_F F_v)^{\times} \cong \mathrm{GL}_2(F_v)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ (mais dont on ignore si elle ne dépend que de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$). Notons que l'on ne dispose pas ici *a priori* d'une factorisation de $\pi_D(\overline{\rho})$ "à la Flath" (bien que cela soit conjecturé, cf. [**8**, Conj.4.7] et le § 3.1), d'où la nécessité de définir soigneusement ce facteur local $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$.

Si J est un sous-ensemble des plongements de k_v dans $\overline{\mathbb{F}_p}$, on définit la "frontière de J" $F(J)$ comme l'ensemble des plongements $\sigma : k_v \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$ tels que ou bien $\sigma \in J$ et $\sigma \circ \varphi^{-1} \notin J$, ou bien $\sigma \notin J$ et $\sigma \circ \varphi^{-1} \in J$ où φ est le Frobenius usuel $x \mapsto x^p$ sur k_v. Notons $\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$ des matrices triangulaires supérieures modulo p et $\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_{F_v}) \subset \mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})$ celui des matrices unipotentes supérieures modulo p. Le premier théorème associe à $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ certains invariants $x(J)$ de $\overline{\mathbb{F}_p}^{\times}$ qui apparaissent naturellement dans les diagrammes de [**5**, § 13] (bien qu'ils n'y soient pas explicités).

Théorème 1.1. — *Soit J tel que $F(J) \cap \{\sigma, x_{v,\sigma} = 0\} = \emptyset$. Il existe à scalaire près un unique vecteur $v \in \pi_{D,v}(\overline{\rho})^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_{F_v})}$ non nul sur lequel $\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})$ agisse par le caractère $\prod_{\sigma\in J}\sigma^{p-1}\prod_{\sigma\notin J}\sigma^{r_{v,\sigma}} \otimes \prod_{\sigma\in J}\sigma^{r_{v,\sigma}}\prod_{\sigma\notin J}\sigma^{p-1}$ de $\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})/\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_{F_v}) \cong k_v^{\times} \times k_v^{\times}$ et un unique élément $x(J) \in \overline{\mathbb{F}_p}^{\times}$ tel que l'on ait l'égalité dans $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$:*

$$\sum_{s\in k_v}\Big(\prod_{\sigma\in J}\sigma(s)^{p-1-r_{v,\sigma}}\Big)\begin{pmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{pmatrix}v = x(J)\sum_{s\in k_v}\Big(\prod_{\sigma\notin J}\sigma(s)^{p-1-r_{v,\sigma}}\Big)\begin{pmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}v$$

où $[s]$ est le représentant multiplicatif de s dans $\mathcal{O}_{F_v}$.

Lorsque $\{\sigma, x_{v,\sigma} = 0\} = \emptyset$, les invariants $x(J)$ ci-dessus sont les *seuls* invariants de [**5**], mais il en apparaît bien d'autres lorsque $\{\sigma, x_{v,\sigma} = 0\} \neq \emptyset$. Les résultats de [**5**] montrent par ailleurs que l'on peut construire des représentations lisses admissibles de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ avec le $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$-socle correspondant à $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ et des valeurs *presque quelconques* de ces invariants $x(J)$ (voir § 2.6), de sorte que les valeurs prises par les scalaires $x(J)$ du théorème 1.1 ne peuvent pas du tout être prédites *a priori*. Le deuxième théorème donne ces valeurs précises.

Théorème 1.2. — *Soit J tel que $F(J)\cap\{\sigma, x_{v,\sigma}=0\}=\emptyset$, on a :*

$$x(J) = -\Big(\prod_{\sigma\in J}\alpha_{v,\sigma}\prod_{\sigma\notin J}\beta_{v,\sigma}\Big)^{-1}\frac{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma\in J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\notin J}} x_{v,\sigma}(r_{v,\sigma}+1)}{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma\notin J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\in J}} x_{v,\sigma}(r_{v,\sigma}+1)} \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}.$$

En particulier, on voit que ces valeurs sont *locales*, i.e. ne dépendent que de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$, ce qui n'était pas évident *a priori*. Notons que les scalaires $\alpha_{v,\sigma}, \beta_{v,\sigma}$ et $x_{v,\sigma}$ ne sont pas définis de manière unique (comme le lecteur peut immédiatement le voir en faisant un changement de base sur M^σ qui respecte les structures), mais on peut vérifier directement que les scalaires $x(J)$ du théorème 1.2 ne dépendent pas des choix faits. En particulier, on peut supposer tous les $\alpha_{v,\sigma}$ (resp. $\beta_{v,\sigma}$) égaux à 1 sauf un, donné alors par $\mathrm{nr}'_v(p^{-1})$ (resp. $\mathrm{nr}_v(p^{-1})$) et, quitte à faire un changement de base, on peut également supposer que l'un des $x_{v,\sigma}$ vaut 1 (du moins s'il existe un $x_{v,\sigma}$ non nul, mais dans le cas contraire $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est scindée et les invariants $x(J)$ donnés par les théorèmes ci-dessus se limitent à $\mathrm{nr}_v(p)$ et $\mathrm{nr}'_v(p)$). Le lecteur pourra alors vérifier, en prenant par exemple des J de la forme $\{\sigma, \sigma\circ\varphi, \cdots, \sigma\circ\varphi^j\}$ pour σ et j convenables, que l'on retrouve facilement les valeurs de tous les autres $x_{v,\sigma}$ non nuls à partir des valeurs des $x(J)$ du théorème 1.2 et des $r_{v,\sigma}$ (cf. la remarque 2.1.2(iii)).

Le travail récent d'Emerton, Gee et Savitt ([**20**], voir aussi [**3**]) montre que, sous nos hypothèses, la $\mathrm{GL}_2(F_v)$-représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ contient un des diagrammes construits dans [**5**], notons le $D_v(\overline{\rho})$. Une conjecture naturelle supportée par le Théorème 1.2 ci-dessus est que $D_v(\overline{\rho})$ est entièrement *local*, c'est-à-dire ne dépend que de la restriction de $\overline{\rho}$ à $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ (c'est par exemple le cas si $\{\sigma, x_{v,\sigma}=0\}=\emptyset$). Si l'on est optimiste on peut même penser que toute la $\mathrm{GL}_2(F_v)$-représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ pourrait elle-même être locale. Bien que nous espérons que ces énoncés sont vrais, nous avons néanmoins choisi de ne pas les présenter sous forme de conjectures. Une raison est que, en dehors des résultats de cet article et de l'article de Hu [**29**], nous ne savons pour l'instant rien de plus sur les diagrammes $D_v(\overline{\rho})$, qui demeurent donc en général largement mystérieux (sans parler des $\mathrm{GL}_2(F_v)$-représentations $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$).

Disons quelques mots sur les preuves des théorèmes 1.1 et 1.2. Le coeur du théorème 1.1 est de montrer que le poids de Serre $\otimes_{\sigma:k_v\hookrightarrow\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{Sym}^{r_{v,\sigma}}\overline{\mathbb{F}}_p^2)^\sigma$ (voir § 2.1 pour les notations) apparaît *avec multiplicité un* dans le $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$-socle de $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ (le fait qu'il apparaisse était essentiellement déjà connu). Cela se démontre en utilisant les techniques de multiplicité un issues de la méthode de Taylor-Wiles comme inauguré par Fujiwara ([**23**]) et l'un d'entre nous ([**16**]). Un deuxième ingrédient essentiel est que la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$:

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})}\Big(\prod_{\sigma\in J}\sigma^{p-1}\prod_{\sigma\notin J}\sigma^{r_{v,\sigma}}\otimes\prod_{\sigma\in J}\sigma^{r_{v,\sigma}}\prod_{\sigma\notin J}\sigma^{p-1}\Big)$$

n'a qu'un seul de ses constituants qui apparaît dans ce $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$-socle : à savoir le poids de Serre $\otimes_\sigma(\mathrm{Sym}^{r_{v,\sigma}}\overline{\mathbb{F}_p}^2)^\sigma$ ci-dessus. Cela se déduit par exemple directement de [**25**] et d'un calcul facile (mais peut aussi se démontrer de manière plus élémentaire sans utiliser [**25**]). Une fois ces deux ingrédients disponibles, l'existence de $x(J)$ se ramène essentiellement à de la théorie des représentations (cf. proposition 2.6.1).

Le coeur du théorème 1.2 est un calcul local côté $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ et un autre côté $\mathrm{GL}_2(F_v)$. Côté $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$, on calcule la réduction modulo p des valeurs propres du Frobenius (multipliées par les bonnes puissances de p) sur les modules de Dieudonné des représentations potentiellement Barsotti-Tate de $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ de donnée de descente $[\prod_{\sigma\in J}\omega_\sigma^{p-1}\prod_{\sigma\notin J}\omega_\sigma^{r_{v,\sigma}}]\oplus[\prod_{\sigma\in J}\omega_\sigma^{r_{v,\sigma}}\prod_{\sigma\notin J}\omega_\sigma^{p-1}]$ relevant $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ ($[\cdot]$ est le représentant de Teichmüller). Côté $\mathrm{GL}_2(F_v)$, on calcule la réduction modulo p d'un scalaire $\widehat{x}(J)\in\overline{\mathbb{Z}_p}$ défini essentiellement comme le scalaire $x(J)$ du théorème 1.1 mais à l'intérieur de la série principale lisse usuelle en caractéristique 0 associée (par la correspondance de Langlands locale classique) à la représentation de Weil-Deligne d'une représentation potentiellement Barsotti-Tate comme ci-dessus, au lieu de la représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$. Comme ce calcul fait intervenir les valeurs propres du Frobenius via la compatibilité local-global classique ([**37**]), en mettant bout à bout les deux calculs, on obtient la formule du théorème 1.2. Signalons que ces calculs locaux ont été étendus par Hu ([**29**]) pour déterminer les valeurs de quelques autres paramètres de [**5**] analogues aux paramètres $x(J)$.

Au passage, on donne aussi dans le cours du texte un résultat annexe qui a un intérêt indépendamment des deux théorèmes ci-dessus. Même lorsque D n'est pas déployée en v, on peut définir un facteur local $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$. On montre que cette représentation de $(D\otimes_F F_v)^\times$ est alors toujours *de longueur infinie* (même si $F_v=\mathbb{Q}_p$, cf. corollaire 3.5.4). La preuve utilise l'existence de représentations irréductibles en caractéristique 0 de dimension (finie) arbitrairement grande de $(D\otimes_F F_v)^\times$, le calcul de la réduction modulo p des types de Bushnell-Kutzko présenté en appendice et des arguments de congruence. Évidemment, elle ne marche plus si D est déployée en v.

Passons maintenant brièvement en revue les différentes sections de l'article. La première partie rassemble tous les calculs locaux et la seconde tous les résultats globaux (dont les deux théorèmes 1.1 et 1.2). Après des préliminaires (§ 2.1), on calcule explicitement aux §§ 2.2 et 2.3 le module de Fontaine-Laffaille contravariant de la réduction modulo p de certaines représentations potentiellement Barsotti-Tate de donnée de descente $[\prod_{\sigma\in J}\omega_\sigma^{p-1}\prod_{\sigma\notin J}\omega_\sigma^{r_\sigma}]\oplus[\prod_{\sigma\in J}\omega_\sigma^{r_\sigma}\prod_{\sigma\notin J}\omega_\sigma^{p-1}]$. Au § 2.4, on en déduit le calcul de la réduction modulo p des valeurs propres de

Frobenius mentionné ci-avant (théorème 2.4.1). Au § 2.5, on calcule la réduction modulo p des invariants $\widehat{x}(J)$ dans les séries principales modérément ramifiées provenant des représentations potentiellement Barsotti-Tate des §§ 2.2 et 2.3 (théorème 2.5.2). Au § 2.6, on donne des conditions suffisantes pour pouvoir définir (abstraitement) des invariants $x(J)$ comme dans le théorème 1.1, on rappelle des résultats de [**5**] et on donne le résultat local sous sa forme finale (corollaire 2.6.5). Au § 3.1 on introduit le cadre global et la représentation $\pi_D(\overline{\rho})$ ci-dessus. Au § 3.2, on rappelle (et généralise très légèrement) des résultats de Barnet-Lamb, Gee et Geraghty ([**24**], [**1**], [**2**]) sur l'existence de représentations galoisiennes globales modulaires avec certaines conditions locales fixées que l'on utilise pour déterminer quand $\pi_D(\overline{\rho})$ est non nul (corollaire 3.2.3). Au § 3.3, on définit le facteur local $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ précédent. Au § 3.4, on introduit les anneaux de déformations de représentations galoisiennes locales et globales qui serviront à la preuve du théorème de multiplicité un. Aux §§ 3.5 et 3.6, on introduit les systèmes de Taylor-Wiles dont on a besoin puis on les utilise pour montrer qu'un certain module est libre de rang 2 sur l'algèbre de Hecke (théorème 3.6.3). Au § 3.7, on en déduit le théorème de multiplicité un (théorème 3.7.1), puis on l'utilise (ainsi que tout ce qui précède) pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2. Enfin, en appendice, on calcule la semi-simplification modulo p des types de Bushnell-Kutzko (ou K-types) pour GL_2 ou pour les unités d'une algèbre de quaternions.

On achève cette introduction avec quelques notations générales. Dans tout le texte, E est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ qui désigne le corps des coefficients, $\mathcal{O}_E$ est son anneau d'entiers et k_E son corps résiduel. On suppose toujours E "suffisamment grand" (cela sera explicité dans le corps du texte). Tout ce qui est réduit modulo une uniformisante ϖ_E de $\mathcal{O}_E$ est surligné : par exemple, si $x \in \mathcal{O}_E$, $\overline{x}$ est sa réduction dans k_E, si M est un $\mathcal{O}_E$-module, $\overline{M}$ désigne M/ϖ_E, etc.

On note ε le caractère cyclotomique p-adique usuel et ω (plutôt que $\overline{\varepsilon}$) sa réduction modulo p. On note $[x]$ le représentant multiplicatif d'un élément x d'une extension finie de $\mathbb{F}_p$. On normalise l'application de réciprocité de la théorie du corps de classes local en envoyant les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

Si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_L$, on note $\mathrm{B}(L) \subset \mathrm{GL}_2(L)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L) \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ (resp. $\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L) \subset \mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$) le sous-groupe des matrices triangulaires (resp. unipotentes) supérieures modulo une uniformisante de $\mathcal{O}_L$.

Les autres notations seront introduites au fur et à mesure des besoins.

Les auteurs remercient Toby Gee pour leur avoir signalé les résultats récents de [**2**] et [**25**] qui leur ont permis d'alléger les hypothèses techniques dans les énoncés globaux, ainsi que Colin Bushnell et Guy Henniart pour leur avoir signalé des références utiles pour l'appendice. Ils remercient également deux rapporteurs anonymes pour leur lecture minutieuse et leurs remarques pertinentes.

2. Résultats locaux

2.1. Quelques préliminaires. — Cette partie contient divers rappels, notations, définitions et résultats élémentaires qui seront utilisés dans la suite.

On désigne par L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ *non ramifiée* de degré $f \geq 1$ et d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_L$ et on suppose que le corps des coefficients E est tel que $|\operatorname{Hom}(L,E)| = f$. On pose $q \overset{\text{déf}}{=} p^f$ et on note φ le Frobenius $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{F}_q$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des plongements de $\mathbb{F}_q$ dans k_E (qui s'identifie à l'ensemble des plongements de L dans E puisque L est non ramifiée). Si $\sigma \in \mathcal{S}$, on note ω_σ le caractère (fondamental) induit sur $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ par σ composé avec :

$$\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \twoheadrightarrow \operatorname{Gal}(L[\sqrt[p^f-1]{-p}]/L) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_q^\times,\ g \mapsto \overline{\frac{g(\sqrt[p^f-1]{-p})}{\sqrt[p^f-1]{-p}}}.$$

Via le corps de classes local on a $\omega_\sigma(p) = 1$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$. On note $[\sigma] : \mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathcal{O}_E$ le caractère multiplicatif tel que $[\sigma](x) \overset{\text{déf}}{=} [\sigma(x)]$ pour $x \in \mathbb{F}_q$ et $\operatorname{nr}(y)$ le caractère non ramifié de $L^\times$ ou $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ envoyant p sur y.

On fixe une représentation linéaire continue $\overline{\rho} : \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \to \operatorname{GL}_2(k_E)$ réductible et générique au sens de [**5**, Def.11.7], c'est-à-dire de la forme :

$$\overline{\rho} \cong \begin{pmatrix} \big(\operatorname{nr}(\lambda)\prod\limits_{\sigma\in\mathcal{S}}\omega_\sigma^{r_\sigma}\big)\omega & * \\ 0 & \operatorname{nr}(\mu)\end{pmatrix} \otimes \theta$$

où $\lambda, \mu \in k_E^\times$, $r_\sigma \in \{0, \cdots, p-3\}$ avec $(r_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}} \neq (0,\cdots,0), (p-3,\cdots,p-3)$ (ce qui implique donc $p > 3$) et $\theta : \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \to k_E^\times$. Quitte à modifier λ et μ, on ne restreint pas la généralité en supposant $\theta(p) = 1$. La représentation $\overline{\rho} \otimes \theta^{-1}$ est alors toujours dans la catégorie de Fontaine-Laffaille, c'est-à-dire s'écrit :

$$\overline{\rho} \otimes \theta^{-1} = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Fil}^\cdot,\varphi_\cdot}(M, A_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)$$

où M est un φ-module filtré de Fontaine-Laffaille ([**22**]) de la forme $M = \prod_{\sigma\in\mathcal{S}} M^\sigma$, $\operatorname{Fil}^i M = \prod_{\sigma\in\mathcal{S}} \operatorname{Fil}^i M^\sigma$ avec pour $\sigma \in \mathcal{S}$:

$$\begin{cases} M^\sigma & = & k_E e^\sigma \oplus k_E f^\sigma & \\ \operatorname{Fil}^i M^\sigma & = & M^\sigma & i \leq 0 \\ \operatorname{Fil}^i M^\sigma & = & k_E f^\sigma & 1 \leq i \leq r_\sigma + 1 \\ \operatorname{Fil}^i M^\sigma & = & 0 & r_\sigma + 2 \leq i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(e^\sigma) & = & \alpha_\sigma e^{\sigma\circ\varphi^{-1}} \\ \varphi_{r_\sigma+1}(f^\sigma) & = & \beta_\sigma(f^{\sigma\circ\varphi^{-1}} + x_\sigma e^{\sigma\circ\varphi^{-1}}) \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha_\sigma, \beta_\sigma \in k_E^\times$ et $x_\sigma \in k_E$.

On pose :

$$Z(\overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=} \{\sigma \in \mathcal{S},\ x_\sigma = 0\} \tag{2}$$

et on note que $Z(\overline{\rho}) = \mathcal{S}$ si et seulement si $\overline{\rho}$ est scindée.

Les scalaires $\alpha_\sigma, \beta_\sigma, x_\sigma$ ne sont pas bien définis mais on voit que l'on doit avoir par exemple $(\prod_\sigma \beta_\sigma)^{-1} = \lambda$ et $(\prod_\sigma \alpha_\sigma)^{-1} = \mu$, de sorte que les deux scalaires $(\prod_\sigma \beta_\sigma)^{-1}$ et $(\prod_\sigma \alpha_\sigma)^{-1}$ ne dépendent que de $\overline{\rho}$ (i.e. ne dépendent ni de θ ni de l'écriture (1)). On voit aussi que l'ensemble de plongements $Z(\overline{\rho})$ ne dépend que de $\overline{\rho}$. Plus généralement, on a le lemme élémentaire suivant, dont la preuve est laissée au lecteur comme (plaisant) exercice.

Lemme 2.1.1. — *Pour tout $J \subseteq \mathcal{S}$ tel que $Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \notin J, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\} = \emptyset$, les scalaires :*

$$\Big(\prod_{\sigma \in J} \alpha_\sigma \prod_{\sigma \notin J} \beta_\sigma\Big)^{-1} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma \in J \\ \sigma\circ\varphi^{-1} \notin J}} x_\sigma}{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma \notin J \\ \sigma\circ\varphi^{-1} \in J}} x_\sigma} \quad \in \quad k_E$$

ne dépendent que de $\overline{\rho}$.

Remarque 2.1.2. — (i) Noter les deux cas extrêmes $J = \emptyset$ et $J = \mathcal{S}$ qui correspondent aux deux scalaires ci-dessus (lorsque $Z(\overline{\rho}) = \mathcal{S}$, i.e. lorsque $\overline{\rho}$ est scindée, ce sont d'ailleurs les deux seuls cas du lemme).
(ii) Lorsque $\overline{\rho}$ est scindée (ce qui n'est pas le cas important de cet article), il y a deux possibilités pour $(\lambda, \mu, (r_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}, \theta)$, l'autre choix étant $(\mu, \lambda, (p-3-r_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}, \theta \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} \omega_\sigma^{r_\sigma+1})$. Nous choisissons dans ce cas une des deux possibilités.
(iii) Pour J fixé, le scalaire correspondant du lemme 2.1.1 est non nul si et seulement si l'on a de plus $Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \in J, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\} = \emptyset$. Il est facile de voir que l'on peut retrouver $\overline{\rho}$ (à torsion près par un caractère de la forme $\prod_{\sigma\in\mathcal{S}} \omega_\sigma^{s_\sigma}$) à partir de la connaissance des r_σ, de $Z(\overline{\rho})$ et des valeurs de tous les scalaires du lemme 2.1.1 (voir la discussion de l'introduction après le théorème 1.2).

On rappelle qu'un poids de Serre est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$, ou de manière équivalente de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, sur k_E. À torsion près par un caractère, il est de la forme $\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}} (\mathrm{Sym}^{s_\sigma} k_E^2)^\sigma$ où $s_\sigma \in \{0, \cdots, p-1\}$ et où $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ agit sur $(\mathrm{Sym}^{s_\sigma} k_E^2)^\sigma$ via $\sigma : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k_E$ et l'action sur la base canonique de k_E^2. À toute représentation $\overline{\rho}$ de dimension 2 est associé dans [**8**] un ensemble de poids de Serre que l'on note $\mathcal{D}(\overline{\rho})$. Dans le cas ci-dessus, par [**3**, Prop.A.3] (voir aussi [**11**] pour un résultat *a posteriori* équivalent), c'est l'ensemble des poids de Serre :

$$\big(\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}} (\mathrm{Sym}^{s_\sigma} k_E^2)^\sigma\big) \otimes \Big(\prod_{\sigma\circ\varphi \in I} \sigma \circ \det{}^{-(s_\sigma+1)}\Big) \otimes \theta \circ \det$$

pour lesquels il existe $I \subseteq Z(\overline{\rho})$ tel que :

$$\overline{\rho} \cong \begin{pmatrix} \mathrm{nr}(\lambda) \prod\limits_{\sigma\circ\varphi\notin I} \omega_\sigma^{s_\sigma+1} & * \\ 0 & \mathrm{nr}(\mu) \prod\limits_{\sigma\circ\varphi\in I} \omega_\sigma^{s_\sigma+1} \end{pmatrix} \otimes \theta \prod_{\sigma\circ\varphi\in I} \omega_\sigma^{-(s_\sigma+1)}.$$

Avec nos hypothèses sur les r_σ, on a $|\mathcal{D}(\overline{\rho})| = 2^{|Z(\overline{\rho})|}$. De plus on a toujours $\big(\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}} (\mathrm{Sym}^{r_\sigma} k_E^2)^\sigma\big) \otimes \theta\circ\det \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$.

Pour $J \subseteq \mathcal{S}$, on définit les caractères multiplicatifs de $\mathbb{F}_q^\times$ à valeurs dans $\mathcal{O}_E^\times$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \eta(J) & \stackrel{\text{déf}}{=} & [\theta|_{[\mathbb{F}_q^\times]}] \prod\limits_{\sigma\in J} [\sigma]^{r_\sigma} \prod\limits_{\sigma\notin J} [\sigma]^{p-1} \\ \eta'(J) & \stackrel{\text{déf}}{=} & [\theta|_{[\mathbb{F}_q^\times]}] \prod\limits_{\sigma\in J} [\sigma]^{p-1} \prod\limits_{\sigma\notin J} [\sigma]^{r_\sigma}. \end{array} \right. \tag{3}$$

Les hypothèses sur r_σ entraînent $\eta(J) \neq \eta'(J)$. Notons que $\eta(\mathcal{S}\backslash J) = \eta'(J)$ pour tout J et que $\overline{\eta}'(\emptyset) = \big((\prod_{\sigma\in\mathcal{S}} \omega_\sigma^{r_\sigma})\theta\big)|_{[\mathbb{F}_q^\times]} = \big((\mathrm{nr}(\lambda) \prod_{\sigma\in\mathcal{S}} \omega_\sigma^{r_\sigma})\theta\big)|_{[\mathbb{F}_q^\times]}$ et $\overline{\eta}(\emptyset) = \theta|_{[\mathbb{F}_q^\times]} = (\mathrm{nr}(\mu)\theta)|_{[\mathbb{F}_q^\times]}$.

Nous aurons besoin du lemme qui suit (un calcul élémentaire laissé au lecteur).

Lemme 2.1.3. — *On a $\eta(J) = \eta'(J) \prod_{\sigma\in\mathcal{S}} [\sigma]^{c_\sigma}$ où :*

$$\begin{array}{lclllll} c_\sigma & = & p-2-r_\sigma & si & \sigma\notin J & et & \sigma\circ\varphi^{-1}\in J \\ c_\sigma & = & p-1-r_\sigma & si & \sigma\notin J & et & \sigma\circ\varphi^{-1}\notin J \\ c_\sigma & = & r_\sigma+1 & si & \sigma\in J & et & \sigma\circ\varphi^{-1}\notin J \\ c_\sigma & = & r_\sigma & si & \sigma\in J & et & \sigma\circ\varphi^{-1}\in J. \end{array}$$

On note $\eta'(J)\otimes\eta(J) : \mathrm{I}(\mathcal{O}_L) \to \mathcal{O}_E^\times$ le caractère :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \mapsto \eta'(J)(\overline{a})\eta(J)(\overline{d}) \tag{4}$$

et $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \eta'(J)\otimes\eta(J)$ le E-espace vectoriel des fonctions $f : \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L) \to E$ telles que :

$$f(kk') = (\eta'(J)\otimes\eta(J))(k)f(k')$$

($k \in \mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$, $k' \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$) que l'on munit de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ par translation à droite sur les fonctions. Notons que cette action se factorise par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. On note de même $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J)$ le k_E-espace vectoriel des fonctions $f : \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L) \to k_E$ telles que $f(kk') = (\overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J))(k)f(k')$ muni de la même action de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$. Rappelons que, si la E-représentation $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \eta'(J)\otimes\eta(J)$ est irréductible, il n'en est pas de même de la k_E-représentation $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J)$. En effet, ses constituants sont naturellement indexés par un certain sous-ensemble de cardinal ≥ 2 de l'ensemble des parties de $\mathcal{S}$ (qui coïncide génériquement avec l'ensemble des parties de $\mathcal{S}$), cf. [**5**, § 2] ou [**3**, § 2]. Par exemple son socle (irréductible) correspond à $\emptyset$ et son co-socle (ibid.) à $\mathcal{S}$.

Pour $J \subseteq \mathcal{S}$, on pose :

$$F(J) \overset{\text{déf}}{=} \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \in J, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\} \amalg \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \notin J, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\} \tag{5}$$

($F(J)$ pour "Frontière de J"). On note que $|F(J)|$ est toujours pair (éventuellement nul) et que l'on a $F(\mathcal{S}\backslash J) = F(J)$.

Lemme 2.1.4. — *Soit $J \subseteq \mathcal{S}$ tel que $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$. Un seul des constituants de* $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$ *est un poids de Serre associé à $\overline{\rho}$, et c'est* $\big(\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}} (\mathrm{Sym}^{r_\sigma} k_E^2)^\sigma\big) \otimes \theta \circ \det$. *Dans l'indexation ci-dessus, il correspond à $\mathcal{S}\backslash J$.*

Démonstration. — Fixons $\sigma_0 \in \mathcal{S}$. Pour $j \in \{0, \cdots, f-1\}$, l'indice j dans cette preuve signifie $\sigma_0 \circ \varphi^j$. Le socle de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$ est irréductible, donc est un poids de Serre qui, par le lemme 2.1.3 et avec les notations de [**3**, § 4], correspond au f-uplet $\lambda = (\lambda_j(x_j))_{j\in\{0,\cdots,f-1\}}$ avec :

$$\begin{cases} \lambda_j(x_j) &=& p-2-x_j & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^j \notin J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{j-1} \in J \\ \lambda_j(x_j) &=& p-1-x_j & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^j \notin J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{j-1} \notin J \\ \lambda_j(x_j) &=& x_j+1 & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^j \in J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{j-1} \notin J \\ \lambda_j(x_j) &=& x_j & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^j \in J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{j-1} \in J \end{cases} \tag{6}$$

(attention qu'ici x_j est une variable formelle comme dans [**3**, § 4] et ne désigne pas l'élément $x_{\sigma_0\circ\varphi^j} \in k_E$ de (1)), c'est-à-dire qu'il s'agit du poids de Serre :

$$\big(\otimes_{j=0}^{f-1} (\mathrm{Sym}^{\lambda_j(r_j)} k_E^2)^{\sigma_0\circ\varphi^j}\big) \otimes \sigma_0(\det)^{e(\lambda)(r_0,\cdots,r_{f-1})}\theta \circ \det$$

où $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ agit sur le j-ième facteur du produit tensoriel via $\sigma_0 \circ \varphi^j$ et où $e(\lambda)$ est défini comme dans [**3**, § 4]. Par [**5**, § 2] (en particulier [**5**, Lem.2.2]) et (6), on en déduit que $\big(\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}} (\mathrm{Sym}^{r_\sigma} k_E^2)^\sigma\big) \otimes \theta \circ \det$ est un constituant de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$ pour tout $J \subseteq \mathcal{S}$. Par ailleurs on a par l'égalité (18) de [**3**, § 4] (attention que l'élément $\mu_{j+1} = \mu_{\sigma_0\circ\varphi^{-j-1}} \in k_E$ de [**3**, (16)] est égal à $x_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} = x_{\sigma_0\circ\varphi^{f-j}} \in k_E$ en (1)) :

$$Z(\overline{\rho}) = \{\sigma_0 \circ \varphi^j, j \in J_{\overline{\rho}}\}. \tag{7}$$

Si $\lambda_j(x_j) \in \{p-2-x_j, x_j+1\}$, alors $\sigma_0 \circ \varphi^j \in F(J)$ par (6), donc $\sigma_0 \circ \varphi^j \notin Z(\overline{\rho})$ (puisque $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$) et donc $j \notin J_{\overline{\rho}}$ par (7). En particulier les deux ensembles $J^{\min}$ et $J^{\max}$ de [**3**, Prop.4.3] (cf. les égalités (19) dans la preuve de *loc.cit.*) sont tous les deux égaux à :

$$\{j \in \{0, \cdots, f-1\}, \lambda_{j+1}(x_{j+1}) \in \{p-1-x_{j+1}, x_{j+1}+1\}\}. \tag{8}$$

Par [**3**, Prop.4.3], l'ensemble des constituants de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$ qui sont dans $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ est un singleton, nécessairement constitué du poids de Serre $(\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}(\mathrm{Sym}^{r_\sigma} k_E^2)^\sigma) \otimes \theta \circ \det$. Ce poids de Serre est indexé par $\{\sigma_0 \circ \varphi^j,\ j \in J^{\min}\}$, c'est-à-dire en utilisant (8) et (6) par l'ensemble des $\sigma_0 \circ \varphi^j$ pour j tel que $\sigma_0 \circ \varphi^{(j+1)-1} \notin J$, c'est-à-dire par $\mathcal{S} \backslash J$. $\square$

2.2. De Barsotti-Tate à Fontaine-Laffaille I. — Cette partie et la suivante, qui seront utilisées au § 2.4, ont pour but de calculer le module de Fontaine-Laffaille de représentations réductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ sur k_E provenant de certains modules fortement divisibles (ou groupes p-divisibles) avec donnée de descente modérément ramifiée.

On conserve les notations du § 2.1 et on fixe un plongement $\sigma_0 : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k_E$.

Comme dans [**3**, § 5], on pose $e \overset{\text{déf}}{=} p^f - 1$ et on note S le complété p-adique de l'enveloppe aux puissances divisées de $\mathcal{O}_E[u]$ par rapport à l'idéal $(u^e + p)\mathcal{O}_E[u]$ compatibles avec les puissances divisées sur l'idéal $p\mathcal{O}_E[u]$, et $\mathrm{Fil}^p S \subseteq S$ le complété p-adique de l'idéal engendré par $\frac{(u^e+p)^i}{i!}$ pour $i \geq p$. On renvoie à [**3**, § 5] (et aux références données dans *loc.cit.*) pour le rappel de ce qu'est un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible et, si $\eta, \eta' : \mathbb{F}_q^\times \to \mathcal{O}_E^\times$ sont deux caractères multiplicatifs distincts, pour la définition d'un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta \otimes \eta'$.

On fixe $\eta, \eta' : \mathbb{F}_q^\times \to \mathcal{O}_E^\times$ distincts et on note $c \in \{1, \cdots, q-2\}$ l'unique entier tel que $\eta = \omega_{\sigma_0}^c \eta'$, que l'on écrit $c = \sum_{i=0}^{f-1} c_i p^i$ avec $c_i \in \{0, \cdots, p-1\}$ (c_i doit être vu comme $c_{\sigma_0 \circ \varphi^i}$). Pour $j \in \{0, \cdots, f-1\}$, on note $c^{(j)} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{j-1} c_{f-(j-i)} p^i + \sum_{i=j}^{f-1} c_{i-j} p^i \in \{1, \cdots, q-2\}$.

On considère dans la suite des $\mathcal{O}_E$-modules fortement divisibles $\mathcal{M}$ de type $\eta \otimes \eta'$ qui ont la forme suivante :

(i) $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\sigma_0} \times \mathcal{M}^{\sigma_0 \circ \varphi^{-1}} \times \cdots \times \mathcal{M}^{\sigma_0 \circ \varphi^{-(f-1)}}$ avec $\mathcal{M}^{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}} = S e_\eta^{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}} \oplus S e_{\eta'}^{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}}$

(ii) $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$ agit sur $e_\eta^{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}}$ (resp. $e_{\eta'}^{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}}$) par η (resp. η')

(iii) pour tout $j \in \{0, \cdots, f-1\}$, on a l'une des deux possibilités ci-dessous pour l'application $\varphi_1 : \mathrm{Fil}^1 \mathcal{M}^{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}} \to \mathcal{M}^{\sigma_0 \circ \varphi^{-(j+1)}}$ (où l'on remplace $\sigma_0 \circ \varphi^{-j}$ par j pour alléger l'écriture) :

$$(9) \quad \begin{cases} \mathrm{Fil}^1 \mathcal{M}^j & = \left(S(e_\eta^j + a_j u^{c^{(j)}} e_{\eta'}^j) \oplus S(u^e + p) e_{\eta'}^j \right) + \mathrm{Fil}^p S \mathcal{M}^j \\ \varphi_1(e_\eta^j + a_j u^{c^{(j)}} e_{\eta'}^j) & = e_\eta^{j+1} \\ \varphi_1((u^e + p) e_{\eta'}^j) & = e_{\eta'}^{j+1} \end{cases}$$

(10)

$$\begin{cases} \mathrm{Fil}^1 \mathcal{M}^j & = \left(S(u^e + p) e_\eta^j \oplus S(e_{\eta'}^j + a_j u^{e-c^{(j)}} e_\eta^j) \right) + \mathrm{Fil}^p S \mathcal{M}^j \\ \varphi_1((u^e + p) e_\eta^j) & = e_\eta^{j+1} \\ \varphi_1(e_{\eta'}^j + a_j u^{e-c^{(j)}} e_\eta^j) & = e_{\eta'}^{j+1} \end{cases}$$

pour des $a_j = a_{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}} \in \mathcal{O}_E$, et avec αe_η^0 et $\alpha' e_{\eta'}^0$ au lieu de e_η^{j+1} et $e_{\eta'}^{j+1}$ dans l'image de φ_1 si $j = f-1$ (pour des $\alpha, \alpha' \in \mathcal{O}_E^\times$). On note I_η (resp. $I_{\eta'}$) le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ formé des $\sigma_0 \circ \varphi^{-j}$ pour $\mathcal{M}^j = \mathcal{M}^{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}}$ comme en (9) (resp. comme en (10)) et $I_\eta^\times$ (resp. $I_{\eta'}^\times$) le sous-ensemble de I_η (resp. $I_{\eta'}$) des $\sigma_0 \circ \varphi^{-j}$ tels que $a_{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}} \in \mathcal{O}_E^\times$.

Jusqu'à la fin de cette section, on fixe $(r_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}$ et θ comme au § 2.1, c'est-à-dire $r_\sigma \in \{0, \cdots, p-3\}$ pour tout σ avec $(r_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}} \neq (0, \cdots, 0), (p-3, \cdots, p-3)$, et $\theta(p) = 1$.

Définition 2.2.1. — *Soit $J \subseteq \mathcal{S}$ et $\eta(J)$, $\eta'(J)$ comme en (3). On dit qu'un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible $\mathcal{M}$ est de type J si $\mathcal{M}$ est comme ci-dessus avec $\eta = \eta(J)$, $\eta' = \eta'(J)$ et si l'on a :*

$$\begin{array}{rcl} I_{\eta(J)}^\times & \subseteq & \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\} \\ I_{\eta'(J)}^\times & \subseteq & \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\} \\ I_{\eta(J)} \backslash I_{\eta(J)}^\times & \subseteq & \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \notin J, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\} \\ I_{\eta'(J)} \backslash I_{\eta'(J)}^\times & \subseteq & \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \in J, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\}. \end{array}$$

Remarque 2.2.2. — (i) Les modules fortement divisibles de type J sont donc des modules fortement divisibles de type $\eta(J) \otimes \eta'(J)$ (au sens de [**3**, Déf.5.1]) particuliers.
(ii) On a $I_{\eta(J)} \subseteq \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\}$ et $I_{\eta'(J)} \subseteq \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\}$. Or $I_{\eta(J)} \amalg I_{\eta'(J)} = \mathcal{S}$ ce qui force en fait $I_{\eta(J)} = \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\}$ et $I_{\eta'(J)} = \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\}$. En particulier on a toujours $|I_{\eta(J)}| = |\mathcal{S} \backslash J|$ et $|I_{\eta'(J)}| = |J|$.
(iii) Être de type J implique en particulier $a_\sigma \in \mathcal{O}_E^\times$ si $\sigma \in F(J)$ (voir (5)).
(iv) Un module fortement divisible de type J est de type $\mathcal{S} \backslash J$ si l'on échange α et α', η et η' et si l'on remplace c par $e - c$.

Nous montrons dans cette section et la suivante que les $\mathcal{O}_E$-modules fortement divisibles de type J sont exactement les $\mathcal{O}_E$-modules fortement divisibles de type $\eta(J) \otimes \eta'(J)$ (au sens de [**3**, Déf.5.1]) tels que la représentation $\overline{\rho} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1, \varphi_1}(\overline{\mathcal{M}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)^\vee(1)$ (voir [**3**, § 6] pour les notations) est réductible générique avec $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$.

Proposition 2.2.3. — *Soit $\overline{\rho}$ réductible générique et $J \subseteq \mathcal{S}$ tel que $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta(J) \otimes \eta'(J)$ tel que :*

$$\overline{\rho} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1, \varphi_1}(\overline{\mathcal{M}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)^\vee(1).$$

Alors $\mathcal{M}$ est de type J.

Démonstration. — Par le lemme 2.1.4 et [**3**, Thm.8.1(ii)], on doit avoir $\mathcal{S} = I_{\eta(J)} \amalg I_{\eta'(J)}$ et :

$$I_{\eta(J)} = \{\sigma \circ \varphi, \sigma \in \mathcal{S}\backslash J\} = \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\}.$$

On a donc aussi $I_{\eta'(J)} = \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\}$. Par [**3**, Thm.8.1(i)] si $\overline{\rho}$ est scindée, (7) et [**3**, Prop.7.3] si $\overline{\rho}$ est non scindée, on a $Z(\overline{\rho}) = \{\sigma \in \mathcal{S}, \overline{a}_\sigma = 0\}$. Avec $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$, on en déduit les inclusions :

$$\begin{array}{rcl} I_{\eta(J)}\backslash I^\times_{\eta(J)} & \subseteq & \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \notin J, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\} \\ I_{\eta'(J)}\backslash I^\times_{\eta'(J)} & \subseteq & \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \in J, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\}. \end{array}$$

□

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type J, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{lll} A \overset{\text{déf}}{=} \overline{\alpha} \prod_{\sigma \in F(J)} \overline{a}_\sigma & \text{si} & \sigma_0 \in J \\ A \overset{\text{déf}}{=} \overline{\alpha}' \prod_{\sigma \in F(J)} \overline{a}_\sigma & \text{si} & \sigma_0 \notin J \end{array} \right. \tag{11}$$

et on remarque que $A \in k_E^\times$ par la remarque 2.2.2(iii).

Proposition 2.2.4. — *Soit $J \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type J et $\overline{\rho} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{M}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)^\vee(1)$. On a:*

$$\overline{\rho} \cong \begin{pmatrix} \big(\mathrm{nr}(A)\prod_{\sigma\in\mathcal{S}} \omega_\sigma^{r_\sigma}\big)\omega & * \\ 0 & \mathrm{nr}(A^{-1}\overline{\alpha\alpha}') \end{pmatrix} \otimes \theta.$$

Démonstration. — On montre d'abord que $\overline{\mathcal{M}}$ contient un sous-module libre de rang 1 facteur direct stable par toutes les opérations (φ_1 sur le Fil^1 induit et action de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$). On pose pour $j \in \{0, \cdots, f-1\}$:

$$\begin{array}{rclll} e^j & \overset{\text{déf}}{=} & \overline{e}^j_{\eta(J)} & \text{si} \ \ \sigma_0 \circ \varphi^{-(j-1)} \in J & \text{et} \ \ \sigma_0 \circ \varphi^{-j} \in J \\ e^j & \overset{\text{déf}}{=} & \overline{e}^j_{\eta'(J)} & \text{si} \ \ \sigma_0 \circ \varphi^{-(j-1)} \notin J & \text{et} \ \ \sigma_0 \circ \varphi^{-j} \notin J \\ e^j & \overset{\text{déf}}{=} & \overline{e}^j_{\eta(J)} - \overline{a}^{-1}_{j-1} u^{pc^{(j-1)}} \overline{e}^j_{\eta'(J)} & \text{si} \ \ \sigma_0 \circ \varphi^{-(j-1)} \notin J & \text{et} \ \ \sigma_0 \circ \varphi^{-j} \in J \\ e^j & \overset{\text{déf}}{=} & \overline{e}^j_{\eta'(J)} - \overline{a}^{-1}_{j-1} u^{p(e-c^{(j-1)})} \overline{e}^j_{\eta(J)} & \text{si} \ \ \sigma_0 \circ \varphi^{-(j-1)} \in J & \text{et} \ \ \sigma_0 \circ \varphi^{-j} \notin J \end{array}$$

en remplaçant $\overline{a}^{-1}_{j-1}$ par $\overline{a}^{-1}_{f-1}(\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}'})^{-1}$ (resp. $\overline{a}^{-1}_{f-1}\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}'}$) si $j = 0$ et $\sigma_0 \in J$ (resp. $\sigma_0 \notin J$). Montrons que le sous-module $\overline{S}e^0 \times \cdots \times \overline{S}e^{f-1}$ de $\overline{\mathcal{M}}$ est stable par toutes les opérations. La stabilité par $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$ est élémentaire et laissée au lecteur. Considérons d'abord les cas $\sigma_0 \circ \varphi^{-j} \in F(J)$. En utilisant :

$$\begin{array}{rcccl} e - c^{(j)} + pc^{(j-1)} & = & e(c_{f-j} + 1) & = & e + ec_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} \\ c^{(j)} + p(e - c^{(j-1)}) & = & e(p - c_{f-j}) & = & e + e(p - 1 - c_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}) \end{array}$$

on a par un petit calcul :

$$\begin{array}{lllllll} u^{e-c(j)}e^j & \in & \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}} & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\in J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\notin J \\ u^{c(j)}e^j & \in & \mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}} & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\in J \end{array}$$

(noter que $\sigma_0\circ\varphi^{-j}\in I^{\times}_{\eta(J)}$ dans le premier cas, $\sigma_0\circ\varphi^{-j}\in I^{\times}_{\eta'(J)}$ dans le deuxième). Comme $c_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}=r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}+1\geq 1$ dans le premier cas, $p-1-c_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}=r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}+1\geq 1$ dans le deuxième (cf. lemme 2.1.3), on vérifie que (rappelons que $\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}\cap\overline{S}e^j=u^{e-c(j)}\overline{S}e^j$, resp. $\mathrm{Fil}^1\overline{\mathcal{M}}\cap\overline{S}e^j=u^{c(j)}\overline{S}e^j$) :

$$\begin{array}{lllll} \varphi_1(u^{e-c(j)}e^j) & = & \varphi_1(u^{e-c(j)}\overline{e}^j_{\eta(J)}) & = & -\overline{a}_je^{j+1} \quad \text{dans le premier cas} \\ \varphi_1(u^{c(j)}e^j) & = & \varphi_1(u^{c(j)}\overline{e}^j_{\eta'(J)}) & = & -\overline{a}_je^{j+1} \quad \text{dans le deuxième} \end{array}$$

(en remplaçant $\overline{a}_j$ par $\overline{a}_{f-1}\overline{\alpha}$ si $j=f-1$ et $\sigma_0\in J$, par $\overline{a}_{f-1}\overline{\alpha}'$ si $j=f-1$ et $\sigma_0\notin J$). Dans les autres cas, c'est-à-dire $\sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin F(J)$, on vérifie qu'on a toujours $\varphi_1(u^ee^j)=e^{j+1}$ si $j<f-1$, $\varphi_1(u^ee^{f-1})=\overline{\alpha}e^0$ si $\sigma_0\in J$, $\varphi_1(u^ee^{f-1})=\overline{\alpha}'e^0$ si $\sigma_0\notin J$. Pour résumer, on a donc :

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} \varphi_1(u^{e-c(j)}e^j) & = & -\overline{a}_je^{j+1} & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\in J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\notin J \\ \varphi_1(u^{c(j)}e^j) & = & -\overline{a}_je^{j+1} & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\in J \\ \varphi_1(u^ee^j) & = & e^{j+1} & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin F(J) & & \end{array}\right.$$

en multipliant à droite par $\overline{\alpha}$ si $j=f-1$ et $\sigma_0\in J$, par $\overline{\alpha}'$ si $j=f-1$ et $\sigma_0\notin J$. Donc $\overline{S}e^0\times\cdots\times\overline{S}e^{f-1}$ est stable par toutes les opérations et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}\big(\prod_{j=0}^{f-1}\overline{S}e^j,\widehat{A}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p\big)^{\vee}(1)$ est une sous-représentation de $\overline{\rho}$ de dimension 1 (sur k_E). Notons $0\leq j_1<j_2<\cdots<j_{2t-1}<j_{2t}\leq f-1$ les éléments de $\{0,\cdots,f-1\}$ tels que $\sigma_0\circ\varphi^{-j}\in F(J)$ (il y en a un nombre pair) et supposons d'abord $\sigma_0\in J$. On a alors par le lemme 2.1.3 :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{lllll} c_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & = & p-2-r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & \text{si} & j=j_{2s} \\ c_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & = & p-1-r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & \text{si} & j_{2s-1}<j<j_{2s} \\ c_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & = & r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}+1 & \text{si} & j=j_{2s-1} \\ c_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & = & r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & \text{si} & j_{2s}<j<j_{2s+1} \end{array}\right.$$

pour $s\in\{1,\cdots,t\}$ et en identifiant $\{j_{2t}+1,\cdots,j_{2t+1}-1\}$ à $\{j_{2t}+1,\cdots,f-1\}\amalg\{0,\cdots,j_1-1\}$. Par [**38**, Ex.3.7] (et un petit travail de traduction), [**3**, (33)], (12) et (11), on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}\left(\prod_{j=0}^{f-1}\overline{S}e^j,\widehat{A}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p\right)^{\vee}(1)=\mathrm{nr}(A)\overline{\eta}(J)\omega_{\sigma_0}^h$$

où $h=\sum_{j\notin\{j_s,1\leq s\leq 2t\}}p^{f-j}+\sum_{j\in\{j_{2s-1},1\leq s\leq t\}}p^{f-j}-\sum_{s=1}^{t}\sum_{j_{2s-1}<j\leq j_{2s}}p^{f-j}c_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$. On explicite h avec (13) :

$$\begin{aligned} h &= \sum_{j\notin\{j_{2s}\}}p^{f-j}-\sum_{j\in\{j_{2s}\}}p^{f-j}(p-2-r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}})-\sum_{s=1}^{t}\sum_{j_{2s-1}<j<j_{2s}}p^{f-j}(p-1-r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}})\\ &= \sum_{j=0}^{f-1}p^{f-j}-\sum_{s=1}^{t}\sum_{j_{2s-1}<j\leq j_{2s}}p^{f-j}(p-1-r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}})\\ &= \sum_{j=0}^{f-1}p^{f-j}-\sum_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J}p^{f-j}(p-1-r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}})\\ &= \sum_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J}p^{f-j}r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}-\sum_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J}p^{f-j}(p-1)+\sum_{j=0}^{f-1}p^{f-j} \end{aligned}$$

donc $\omega_{\sigma_0}^h=\prod_{\sigma\notin J}\omega_\sigma^{r_\sigma}\prod_{\sigma\notin J}\omega_\sigma^{-(p-1)}\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}\omega_\sigma$. Comme $\overline{\eta}(J)=\theta\prod_{\sigma\in J}\omega_\sigma^{r_\sigma}\prod_{\sigma\notin J}\omega_\sigma^{p-1}$ (cf. (3) vu côté Galois), on a bien :

$$\overline{\eta}(J)\omega_{\sigma_0}^h=\theta\omega\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}\omega_\sigma^{r_\sigma}. \tag{14}$$

La forme du quotient de $\overline{\rho}$ se déduit de son déterminant, qui, vu les hypothèses sur $\mathcal{M}$, est $\omega\mathrm{nr}(\overline{\alpha\alpha'})\overline{\eta}(J)\overline{\eta}'(J)=\theta^2\omega\mathrm{nr}(\overline{\alpha\alpha'})\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}\omega_\sigma^{r_\sigma}$ (cf. (3)). Le cas $\sigma_0\notin J$ est strictement analogue au cas $\sigma_0\in J$ et laissé au lecteur. □

Une des conséquences de la proposition 2.2.4 (et des hypothèses sur les r_σ) est que $\overline{\rho}$ est en particulier générique au sens de [**5**, Def.11.7], et donc est comme au § 2.1.

2.3. De Barsotti-Tate à Fontaine-Laffaille II.

— Dans cette partie, on détermine complètement le module de Fontaine-Laffaille contravariant de la représentation $\overline{\rho}\otimes\theta^{-1}$ provenant d'un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type J.

On conserve les notations du § 2.2. La preuve de la proposition qui suit est contenue dans celle de [**4**, Prop.5.1.2] (en particulier, notons que par rapport à [**3**, §7] nous tenons compte ici dans les modules fortement divisibles des torsions par des caractères de Galois non ramifiés). Pour la commodité du lecteur, nous redonnons les détails dans le cas particulier qui nous concerne.

Proposition 2.3.1. — *Soit J, $\mathcal{M}$ et $\overline{\rho}$ comme dans la proposition 2.2.4. On a $\overline{\rho}\otimes\theta^{-1}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^\cdot,\varphi^\cdot}(M,A_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)$ où M est le module de Fontaine-Laffaille :*

$$M=M^{\sigma_0}\times M^{\sigma_0\circ\varphi^{-1}}\times\cdots\times M^{\sigma_0\circ\varphi^{-(f-1)}}$$

avec (cf. (11) pour A) :

$$\begin{cases} M^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & = & k_E v^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} \oplus k_E w^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & \\ \mathrm{Fil}^i M^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & = & M^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & i \leq 0 \\ \mathrm{Fil}^i M^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & = & k_E w^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & 1 \leq i \leq r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} + 1 \\ \mathrm{Fil}^i M^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} & = & 0 & r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} + 2 \leq i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(v^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}) & = & v^{\sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}} \\ \varphi_{r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}+1}(w^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}) & = & w^{\sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}} - A_j v^{\sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}} \end{cases} \qquad 0 \leq j \leq f-2$$

$$\begin{cases} \varphi(v^{\sigma_0\circ\varphi^{-(f-1)}}) & = & A\overline{\alpha}^{-1}\overline{\alpha}'^{-1}v^{\sigma_0} \\ \varphi_{r_{\sigma_0\circ\varphi^{-(f-1)}}+1}(w^{\sigma_0\circ\varphi^{-(f-1)}}) & = & A^{-1}w^{\sigma_0} - A_{f-1}v^{\sigma_0} \end{cases}$$

où :

$$(15) \qquad \begin{cases} A_j & = & \overline{a}_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} \displaystyle\prod_{\substack{0\leq i\leq j-1 \\ \sigma_0\circ\varphi^{-i}\in F(J)}} (-\overline{a}^{-2}_{\sigma_0\circ\varphi^{-i}}) & \text{si} \quad \sigma_0\circ\varphi^{-j} \notin F(J) \\ A_j & = & \overline{a}^{-1}_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} \displaystyle\prod_{\substack{0\leq i\leq j-1 \\ \sigma_0\circ\varphi^{-i}\in F(J)}} (-\overline{a}^{-2}_{\sigma_0\circ\varphi^{-i}}) & \text{si} \quad \sigma_0\circ\varphi^{-j} \in F(J) \end{cases}$$

en multipliant le membre de droite de (15) par $A\overline{\alpha}^{-1}\overline{\alpha}'^{-1}$ si $j = f-1$.

Démonstration. — On pose $\widetilde{\eta}(J) \overset{\text{déf}}{=} [\theta^{-1}]\eta(J)$, $\widetilde{\eta}'(J) \overset{\text{déf}}{=} [\theta^{-1}]\eta'(J)$ pour $J \subseteq \mathcal{S}$. On définit d'abord une suite $(\eta_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$ avec $\eta_\sigma \in \{\widetilde{\eta}(J), \widetilde{\eta}'(J)\}$ comme suit : si $J = \emptyset$, $\eta_\sigma \overset{\text{déf}}{=} \widetilde{\eta}'(J)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$, si $J = \mathcal{S}$, $\eta_\sigma \overset{\text{déf}}{=} \widetilde{\eta}(J)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$ et si $J \notin \{\emptyset, \mathcal{S}\}$:

$$(16) \qquad \begin{cases} \eta_\sigma \overset{\text{déf}}{=} \widetilde{\eta}(J),\ \eta_{\sigma\circ\varphi^{-1}} \overset{\text{déf}}{=} \widetilde{\eta}'(J) & \text{si} \quad \sigma \in J & \text{et} \quad \sigma\circ\varphi^{-1} \notin J \\ \eta_\sigma \overset{\text{déf}}{=} \widetilde{\eta}'(J),\ \eta_{\sigma\circ\varphi^{-1}} \overset{\text{déf}}{=} \widetilde{\eta}(J) & \text{si} \quad \sigma \notin J & \text{et} \quad \sigma\circ\varphi^{-1} \in J \\ \eta_\sigma = \eta_{\sigma\circ\varphi^{-1}} & \text{si} \quad \sigma \notin F(J). & \end{cases}$$

Un examen facile de (16) montre que l'on obtient $\eta_\sigma = \widetilde{\eta}(J)$ si $\sigma \in J$ et $\eta_\sigma = \widetilde{\eta}'(J)$ si $\sigma \notin J$. Par ailleurs, par la définition 2.2.1 et [**3**, (32)], on voit que (16) implique $\eta_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} = \eta_j$ pour tout $j \in \{0, \cdots, f-1\}$ où η_j est comme dans [**3**, § 6]. Supposons d'abord $\sigma_0 \in J$ dans ce qui suit, ce qui revient donc à $\eta_0 = \widetilde{\eta}(J)$. Par la proposition 2.2.4 et (14), on a :

$$(\overline{\rho}\otimes\theta^{-1})^\vee(1) \otimes \overline{\widetilde{\eta}}(J)\omega^h_{\sigma_0}\omega^{-1} \cong (\overline{\rho}\otimes\theta^{-1}) \otimes \mathrm{nr}(\overline{\alpha}^{-1}\overline{\alpha}'^{-1}).$$

Le module de Fontaine-Laffaille contravariant de $\overline{\rho}\otimes\theta^{-1}$ est donc donné par les formules à la fin de la preuve de [**3**, Prop.7.3] tordues (côté Galois) par $\mathrm{nr}(\overline{\alpha\alpha}')$. Nous explicitons complètement ce module dans ce qui suit. La définition 2.2.1 et ce qui précède donnent les équivalences :

$$\begin{array}{lllllll}
\sigma_0\circ\varphi^{-j}\in I^{\times}_{\eta(J)} & \text{et} & \eta_j=\widetilde{\eta}(J) & \Leftrightarrow & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\in J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\notin J\\
\sigma_0\circ\varphi^{-j}\in I_{\eta'(J)} & \text{et} & \eta_j=\widetilde{\eta}(J) & \Leftrightarrow & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\in J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\in J\\
\sigma_0\circ\varphi^{-j}\in I^{\times}_{\eta'(J)} & \text{et} & \eta_j=\widetilde{\eta}'(J) & \Leftrightarrow & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\in J\\
\sigma_0\circ\varphi^{-j}\in I_{\eta(J)} & \text{et} & \eta_j=\widetilde{\eta}'(J) & \Leftrightarrow & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\notin J.
\end{array}$$

Avec le lemme 2.1.3, on voit donc que le module de Fontaine-Laffaille contravariant $M=M^{\sigma_0}\times\cdots\times M^{\sigma_0\circ\varphi^{-(f-1)}}$ de la preuve de [**3**, Prop.7.3] (tordu par $\mathrm{nr}(\overline{\alpha\alpha}')$ côté Galois) est donné par $M^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}=k_Ee^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}\oplus k_Ef^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}=k_Ee^j\oplus k_Ef^j$ avec (la définition de la filtration étant implicite) :

$$\begin{array}{ll}
\begin{cases}\varphi(e^j) = e^{j+1}-\overline{a}_jf^{j+1}\\ \varphi_{r_j+1}(f^j) = f^{j+1}\end{cases} & \text{si}\quad \sigma_0\circ\varphi^{-j}\in J\quad\text{et}\quad\sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\notin J\\
\begin{cases}\varphi(e^j) = e^{j+1}\\ \varphi_{r_j+1}(f^j) = f^{j+1}-\overline{a}_je^{j+1}\end{cases} & \text{si}\quad \sigma_0\circ\varphi^{-j}\in J\quad\text{et}\quad\sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\in J\\
\begin{cases}\varphi_{r_j+1}(e^j) = e^{j+1}\\ \varphi(f^j) = f^{j+1}-\overline{a}_je^{j+1}\end{cases} & \text{si}\quad \sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J\quad\text{et}\quad\sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\in J\\
\begin{cases}\varphi_{r_j+1}(e^j) = e^{j+1}-\overline{a}_jf^{j+1}\\ \varphi(f^j) = f^{j+1}\end{cases} & \text{si}\quad \sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J\quad\text{et}\quad\sigma_0\circ\varphi^{-(j+1)}\notin J
\end{array}$$

où $r_j=r_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$, $\overline{a}_j=\overline{a}_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$ et avec $\overline{\alpha}'^{-1}e^0$ et $\overline{\alpha}^{-1}f^0$ au lieu de e^{j+1} et f^{j+1} dans l'image de φ et φ_{r_j+1} si $j=f-1$ (les formules précises avec $\overline{\alpha}'$ et $\overline{\alpha}$ pour $j=f-1$ ne sont pas explicitées dans la preuve de [**3**, Prop.7.3] où l'on se contentait de décrire l'action de l'inertie seulement, mais un petit calcul les donne en notant que l'on a ici tordu côté Galois par $\mathrm{nr}(\overline{\alpha\alpha}')$, ce qui revient côté Fontaine-Laffaille à multiplier φ et φ_{r_j+1} par $(\overline{\alpha\alpha}')^{-1}$ au cran $j=f-1$). Pour $j\in\{0,\cdots,f-1\}$ on pose $f'^j\overset{\text{déf}}{=}f^j$ si $\sigma_0\circ\varphi^{-j}\in J$ et $f'^j\overset{\text{déf}}{=}e^j$ si $\sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J$. Pour $j\in\{1,\cdots,f-1\}$ on pose :

$$\begin{array}{lllllll}
e'^j & \overset{\text{déf}}{=} & e^j & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j-1)}\in J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\in J\\
e'^j & \overset{\text{déf}}{=} & f^j & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j-1)}\notin J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J\\
e'^j & \overset{\text{déf}}{=} & e^j-\overline{a}_{j-1}f^j & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j-1)}\in J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\notin J\\
e'^j & \overset{\text{déf}}{=} & f^j-\overline{a}_{j-1}e^j & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-(j-1)}\notin J & \text{et} & \sigma_0\circ\varphi^{-j}\in J
\end{array}$$

et pour $j=0$:

$$\begin{array}{lllll}
e'^0 & \overset{\text{déf}}{=} & e^0 & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-(f-1)}\in J\\
e'^0 & \overset{\text{déf}}{=} & e^0-\overline{a}_{f-1}^{-1}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}'}\right)^{-1}f^0 & \text{si} & \sigma_0\circ\varphi^{-(f-1)}\notin J
\end{array}$$

en se souvenant que $\sigma_0 \in J$ par hypothèse. Un calcul au cas par cas, un peu laborieux mais sans difficulté, donne alors $\varphi(e'^0) = e'^1$ puis :

$$\begin{cases} \varphi(e'^j) &= & e'^{j+1} & \text{si} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(j-1)} \notin F(J) \\ \varphi(e'^j) &= & -\overline{a}_{j-1}e'^{j+1} & \text{si} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(j-1)} \in F(J) \end{cases} \qquad 1 \leq j \leq f-2$$

$$\begin{cases} \varphi_{r_j+1}(f'^j) &= & f'^{j+1} - \overline{a}_j e'^{j+1} & \text{si} & \sigma_0 \circ \varphi^{-j} \notin F(J) \\ \varphi_{r_j+1}(f'^j) &= & \overline{a}_j^{-1} f'^{j+1} - \overline{a}_j^{-1} e'^{j+1} & \text{si} & \sigma_0 \circ \varphi^{-j} \in F(J) \end{cases} \qquad 0 \leq j \leq f-2$$

et si $j = f-1$:

$$\begin{cases} \varphi(e'^{f-1}) &= & \overline{\alpha}'^{-1}e'^0 & \text{si} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(f-2)} \in J & \text{et} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(f-1)} \in J \\ \varphi(e'^{f-1}) &= & -\overline{a}_{f-2}\overline{\alpha}'^{-1}e'^0 & \text{si} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(f-2)} \notin J & \text{et} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(f-1)} \in J \\ \varphi(e'^{f-1}) &= & -\overline{a}_{f-1}\overline{\alpha}'^{-1}e'^0 & \text{si} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(f-2)} \notin J & \text{et} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(f-1)} \notin J \\ \varphi(e'^{f-1}) &= & \overline{a}_{f-2}\overline{a}_{f-1}\overline{\alpha}'^{-1}e'^0 & \text{si} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(f-2)} \in J & \text{et} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(f-1)} \notin J \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{r_{f-1}+1}(f'^{f-1}) &= & \overline{\alpha}^{-1}f'^0 - \overline{a}_{f-1}\overline{\alpha}'^{-1}e'^0 & \text{si} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(f-1)} \in J \\ \varphi_{r_{f-1}+1}(f'^{f-1}) &= & \overline{a}_{f-1}^{-1}\overline{\alpha}^{-1}f'^0 + \overline{\alpha}'^{-1}e'^0 & \text{si} & \sigma_0 \circ \varphi^{-(f-1)} \notin J \end{cases}$$

(lorsque $f = 1$, on obtient simplement $\begin{cases} \varphi(e'^0) &= \overline{\alpha}'^{-1}e'^0 \\ \varphi_{r_0+1}(f'^0) &= \overline{\alpha}^{-1}f'^0 - \overline{a}_0\overline{\alpha}'^{-1}e'^0 \end{cases}$).

Le changement de base :

$$v^{\sigma_0} \overset{\text{déf}}{=} e'^0,\ v^{\sigma_0\circ\varphi^{-1}} \overset{\text{déf}}{=} e'^1,\ v^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} \overset{\text{déf}}{=} \Big(\prod_{\substack{0\leq i\leq j-2 \\ \sigma_0\circ\varphi^{-i}\in F(J)}} (-\overline{a}_i)\Big)e'^j \text{ si } 2 \leq j \leq f-1$$

$$w^{\sigma_0} \overset{\text{déf}}{=} f'^0,\ w^{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} \overset{\text{déf}}{=} \Big(\prod_{\substack{0\leq i\leq j-1 \\ \sigma_0\circ\varphi^{-i}\in F(J)}} \overline{a}_i^{-1}\Big)f'^j \text{ si } 1 \leq j \leq f-1$$

donne alors par un calcul facile exactement la présentation de l'énoncé (en remarquant que $\sigma_0 \circ \varphi^{-(f-1)} \in F(J)$ si et seulement si $\sigma_0 \circ \varphi^{-(f-1)} \notin J$ et que $\prod_{\substack{0\leq i\leq f-1 \\ \sigma_0\circ\varphi^{-i}\in F(J)}} (-\overline{a}_i) = \prod_{\sigma\in\mathcal{S}} \overline{a}_\sigma$ car $|F(J)|$ est pair). Le calcul lorsque $\sigma_0 \notin J$ est analogue (on peut aussi utiliser la remarque 2.2.2(iv)). □

Si J, $\mathcal{M}$ et $\overline{\rho}$ sont comme dans la proposition 2.3.1 (ou la proposition 2.2.4), on voit avec (2) et (15) que l'on a :

$$Z(\overline{\rho}) = \{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}, \overline{a}_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}} = 0\} = \{\sigma \in \mathcal{S}, \overline{a}_\sigma = 0\}$$

(ce résultat découle aussi de [**3**, Thm.8.1] (cas scindé) et de [**3**, Prop.7.3] et (7) (cas non scindé)). En particulier, on a toujours $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$ par la remarque 2.2.2(iii) si $\overline{\rho}$ provient d'un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type J.

2.4. Valeurs propres de Frobenius. — On calcule la valuation et le "coefficient dominant" des valeurs propres de Frobenius sur le module de Dieudonné d'un groupe p-divisible provenant d'un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type J dont la représentation galoisienne résiduelle associée est réductible générique.

On conserve les notations des sections précédentes. Le théorème suivant est le résultat local clef de cet article.

Théorème 2.4.1. — *Soit $\overline{\rho}$ réductible générique, $J \subsetneq \mathcal{S}$ et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type J tel que $\overline{\rho} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{M}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)^\vee(1)$. Soit G le groupe p-divisible avec donnée de descente correspondant à $\mathcal{M}$ et D le module de Dieudonné contravariant associé à G. Alors la valeur propre de φ^f sur la partie isotypique de D pour le caractère $\eta'(J)$ de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$ est égale à $p^{|J|}\alpha'$ où $\alpha' \in \mathcal{O}_E^\times$ a pour réduction dans $k_E^\times$:*

$$\overline{\alpha}' = (-1)^{\frac{1}{2}|F(J)|}\Big(\prod_{\sigma \in J} \alpha_\sigma \prod_{\sigma \notin J} \beta_\sigma\Big)^{-1} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma \in J \\ \sigma\circ\varphi^{-1} \notin J}} x_\sigma}{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma \notin J \\ \sigma\circ\varphi^{-1} \in J}} x_\sigma} \tag{17}$$

avec $(\alpha_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$, $(\beta_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$ et $(x_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$ comme en (1).

Démonstration. — Le module de Dieudonné D vérifie $D = \mathcal{M} \otimes_S E$ où la flèche $S \twoheadrightarrow \mathcal{O}_E \subset E$ est le morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres qui envoie u et ses puissances divisées sur 0. En revenant à la définition de I_η et $I_{\eta'}$ en (9) et (10) (pour $(\eta, \eta') = (\eta(J), \eta'(J))$), on voit que la valeur propre de φ^f sur la partie isotypique de D pour le caractère $\eta'(J)$ de $\mathrm{Gal}(L[\sqrt[e]{-p}]/L)$ est $p^{|I_{\eta'(J)}|}\alpha'$. Mais on a $|I_{\eta'(J)}| = |J|$ par la remarque 2.2.2(ii). Il reste donc à démontrer (17).
Notons d'abord que le terme de droite en (17) est dans $k_E^\times$ (car $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$, cf. fin de la section 2.3). Comme il ne dépend que de $\overline{\rho}$ et de J par le lemme 2.1.1, il suffirait de montrer (17) avec le module de Fontaine-Laffaille de la proposition 2.3.1. Néanmoins, comme nous avons laissé la preuve du lemme 2.1.1 au lecteur, donnons ici une preuve directe de l'identité (17) qui n'utilise pas ce lemme. Fixons un plongement $\sigma_0 : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k_E$. En explicitant le changement de base qui permet de passer du module de Fontaine-Laffaille contravariant de $\overline{\rho} \otimes \theta^{-1}$ du § 2.1 à celui de la proposition 2.3.1, on voit que l'on a les égalités $\overline{\alpha\alpha'} = \lambda\mu$ et $A = \lambda$ (notons que, si $\overline{\rho}$ est scindée, il y a deux choix de θ comme dans la Remarque 2.1.2(ii), mais une fois que l'on a fixé l'un de ces choix, on a ces égalités en considérant le module de Fontaine-Laffaille correspondant). De plus par (11) on a :

$$\overline{\alpha}' = \mu \prod_{\sigma \in F(J)} \overline{a}_\sigma \ \text{ si } \ \sigma_0 \in J, \quad \overline{\alpha}' = \lambda \prod_{\sigma \in F(J)} \overline{a}_\sigma^{-1} \ \text{ si } \ \sigma_0 \notin J. \tag{18}$$

Nous allons expliciter $\prod_{\sigma \in F(J)} \overline{a}_\sigma$. Posons $\alpha_i \overset{\text{déf}}{=} \alpha_{\sigma_0\circ\varphi^{-i}}$, $\beta_i \overset{\text{déf}}{=} \beta_{\sigma_0\circ\varphi^{-i}}$ et $x_j \overset{\text{déf}}{=} x_{\sigma_0\circ\varphi^{-j}}$, on voit que l'on a aussi $A_j = -\big(\prod_{0\le i\le j} \frac{\beta_i}{\alpha_i}\big)x_j$ pour $0 \le j \le f-2$ et $A_{f-1} = -\lambda^{-1}x_{f-1}$. Un calcul immédiat à partir de (15) donne alors pour

$j \in \{0, \cdots, f-1\}$ (avec $\overline{a}_j = \overline{a}_{\sigma_0 \circ \varphi^{-j}}$) :

$$(19) \quad \begin{cases} \overline{a}_j = -x_j \prod_{0 \le i \le j} \frac{\beta_i}{\alpha_i} \prod_{\substack{0 \le i \le j-1 \\ \sigma_0 \circ \varphi^{-i} \in F(J)}} (-\overline{a}_i^2) & \text{si } \sigma_0 \circ \varphi^{-j} \notin F(J) \\ \overline{a}_j = -x_j^{-1} \prod_{0 \le i \le j} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \prod_{\substack{0 \le i \le j-1 \\ \sigma_0 \circ \varphi^{-i} \in F(J)}} (-\overline{a}_i^{-2}) & \text{si } \sigma_0 \circ \varphi^{-j} \in F(J). \end{cases}$$

Comme dans la preuve de la proposition 2.2.4, notons $0 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{2t-1} < j_{2t} \le f-1$ les éléments de $\{0, \cdots, f-1\}$ tels que $\sigma_0 \circ \varphi^{-j} \in F(J)$. Nous allons déduire de (19) par récurrence les formules pour $1 \le s \le \frac{1}{2}|F(J)|$:

$$(20) \quad \overline{a}_{j_1}\overline{a}_{j_2} \cdots \overline{a}_{j_{2s-1}} = (-1)^s \frac{\left(\prod_{0 \le i \le j_{2s-1}} \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)}{x_{j_{2s-1}}} \frac{\prod_{i=1}^{s-1} \left[x_{j_{2i}} \left(\prod_{0 \le k \le j_{2i-1}} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \right]}{\prod_{i=1}^{s-1} \left[x_{j_{2i-1}} \left(\prod_{0 \le k \le j_{2i}} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \right]}$$

$$(21) \quad \overline{a}_{j_1}\overline{a}_{j_2} \cdots \overline{a}_{j_{2s}} = (-1)^s \frac{\prod_{i=1}^{s} \left[x_{j_{2i-1}} \left(\prod_{0 \le k \le j_{2i}} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \right]}{\prod_{i=1}^{s} \left[x_{j_{2i}} \left(\prod_{0 \le k \le j_{2i-1}} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \right]}.$$

Pour $s = 1$, l'égalité (20) est juste la deuxième égalité en (19) pour $j = j_1$. Montrons comment (21) se déduit de (20). La deuxième égalité en (19) pour $j = j_{2s}$ se récrit :

$$\overline{a}_{j_{2s}} = x_{j_{2s}}^{-1} \Big(\prod_{0 \le i \le j_{2s}} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \Big) \prod_{i=1}^{2s-1} \overline{a}_{j_i}^{-2}.$$

En multipliant des deux côtés par $\overline{a}_{j_1}\overline{a}_{j_2} \cdots \overline{a}_{j_{2s-1}}$ on obtient :

$$\overline{a}_{j_1}\overline{a}_{j_2} \cdots \overline{a}_{j_{2s}} = x_{j_{2s}}^{-1} \Big(\prod_{0 \le i \le j_{2s}} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \Big) (\overline{a}_{j_1}\overline{a}_{j_2} \cdots \overline{a}_{j_{2s-1}})^{-1}.$$

En remplaçant $\overline{a}_{j_1}\overline{a}_{j_2} \cdots \overline{a}_{j_{2s-1}}$ à droite par la valeur donnée en (20), on obtient exactement (21). En utilisant la deuxième égalité en (19) pour $j = j_{2s+1}$, on montre de manière analogue (20) pour $s+1$ à partir de (21) pour s. En appliquant (21) à $s = t$, on a en particulier :

$$\prod_{\sigma \in F(J)} \overline{a}_\sigma = (-1)^{\frac{1}{2}|F(J)|} \frac{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}|F(J)|} \left[x_{j_{2i-1}} \left(\prod_{0 \le k \le j_{2i}} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \right]}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}|F(J)|} \left[x_{j_{2i}} \left(\prod_{0 \le k \le j_{2i-1}} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \right]}$$

qui se récrit, en distinguant les deux cas $\sigma_0 \in J$ et $\sigma_0 \notin J$:

$$\prod_{\sigma \in F(J)} \overline{a}_\sigma = (-1)^{\frac{1}{2}|F(J)|}\left(\prod_{\sigma \notin J} \frac{\alpha_\sigma}{\beta_\sigma}\right) \frac{\prod_{\substack{\sigma \in J \\ \sigma\circ\varphi^{-1} \notin J}} x_\sigma}{\prod_{\substack{\sigma \notin J \\ \sigma\circ\varphi^{-1} \in J}} x_\sigma} \quad \text{si} \quad \sigma_0 \in J$$

$$\prod_{\sigma \in F(J)} \overline{a}_\sigma = (-1)^{\frac{1}{2}|F(J)|}\left(\prod_{\sigma \in J} \frac{\alpha_\sigma}{\beta_\sigma}\right) \frac{\prod_{\substack{\sigma \notin J \\ \sigma\circ\varphi^{-1} \in J}} x_\sigma}{\prod_{\substack{\sigma \in J \\ \sigma\circ\varphi^{-1} \notin J}} x_\sigma} \quad \text{si} \quad \sigma_0 \notin J.$$

Avec (18) on en déduit (17) puisque $\mu = \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} \alpha_\sigma^{-1}$ et $\lambda = \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} \beta_\sigma^{-1}$. □

Remarque 2.4.2. — Pour $J = \mathcal{S}$, on a $\overline{\alpha}' = (\prod_{\sigma \in \mathcal{S}} \alpha_\sigma)^{-1} = \mu$ et pour $J = \emptyset$, on a $\overline{\alpha}' = (\prod_{\sigma \in \mathcal{S}} \beta_\sigma)^{-1} = \lambda$.

2.5. Séries principales et sommes de Jacobi. — On calcule la réduction modulo p de certains invariants associés aux séries principales modérément ramifiées de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur E provenant des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ issues de certains $\mathcal{O}_E$-modules fortement divisibles de type J.

On conserve les notations précédentes. On note val la valuation p-adique (sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$) normalisée par $\mathrm{val}(p) = 1$ et $|\cdot| \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{q^{\mathrm{val}(\cdot)}}$.

Rappelons d'abord le théorème suivant dû à Stickelberger qui donne la valuation p-adique ainsi que le "coefficient dominant" de certaines sommes de Jacobi.

Théorème 2.5.1 **([34])**. — *Soit a, b deux entiers tels que $0 < a, b \leq q-1$ et $q-1$ ne divise pas $a+b$. Écrivons :*

$$a = \sum_{j=0}^{f-1} p^j a_j, \quad b = \sum_{j=0}^{f-1} p^j b_j$$

$$a+b = \sum_{j=0}^{f-1} p^j (a+b)_j + (q-1)Q$$

où $a_j, b_j, (a+b)_j \in \{0, \cdots, p-1\}$ et $Q \geq 0$. Soit $\sigma_0 : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k_E$ un plongement quelconque. On a dans $\mathcal{O}_E$:

$$\sum_{s \in \mathbb{F}_q} [\sigma_0(s)]^a [1 - \sigma_0(s)]^b = Up^u + C$$

où :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{p-1}\Big(\sum_{j=0}^{f-1} p-1-(a_j+b_j-(a+b)_j)\Big) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ U &= (-1)^{f-1+u}\frac{\prod_{j=0}^{f-1} a_j!b_j!}{\prod_{j=0}^{f-1}(a+b)_j!} \in \mathbb{Z}_p^\times \end{aligned}$$

et où $\mathrm{val}(C) > u$.

Si $\chi, \chi' : L^\times \to E^\times$ sont deux caractères multiplicatifs localement constants, on note $\chi' \otimes \chi : \mathrm{B}(L) \to E^\times$ le caractère :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \chi'(a)\chi(d)$$

et $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(L)}^{\mathrm{GL}_2(L)}\chi' \otimes \chi$ le E-espace vectoriel des fonctions localement constantes $f : \mathrm{GL}_2(L) \to E$ telles que :

$$f(bg) = (\chi' \otimes \chi)(b)f(g)$$

($b \in \mathrm{B}(L)$, $g \in \mathrm{GL}_2(L)$) que l'on munit de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(L)$ par translation à droite sur les fonctions.

Théorème 2.5.2. — *Soit $\overline{\rho}$ réductible générique, $J \subseteq \mathcal{S}$ et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type J tel que $\overline{\rho} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\overline{\mathcal{M}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)^\vee(1)$. Soit G le groupe p-divisible avec donnée de descente correspondant à $\mathcal{M}$, D le module de Dieudonné contravariant associé à G et V (resp. V') la valeur propre de φ^f sur la partie $\eta(J)$-isotypique (resp. $\eta'(J)$-isotypique) de D. Considérons la série principale modérément ramifiée :*

$$\pi_p \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(L)}^{\mathrm{GL}_2(L)}\eta'(J)\mathrm{nr}(V')|\cdot| \otimes \eta(J)\mathrm{nr}(V)$$

où $\eta(J)$ et $\eta'(J)$ sont vus comme des caractères de $L^\times$ en envoyant p et $1+p\mathcal{O}_L$ vers 1 et soit $\widehat{v} \in \pi_p^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ non nul sur lequel $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ agit par $\eta'(J) \otimes \eta(J)$ (un tel vecteur existe). Si $J \notin \{\emptyset, \mathcal{S}\}$, il existe un unique élément $\widehat{x}(J) \in \mathcal{O}_E^\times$ tel que dans π_p :

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{\sigma\in J}[\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma}\Big)\begin{pmatrix} [s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}\widehat{v} = \widehat{x}(J)\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{\sigma\notin J}[\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma}\Big)\begin{pmatrix} [s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\widehat{v}.$$

De plus, la réduction de $\widehat{x}(J)$ dans k_E est :

$$-\theta(-1)\Big(\prod_{\sigma\in J}\alpha_\sigma\prod_{\sigma\notin J}\beta_\sigma\Big)^{-1}\frac{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma\in J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\notin J}} x_\sigma(r_\sigma+1)}{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma\notin J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\in J}} x_\sigma(r_\sigma+1)} \tag{22}$$

avec $(\alpha_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$, $(\beta_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$ et $(x_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$ comme en (1).

Démonstration. — Notons que la série principale π_p correspond à la représentation de Weil associée à D muni de la donnée de descente (selon [**21**]) par la correspondance de Langlands locale convenablement normalisée. Un calcul direct et élémentaire dans π_p donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \widehat{v} = \frac{1}{q} V' \sum_{t \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \widehat{v}$$

ce qui amène à calculer $X \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{s,t \in \mathbb{F}_q} \left(\prod_{\sigma \in J} [\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma} \right) \begin{pmatrix} [s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \widehat{v}$. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} [s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & [s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } \ t = 0 \\ &= \begin{pmatrix} [s] + [t^{-1}] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [t] & 1 \\ 0 & -[t^{-1}] \end{pmatrix} \quad \text{si } \ t \neq 0 \end{aligned} \tag{23}$$

d'où :

$$\begin{aligned} X = \sum_{s \in \mathbb{F}_q} & \left(\prod_{\sigma \in J} [\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma} \right) \begin{pmatrix} 1 & [s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widehat{v} \\ & + \sum_{s \in \mathbb{F}_q, t \in \mathbb{F}_q^\times} \left(\prod_{\sigma \in J} [\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma} \right) \begin{pmatrix} [s] + [t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [t^{-1}] & 1 \\ 0 & -[t] \end{pmatrix} \widehat{v}. \end{aligned}$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 & [s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widehat{v} = \widehat{v}$ et comme $\sum_{s \in \mathbb{F}_q} \prod_{\sigma \in J} [\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma} = 0$ (car $J \neq \emptyset$), la première somme dans X est nulle. Par (3) et la définition des c_σ (lemme 2.1.3), on a :

$$\begin{pmatrix} [t^{-1}] & 1 \\ 0 & -[t] \end{pmatrix} \widehat{v} = [\theta(-1)](-1)^{\sum_{\sigma \in J} r_\sigma} \left(\prod_{\sigma \in \mathcal{S}} [\sigma(t)]^{c_\sigma} \right) \widehat{v}$$

et la deuxième somme dans X se récrit avec un changement de variables évident (en utilisant encore que $\widehat{v}$ est invariant sous $\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)$) :

$$\begin{aligned} X &= [\theta(-1)](-1)^{\sum_{\sigma \in J} r_\sigma} \sum_{s,t \in \mathbb{F}_q} \left(\prod_{\sigma \in J} [\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma} \right) \left(\prod_{\sigma \in \mathcal{S}} [\sigma(t)]^{c_\sigma} \right) \begin{pmatrix} [s+t] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \widehat{v} \\ &= [\theta(-1)](-1)^{\sum_{\sigma \in J} r_\sigma} \sum_{s \in \mathbb{F}_q} \left(\sum_{t \in \mathbb{F}_q} \left(\prod_{\sigma \in J} [\sigma(t)]^{p-1-r_\sigma} \right) \left(\prod_{\sigma \in \mathcal{S}} [\sigma(s-t)]^{c_\sigma} \right) \right) \begin{pmatrix} [s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \widehat{v}. \end{aligned}$$

Comme $J \neq \mathcal{S}$, on a $\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{\sigma\in J}[\sigma(t)]^{p-1-r_\sigma}\Big)\Big(\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}[\sigma(-t)]^{c_\sigma}\Big) = 0$, d'où :

$$X = [\theta(-1)](-1)^{\sum_{\sigma\in J} r_\sigma} \sum_{s\in\mathbb{F}_q}\Bigg[\Big(\prod_{\sigma\in J}[\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma}\Big)\Big(\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}[\sigma(s)]^{c_\sigma}\Big) \Bigg(\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{\sigma\in J}[\sigma(t)]^{p-1-r_\sigma}\Big)\Big(\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}[\sigma(1-t)]^{c_\sigma}\Big)\Bigg)\Bigg]\begin{pmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\widehat{v}$$

soit en utilisant le lemme 2.1.3 :

$$X = [\theta(-1)](-1)^{\sum_{\sigma\in J} r_\sigma} T \sum_{s\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{\sigma\notin J}[\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma}\Big)\begin{pmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\widehat{v}$$

où $T \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{t\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{\sigma\in J}[\sigma(t)]^{p-1-r_\sigma}\Big)\Big(\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}[\sigma(1-t)]^{c_\sigma}\Big)$. On a donc :

$$\widehat{x}(J) = [\theta(-1)](-1)^{\sum_{\sigma\in J} r_\sigma}\frac{1}{p^f}V'T. \tag{24}$$

Comme $J \notin \{\emptyset, \mathcal{S}\}$, on peut appliquer le théorème 2.5.1 à T (avec $a \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma_0\circ\varphi^j\in J} p^j(p-1-r_{\sigma_0\circ\varphi^j})$ et $b \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma_0\circ\varphi^j\in\mathcal{S}} p^j c_{\sigma_0\circ\varphi^j})$. Un calcul élémentaire utilisant le lemme 2.1.3 donne :

$$\begin{array}{rcll}(a+b)_j & = & 0 & \text{si } \ \sigma_0\circ\varphi^j \in J\\ (a+b)_j & = & p-1-r_{\sigma_0\circ\varphi^j} & \text{si } \ \sigma_0\circ\varphi^j \notin J\end{array}$$

d'où on déduit :

$$a_j + b_j - (a+b)_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \ \sigma_0\circ\varphi^j \notin J \ \text{ et } \ \sigma_0\circ\varphi^{j-1} \notin J\\ -1 & \text{si } \ \sigma_0\circ\varphi^j \notin J \ \text{ et } \ \sigma_0\circ\varphi^{j-1} \in J\\ p-1 & \text{si } \ \sigma_0\circ\varphi^j \in J \ \text{ et } \ \sigma_0\circ\varphi^{j-1} \in J\\ p & \text{si } \ \sigma_0\circ\varphi^j \in J \ \text{ et } \ \sigma_0\circ\varphi^{j-1} \notin J.\end{cases}$$

On a ainsi :

$$u = \frac{1}{p-1}\Bigg(\sum_{\substack{\sigma_0\circ\varphi^j\notin J\\ \sigma_0\circ\varphi^{j-1}\notin J}} p-1 \ + \sum_{\substack{\sigma_0\circ\varphi^j\notin J\\ \sigma_0\circ\varphi^{j-1}\in J}} p \ - \sum_{\substack{\sigma_0\circ\varphi^j\in J\\ \sigma_0\circ\varphi^{j-1}\notin J}} 1\Bigg) = |\mathcal{S}\backslash J|$$

et :

$$U = (-1)^{|J|+1}\,\frac{\displaystyle\prod_{\sigma\in J}(p-1-r_\sigma)!\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}c_\sigma!}{\displaystyle\prod_{\sigma\notin J}(p-1-r_\sigma)!}.$$

En utilisant $n!(p-1-n)! \equiv (-1)^{n-1}$ modulo p si $n \in \{0, \cdots, p-1\}$ et le lemme 2.1.3 on obtient :

$$U \equiv (-1)^{1+\frac{|F(J)|}{2}+\sum_{\sigma\in J} r_\sigma} \frac{\prod\limits_{\substack{\sigma\in J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\notin J}} r_\sigma+1}{\prod\limits_{\substack{\sigma\notin J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\in J}} r_\sigma+1} \ \text{ modulo } \ p.$$

Par ailleurs les valeurs propres de φ^f sur D sont (avec les notations du § 2.2) $V = p^{|I_{\eta(J)}|}\alpha = p^{|\mathcal{S}\setminus J|}\alpha$ et $V' = p^{|I_{\eta'(J)}|}\alpha' = p^{|J|}\alpha'$ (cf. remarque 2.2.2(ii)). On a donc avec ce qui précède et (24) :

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(J) &= [\theta(-1)](-1)^{\sum_{\sigma\in J} r_\sigma}\frac{1}{p^f}p^{|J|}\alpha'(-1)^{1+\frac{|F(J)|}{2}+\sum_{\sigma\in J} r_\sigma}\frac{\prod\limits_{\substack{\sigma\in J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\notin J}} r_\sigma+1}{\prod\limits_{\substack{\sigma\notin J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\in J}} r_\sigma+1}p^{|\mathcal{S}\setminus J|}+\delta\\
&= [\theta(-1)]\alpha'(-1)^{1+\frac{|F(J)|}{2}}\frac{\prod\limits_{\substack{\sigma\in J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\notin J}} r_\sigma+1}{\prod\limits_{\substack{\sigma\notin J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\in J}} r_\sigma+1}+\delta
\end{aligned}$$

où $\delta \in \mathcal{O}_E$ a une valuation strictement positive. On obtient alors l'égalité (22) avec (17). $\square$

Remarque 2.5.3. — Si $J = \mathcal{S}$, un calcul analogue à celui de la preuve du théorème 2.5.2 donne (rappelons que $V = p^{|\mathcal{S}\setminus J|}\alpha$ et $V' = p^{|J|}\alpha'$) :

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\left(\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}[\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma}\right)\begin{pmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{pmatrix}\widehat{v} = -[\theta(-1)]\alpha'\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\begin{pmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\widehat{v}+ [\theta(-1)]q\alpha'\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\widehat{v}.$$

On en déduit l'équation pour $J = \emptyset$ en remplaçant $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{smallmatrix}\right)\widehat{v}$ par $\widehat{v}$ et en utilisant $\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right)\widehat{v} = \alpha\alpha'\widehat{v}$ et la remarque 2.2.2(iv) :

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\begin{pmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{pmatrix}\widehat{v} = -[\theta(-1)]\alpha'\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\left(\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}[\sigma(s)]^{p-1-r_\sigma}\right)\begin{pmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\widehat{v}+ q\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\widehat{v}.$$

2.6. Valeurs spéciales de paramètres. — On définit des paramètres $x(J)$ sur certaines représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur k_E et on montre comment les résultats des parties précédentes permettent de "distinguer" des valeurs spéciales de ces paramètres.

On conserve les notations des sections précédentes, en particulier on fixe une représentation $\overline{\rho}$ réductible comme au § 2.1. Pour $J \subseteq \mathcal{S}$, on note $\tau(J)$ l'unique poids de Serre tel que l'action de $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ sur $\tau(J)^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ est donnée par le caractère $\overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J)$ (cf. (3), notons que $\tau(J)$ dépend aussi de $\overline{\rho}$). Un tel poids est unique car $\overline{\eta}'(J) \neq \overline{\eta}(J)$. On a par exemple $\tau(\emptyset) = (\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}(\mathrm{Sym}^{r_\sigma} k_E^2)^\sigma) \otimes \theta \circ \det \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ et $\tau(\mathcal{S}) = (\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}(\mathrm{Sym}^{p-1-r_\sigma} k_E^2)^\sigma) \otimes \prod_{\sigma\in\mathcal{S}} \sigma \circ \det^{r_\sigma} \otimes \theta \circ \det$. De plus $\tau(\mathcal{S}\backslash J)$ est le socle de la représentation $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$ du lemme 2.1.4, $\tau(J)$ est son co-socle ([**5**, § 2]) et $\tau(\emptyset)$ un de ses constituants (voir la preuve du lemme 2.1.4 ou celle du lemme 2.6.2(ii) ci-dessous).

La proposition suivante définit abstraitement les paramètres qui sont au coeur de cet article.

Proposition 2.6.1. — *Soit $J \subseteq \mathcal{S}$ et π une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur k_E avec un caractère central et vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $\tau(\emptyset)$ apparaît dans le $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-socle de π avec multiplicité 1
(ii) $\tau(\emptyset)$ est le seul constituant commun à $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J)$ et au $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-socle de π
(iii) π contient l'unique quotient de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$ de socle $\tau(\emptyset)$.
Alors il existe (à multiplication par un scalaire non nul près) un unique vecteur $v \in \pi^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ non nul sur lequel $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ agisse par $\overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J)$ et un unique élément $x(J) \in k_E^\times$ tel que l'on ait l'égalité dans π :

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{\sigma\in J}\sigma(s)^{p-1-r_\sigma}\Big)\begin{pmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & 0\end{pmatrix} v = x(J)\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{\sigma\notin J}\sigma(s)^{p-1-r_\sigma}\Big)\begin{pmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} v.$$

Démonstration. — Par (i), (ii) et (iii), on a un unique (à homothétie près) morphisme non nul $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-équivariant :

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J) \longrightarrow \pi \tag{25}$$

et ce morphisme se factorise par l'unique quotient de l'induite de socle $\tau(\emptyset)$. Il envoie de plus l'unique vecteur non nul de $\big(\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)\big)^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ sur lequel $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ agit par $\overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$ vers un vecteur non nul $v \in \pi$ avec la même propriété. L'unicité d'un $v \in \pi$ comme dans l'énoncé résulte par réciprocité de Frobenius de l'unicité du morphisme (25). Comme $\tau(\emptyset)$ est en "position $\mathcal{S}\backslash J$" dans l'induite $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$, par [**5**, Lem.2.7] le vecteur :

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{\sigma\in\mathcal{S}\backslash J}\sigma(s)^{p-1-r_\sigma}\Big)\left(\begin{smallmatrix}[s] & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) v$$

est un générateur de $\tau(\emptyset)^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ dans π. Comme $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ agit sur $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v \in \pi^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ par $\overline{\eta}(J)\otimes\overline{\eta}'(J)$, on en déduit par réciprocité de Frobenius une surjection canonique :

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}(J)\otimes\overline{\eta}'(J) \twoheadrightarrow \left\langle \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v\right\rangle \subset \pi$$

vers la sous-$\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-représentation de π engendrée par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v$. Comme les constituants de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J)$ et de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}(J)\otimes\overline{\eta}'(J)$ sont les mêmes (mais dans l'"ordre inverse"), par (ii) cette surjection se factorise nécessairement par l'unique quotient de l'induite de socle $\tau(\emptyset)$. Par (i), ce socle est aussi celui de l'image du morphisme (25). Par le même raisonnement que précédemment (en remplaçant $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J)$ par $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}(J)\otimes\overline{\eta}'(J)$ et v par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v$) le vecteur :

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{\sigma\in J}\sigma(s)^{p-1-r_\sigma}\Big)\left(\begin{smallmatrix} [s] & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v$$

est donc aussi un générateur de $\tau(\emptyset)^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ dans π. Comme $\dim_{k_E}\tau(\emptyset)^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)} = 1$, il doit exister un scalaire non nul $x(J)$ comme dans l'énoncé. $\square$

Notons que si J et π vérifient les hypothèses de la proposition 2.6.1, alors $\mathcal{S}\backslash J$ et π les vérifient aussi et on a la relation $x(J)x(\mathcal{S}\backslash J) = \omega_\pi(p)$ où ω_π est le caractère central de π (cela vient du fait que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ agit par la multiplication par $\omega_\pi(p)$).

Bien que nous n'en ayons pas strictement besoin pour les applications globales, il est éclairant de replacer la proposition 2.6.1 dans le contexte de [**5**].

On rappelle que $\overline{\rho}$ est réductible générique et que $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ désigne l'ensemble de ses poids de Serre (cf. § 2.1). Soit $D(\overline{\rho})$ la représentation maximale (pour l'inclusion) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur k_E vérifiant les deux conditions :
(i) le socle de $D(\overline{\rho})$ est $\oplus_{\tau\in\mathcal{D}(\overline{\rho})}\tau$
(ii) les constituants de ce socle n'apparaissent pas ailleurs dans $D(\overline{\rho})$.
On peut montrer qu'une telle représentation existe (cf. [**5**, Prop.13.1]). De plus, $D(\overline{\rho})$ est alors de la forme $\oplus_{\tau\in\mathcal{D}(\overline{\rho})}D_\tau(\overline{\rho})$ où $D_\tau(\overline{\rho})$ est l'unique facteur direct de $D(\overline{\rho})$ de socle τ et les caractères de $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ qui apparaissent sur $D(\overline{\rho})^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ sont tous distincts (i.e. apparaissent avec multiplicité 1).

Lemme 2.6.2. — *Soit $J \subseteq \mathcal{S}$.*
(i) Le poids de Serre $\tau(J)$ est un constituant de $D(\overline{\rho})$ (rappelons que $\tau(J)$ dépend de J et $\overline{\rho}$).
(ii) Le poids de Serre $\tau(J)$ est un constituant de $D_{\tau(\emptyset)}(\overline{\rho})$ si et seulement si $Z(\overline{\rho})\cap\{\sigma\in\mathcal{S}, \sigma\notin J, \sigma\circ\varphi^{-1}\in J\} = \emptyset$.

Démonstration. — (i) Comme $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J)$ a certains de ses constituants dans $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ et comme $\tau(J)$ est son co-socle, on en déduit qu'elle possède un quotient de socle un poids de Serre dans $\mathcal{D}(\overline{\rho})$, de co-socle $\tau(J)$ et dont aucun

constituant à part le socle n'est dans $\mathcal{D}(\overline{\rho})$. Par maximalité de $D(\overline{\rho})$, on en déduit que ce quotient est un sous-objet de $D(\overline{\rho})$, d'où (i).
(ii) On fixe $\sigma_0 \in \mathcal{S}$ et on reprend les notations de la preuve du lemme 2.1.4. Les constituants de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$ qui sont dans $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ sont les poids de Serre indexés par les parties de $\mathcal{S}$ contenant $\{\sigma_0 \circ \varphi^j, j \in J^{\min}\}$ et contenues dans $\{\sigma_0 \circ \varphi^j, j \in J^{\max}\}$ où $J^{\min}$ et $J^{\max}$ sont comme suit (cf. [**3**, Prop.4.3] et les égalités (19) de la preuve de *loc.cit.*) :

$$\begin{aligned} J^{\min} &= \{j, \lambda_{j+1}(x_{j+1}) = p-1-x_{j+1} \text{ ou } \big(\lambda_{j+1}(x_{j+1}) = x_{j+1}+1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et } \sigma_0 \circ \varphi^{j+1} \notin Z(\overline{\rho})\big)\} \\ J^{\max} &= \{j, \lambda_{j+1}(x_{j+1}) \in \{p-1-x_{j+1}, x_{j+1}+1\} \text{ ou } \big(\lambda_{j+1}(x_{j+1}) = p-2-x_{j+1} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et } \sigma_0 \circ \varphi^{j+1} \in Z(\overline{\rho})\big)\} \end{aligned}$$

avec $(\lambda_j(x_j))_{j\in\{0,\cdots,f-1\}}$ comme en (6). En particulier, on a toujours (cf. fin de la preuve du lemme 2.1.4) :

$$\{\sigma_0 \circ \varphi^j, j \in J^{\min}\} \subseteq \mathcal{S}\backslash J \subseteq \{\sigma_0 \circ \varphi^j, j \in J^{\max}\}.$$

De plus $\tau(\emptyset)$ est indexé par $\mathcal{S}\backslash J$ dans $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$. Par construction de $D(\overline{\rho})$ et par [**3**, Prop.4.3] (avec [**5**, Thm.2.4]), on voit donc que $\tau(J)$ est un constituant de $D_{\tau(\emptyset)}(\overline{\rho})$ si et seulement si $\mathcal{S}\backslash J = \{\sigma_0 \circ \varphi^j, j \in J^{\max}\}$. En procédant comme dans la preuve du lemme 2.1.4, cela est équivalent à $\sigma_0 \circ \varphi^{j+1} \notin Z(\overline{\rho})$ si $\lambda_{j+1}(x_{j+1}) = p-2-x_{j+1}$, c'est-à-dire si $\sigma_0 \circ \varphi^{j+1} \notin J$ et $\sigma_0 \circ \varphi^j \in J$ par (6). C'est donc équivalent à $Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \notin J, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\} = \emptyset$. □

La proposition suivante n'est pas utilisée dans la suite, mais donne une variante plus précise de la proposition 2.6.1.

Proposition 2.6.3. — *Soit π une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur k_E avec un caractère central et vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) π contient $D(\overline{\rho})$
(ii) le $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-socle de π est celui de $D(\overline{\rho})$
(iii) $D(\overline{\rho})^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ est stable par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dans π.
Soit $J \subseteq \mathcal{S}$ tel que $Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \notin J, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\} = \emptyset$. Alors il existe (à multiplication par un scalaire non nul près) un unique vecteur $v \in D_{\tau(\emptyset)}(\overline{\rho})^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)} \subseteq \pi^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ non nul sur lequel $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ agisse par $\overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$. De plus, si $Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \in J, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\} = \emptyset$, alors il existe un unique élément $x(J) \in k_E^\times$ tel que l'on ait l'égalité de la proposition 2.6.1. Si $Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \in J, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\} \neq \emptyset$, alors on a dans π :

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_q} \left(\prod_{\sigma\in J} \sigma(s)^{p-1-r_\sigma}\right) \begin{pmatrix} [s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} v = 0.$$

Démonstration. — Notons que les hypothèses (i) et (ii) et la définition de $D(\overline{\rho})$ font que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}(D_\tau(\overline{\rho}), \pi) = k_E$ pour tout $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ de sorte que π contient chaque $D_\tau(\overline{\rho})$ de manière unique. Par le lemme 2.6.2, $\tau(J)$ est un constituant de $D_{\tau(\emptyset)}(\overline{\rho})$ et les deux cas correspondent respectivement à $\tau(\mathcal{S}\backslash J)$ est un constituant de $D_{\tau(\emptyset)}(\overline{\rho})$ et $\tau(\mathcal{S}\backslash J)$ n'est pas un constituant de $D_{\tau(\emptyset)}(\overline{\rho})$. On ne démontre que le deuxième cas, la preuve du premier étant analogue à celle de la proposition 2.6.1. Notons que par le lemme 2.6.2(ii), on a alors $J \notin \{\emptyset, \mathcal{S}\}$. Par les hypothèses et par les définition et structure de $D(\overline{\rho})$, on a $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v \in D_\tau(\overline{\rho})$ pour un $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho})$ qui n'est pas $\tau(\emptyset)$. La sous-$\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$-représentation $\left\langle \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v \right\rangle$ de $D(\overline{\rho})$ engendrée par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v$ est contenue dans $D_\tau(\overline{\rho})$ et en particulier n'a donc pas $\tau(\emptyset)$ dans ses constituants. Considérons la surjection canonique :

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}(J) \otimes \overline{\eta}'(J) \twoheadrightarrow \left\langle \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v \right\rangle$$

donnée par réciprocité de Frobenius. Dans cette surjection, le constituant $\tau(\emptyset)$ de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}(J) \otimes \overline{\eta}'(J)$ est nécessairement envoyé vers 0 à droite puisqu'il n'y apparaît plus comme constituant. Par [**5**, Lem.2.7], le vecteur :

$$\sum_{s \in \mathbb{F}_q} \Big(\prod_{\sigma \in J} \sigma(s)^{p-1-r_\sigma} \Big) \begin{pmatrix} [s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} v \in \left\langle \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v \right\rangle \subset \pi,$$

s'il est non nul, est tel que $\mathrm{T}(\mathcal{O}_L)$ (le tore de $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$) agit sur lui comme sur $\tau(\emptyset)^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$. Or le caractère correspondant de $\mathrm{T}(\mathcal{O}_L)$ n'apparaît pas dans $\left\langle \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) v \right\rangle$ car aucun autre constituant que $\tau(\emptyset)$ ne peut le donner (utiliser $J \notin \{\emptyset, \mathcal{S}\}$ et [**5**, lem.2.5]). Ce vecteur est donc nul. □

Remarque 2.6.4. — (i) Soit π comme dans la proposition 2.6.3 et $J \subseteq \mathcal{S}$ tel que $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$. Alors par le lemme 2.1.4 (et la proposition 2.6.3) le couple (J, π) vérifie les hypothèses de la proposition 2.6.1, et en particulier il existe un unique $v \in \pi^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ non nul (forcément dans $D_{\tau(\emptyset)}(\overline{\rho})^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ par la proposition 2.6.3) sur lequel $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ agisse par $\overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$. Si $Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \notin J, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\} = \emptyset$ mais $Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \in J, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\} \neq \emptyset$, un tel vecteur v n'est pas forcément unique, i.e. il peut exister $w \in \pi^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)} \backslash D_{\tau(\emptyset)}(\overline{\rho})^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$ (non nul) sur lequel $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ agit par $\overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$. Cela vient du fait que $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J)$ possède alors plusieurs constituants dans $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ (e.g. les poids de Serre $\tau(\emptyset)$ et τ, cf. preuve précédente).
(ii) Lorsque $Z(\overline{\rho}) = \emptyset$, i.e. lorsque $\mathcal{D}(\overline{\rho}) = \{\tau(\emptyset)\}$, les $x(J)$ (pour tout $J \subseteq \mathcal{S}$) sont les seuls invariants que l'on peut déduire de [**5**] (en procédant comme dans la Proposition 2.6.3) car ils déterminent dans ce cas complètement l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur $D(\overline{\rho})^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)} = D_{\tau(\emptyset)}(\overline{\rho})^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}$. Pour plus de détails sur les invariants que l'on peut définir de manière systématique à partir des constructions de [**5**], nous renvoyons le lecteur à [**29**].

Par [**5**, Thm.1.2], on peut trouver des représentations π vérifiant les hypothèses de la proposition 2.6.3 (et donc de la proposition 2.6.1 pour J tel que $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$) et avec des valeurs *presque quelconques* pour les $x(J)$. Plus précisément, pour tout $\nu \in k_E^\times$ qui est un carré dans k_E et tout uplet $(x(J))_J$ d'éléments de k_E (où J parcourt les parties de $\mathcal{S}$ vérifiant $Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \notin J, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\} = \emptyset$) qui est tel que :

$$\begin{array}{lll} x(J) = 0 & \text{si} & Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \in J, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\} \neq \emptyset \\ x(J) = \nu x(\mathcal{S}\backslash J)^{-1} & \text{si} & Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \in J, \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J\} = \emptyset \end{array}$$

(notons que la condition dans le deuxième cas est équivalente à $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$), alors il existe (au moins) une représentation π lisse admissible avec un caractère central ω_π tel que $\omega_\pi(p) = \nu$, qui vérifie toutes les propriétés de la proposition 2.6.3 et telle que pour tout J vérifiant $Z(\overline{\rho}) \cap \{\sigma \in \mathcal{S}, \sigma \notin J, \sigma \circ \varphi^{-1} \in J\} = \emptyset$:

$$\sum_{s \in \mathbb{F}_q} \Big(\prod_{\sigma \in J} \sigma(s)^{p-1-r_\sigma}\Big) \begin{pmatrix} [s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} v = x(J) \sum_{s \in \mathbb{F}_q} \Big(\prod_{\sigma \notin J} \sigma(s)^{p-1-r_\sigma}\Big) \begin{pmatrix} [s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v.$$

Le corollaire suivant, qui résume l'essentiel des résultats locaux qui précèdent, montre que sous certaines conditions sur π (qui seront vérifiées dans un cadre global), les scalaires $x(J)$ *ne* peuvent *pas* prendre n'importe quelles valeurs.

Corollaire 2.6.5. — *Soit $\overline{\rho}$ réductible générique et $J \subseteq \mathcal{S}$ tel que $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$. Soit π une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur k_E telle que (J, π) vérifie les hypothèses de la proposition 2.6.1 de sorte que le scalaire $x(J) \in k_E^\times$ est défini. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible de type $\eta(J) \otimes \eta'(J)$ tel que $\overline{\rho} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1, \varphi_1}(\overline{\mathcal{M}}, \widehat{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)^\vee(1)$ et définissons π_p et $\widehat{v}$ comme dans le théorème 2.5.2. On suppose qu'il existe un $\mathcal{O}_E$-réseau stable π_p^0 dans π_p contenant $\widehat{v}$ ainsi qu'un morphisme $\mathcal{O}_E$-linéaire $\mathrm{GL}_2(L)$-équivariant $\pi_p^0 \to \pi$ tel que l'image de $\widehat{v}$ dans π est non nulle. Alors on a :*

$$x(J) = -\theta(-1) \Big(\prod_{\sigma \in J} \alpha_\sigma \prod_{\sigma \notin J} \beta_\sigma\Big)^{-1} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma \in J \\ \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J}} x_\sigma(r_\sigma + 1)}{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma \notin J \\ \sigma \circ \varphi^{-1} \in J}} x_\sigma(r_\sigma + 1)}$$

avec $(\alpha_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}$, $(\beta_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}$ et $(x_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}$ comme en (1).

Démonstration. — Cela découle de la proposition 2.2.3, du théorème 2.5.2 avec les remarques 2.5.3 et 2.4.2, et de la proposition 2.6.1. □

Remarque 2.6.6. — (i) On voit que le corollaire 2.6.5 appliqué avec J et $\mathcal{S}\backslash J$ pour $\overline{\rho}$ et π fixées (rappelons que $Z(\overline{\rho}) \cap F(J) = \emptyset$ est équivalent à $Z(\overline{\rho}) \cap F(\mathcal{S}\backslash J) = \emptyset$) redonne bien $x(J)x(\mathcal{S}\backslash J) = (\omega^{-1} \det \overline{\rho})(p) = (\det \overline{\rho})(p)$ comme attendu.
(ii) Lorsque $Z(\overline{\rho}) = \emptyset$, on peut récrire la formule ci-dessus pour $x(J)$ sous la forme plus simple :

$$x(J) = -\theta(-1) \Big(\prod_{\sigma \in J} \alpha_\sigma \prod_{\sigma \notin J} \beta_\sigma\Big)^{-1} \prod_{\sigma \in J} \frac{x_\sigma(r_\sigma + 1)}{x_{\sigma \circ \varphi}(r_{\sigma \circ \varphi} + 1)}.$$

3. Résultats globaux

3.1. Quelques préliminaires. — On commence par quelques préliminaires, notations et définitions.

Soit F un corps totalement réel. Pour chaque place finie v de F, on note F_v le complété de F en v et on identifie $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ à un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ via un choix de plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{F_v}$. On note k_v le corps résiduel de F_v, $q_v \stackrel{\text{déf}}{=} |k_v|$, $|\cdot| \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{q_v^{\mathrm{val}(\cdot)}}$ (où $\mathrm{val}(\varpi_v) = 1$ si ϖ_v est une uniformisante de F_v), $I_v \subset W_v$ les sous-groupes d'inertie et de Weil de $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ et $\mathrm{Fr}_v \in \mathrm{Gal}(\overline{k_v}/k_v)$ un Frobenius géométrique $x \mapsto x^{q_v^{-1}}$ en v. On normalise la théorie du corps de classes local de telle sorte que les relevés des Frobenius géométriques correspondent aux uniformisantes. On normalise la correspondance locale de Langlands de telle sorte que, si ξ_1 et ξ_2 sont des caractères lisses de $F_v^\times$ tels que $\xi_1\xi_2^{-1} \neq |\cdot|^{\pm 1}$, alors la représentation de W_v qui correspond à $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(F_v)}^{\mathrm{GL}_2(F_v)} \xi_1 \otimes \xi_2|\cdot|^{-1}$ est $\xi_1 \oplus \xi_2$.

Soit D une algèbre de quaternions sur F qui est déployée en une seule des places archimédiennes de F notée τ (on exclut le cas $F = \mathbb{Q}$ et $D = \mathrm{GL}_2$). On fixe un isomorphisme $D_\tau \stackrel{\text{déf}}{=} D \otimes_{F,\tau} \mathbb{R} \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et on pose $D_f^\times \stackrel{\text{déf}}{=} (D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f)^\times$ où $\mathbb{A}_f \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ est l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$. Si v est une place finie de F, on note $D_v \stackrel{\text{déf}}{=} D \otimes_F F_v$. Pour chaque sous-groupe ouvert compact $U \subset D_f^\times$, on note X_U la courbe algébrique projective lisse sur F associée à U par la théorie des modèles canoniques de Shimura [**41**] (voir [**9**, § 1.1] pour un résumé des résultats sous la forme que l'on utilise ici, sauf que l'on prend la convention associée au choix de signe $\varepsilon = 1$ comme dans [**13**, § 3.3] plutôt que la convention de [**9**] adoptée dans [**8**]). Les points complexes de X_U relativement à τ s'identifient à :

$$D^\times \backslash ((\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}) \times D_f^\times / U)$$

où l'action de $D^\times$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ se fait via $D^\times \hookrightarrow D_\tau^\times \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Pour $g \in D_f^\times$ et pour des sous-groupes ouverts compacts $U, V \subset D_f^\times$ tels que $g^{-1}Vg \subseteq U$, l'application sur les points complexes définie par la multiplication à droite par g provient d'un morphisme de courbes algébriques $X_V \to X_U$ défini sur F, et tous ces morphismes induisent des applications $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$-équivariantes sur la cohomologie étale :

$$H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}_p}) \to H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}_p}).$$

On obtient comme cela des actions de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ et de $D_f^\times$ qui commutent sur :

$$\Pi_D \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}_p})(1)$$

où la limite inductive est prise sur les sous-groupes ouverts compacts $U \subset D_f^\times$, où les applications de transition pour $V \subseteq U$ sont induites par $g = 1$ et où (1) signifie le tordu par le caractère cyclotomique p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$. L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ est continue et celle de $D_f^\times$ est lisse et admissible. (On pourrait aussi prendre la cohomologie étale à coefficients dans une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$, mais pour l'instant, il est plus pratique d'avoir $\overline{\mathbb{Q}_p}$).

Fixons des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ et soit σ_2 la représentation de $D_\infty^\times \overset{\text{déf}}{=} (D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times$ qui, en τ est la représentation de la série discrète holomorphe de poids 2 de $D_\tau^\times \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de caractère central trivial et qui aux autres places infinies est la représentation triviale. On a une décomposition :

$$\Pi_D = \bigoplus_\pi (\pi_f \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \rho_\pi)$$

où π parcourt les représentations automorphes de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ telles que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[D_\infty^\times]}(\sigma_2, \pi) \neq 0.$$

Dans la décomposition ci-dessus, π_f désigne la représentation de $D_f^\times$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$ telle que :

$$\mathbb{C} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \pi_f \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[D_\infty^\times]}(\sigma_2, \pi)$$

et $\rho_\pi \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}[D_f^\times]}(\pi_f, \Pi_D)$ est une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Pour une extension finie E suffisamment grande, on écrit encore ρ_π pour la représentation $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(E)$.

Dans ce cadre, la compatibilité local-global de la correspondance de Langlands est due à Carayol [**10**] pour $v \nmid p$ et à T. Saito [**37**] pour $v|p$. Chaque π_f se factorise comme un produit tensoriel restreint sur toutes les places finies v de F :

$$\pi_f \cong \otimes'_v \pi_v$$

où $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \pi_v = \pi_{D_v}\big(\mathrm{WD}(\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)})\big)$ est la représentation lisse irréductible de $D_v^\times$ correspondant (par la correspondance de Langlands locale) à la "Frobenius-semi-simplifiée" de $\mathrm{WD}(\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)})$, la représentation de Weil-Deligne associée à $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$. En particulier, la représentation $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est potentiellement semi-stable pour tout $v|p$ et la représentation $\mathrm{WD}(\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)})$ est indécomposable lorsque D_v n'est pas déployée.

Passons maintenant à la caractéristique p. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue, irréductible et totalement impaire. On suppose toujours que le corps fini k_E contient l'extension quadratique d'un corps (fini) sur lequel $\overline{\rho}$ est définie, de sorte que (i) k_E contient les valeurs propres de $\overline{\rho}(g)$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ et (ii) si H est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ tel que la restriction $\rho|_H$ est absolument réductible alors elle est réductible sur k_E. On suppose de plus $\overline{\rho}$ *modulaire* au sens où elle provient d'une forme modulaire de Hilbert propre (de poids et niveau quelconques). Comme précédemment en caractéristique 0, la limite inductive sur les sous-groupes ouverts compacts U de $D_f^\times$ permet de définir une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \times D_f^\times$:

$$\overline{\Pi}_D \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1).$$

On définit alors une représentation lisse de $D_f^\times$ sur k_E par :

$$\pi_D(\overline{\rho}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)]}(\overline{\rho}, \overline{\Pi}_D)$$

(notons que $\pi_D(\overline{\rho})$ est la représentation associée au dual de $\overline{\rho}$ dans [**8**, § 4]). Par [**42**], la représentation $\pi_D(\overline{\rho})$ est non nulle pour certains choix de D que l'on explicitera au § 3.2 (voir le corollaire 3.2.3). Un argument classique (voir par exemple [**8**, Lem.4.11]) montre que si U est suffisamment petit, alors on a :

$$\pi_D(\overline{\rho})^U = \mathrm{Hom}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)]}(\overline{\rho}, H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)),$$

en particulier la représentation $\pi_D(\overline{\rho})$ est admissible. À la suite du travail d'Emerton [**19**] pour $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$, il est conjecturé dans [**8**, Conj.4.7] que $\pi_D(\overline{\rho})$ se factorise comme un produit tensoriel restreint :

$$\pi_D(\overline{\rho}) = \otimes'_v \pi_{D,v}(\overline{\rho}) \tag{26}$$

où chaque $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ est une représentation lisse admissible de $D_v^\times$ sur k_E. Au moins pour v ne divisant pas p, on s'attend de plus à ce que $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ ne dépende que des classes d'isomorphisme de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ et de D_v. Si v divise p et si τ est une représentation lisse irréductible de $\mathcal{O}_{D_v}^\times$ sur k_E (où $\mathcal{O}_{D_v}$ est un ordre maximal dans D_v), on dit que $\overline{\rho}$ est *modulaire de poids* τ (en v, par rapport à D) si :

$$\mathrm{Hom}_{k_E[\mathcal{O}_{D_v}^\times]}(\tau, \pi_D(\overline{\rho})) \neq 0.$$

Nous utiliserons le résultat récent suivant de Gee et Kisin (cf. [**25**, Thm.B]) sur les poids dans la conjecture de Serre de [**8**].

Théorème 3.1.1. — *Supposons $p > 2$, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1}))}$ irréductible et, si $p = 5$, l'image de $\overline{\rho}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1})))$ dans $\mathrm{PGL}_2(k_E)$ non isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$. Soit v une place de F divisant p telle que F_v est non ramifiée et D_v est déployée. Si $\overline{\rho}$ est modulaire de poids τ (en v, par rapport à D) alors $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)})$.*

Il y a également une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \times D_f^\times$ sur la cohomologie étale à coefficients entiers :

$$\Pi_D^0 \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1).$$

Soit π une représentation automorphe de $(D \otimes \mathbb{A})^\times$ telle que $\pi_\infty \cong \sigma_2$ et $\overline{\rho}_\pi \cong \overline{\rho}$ où $\overline{\rho}_\pi$ est la réduction de l'unique $\mathcal{O}_E$-réseau stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ à homothétie près dans ρ_π. On suppose que E est suffisamment grand pour que ρ_π soit définie sur E et on pose :

$$\pi^0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)]}(\rho_\pi^0, \Pi_D^0) \tag{27}$$

où ρ_π^0 est un $\mathcal{O}_E$-réseau stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ dans ρ_π. L'application naturelle $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} \pi^0 \to \overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \pi_f$ est un isomorphisme. De plus, comme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ agit sur $\varinjlim H^0_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)$ via $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}}$, l'irréductibilité de $\overline{\rho}$ implique que :

$$(\pi^0)^U = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)]}(\rho_\pi^0, H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1))$$

pour tout sous-groupe ouvert compact $U \subset D_f^\times$. En particulier (le $\mathcal{O}_E$-module sous-jacent à) π^0 n'a pas de vecteurs divisibles. Par ailleurs, l'injection :

$$k_E \otimes_{\mathcal{O}_E} H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E) \hookrightarrow H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)$$

(en fait un isomorphisme) montre que l'application naturelle :

$$k_E \otimes_{\mathcal{O}_E} (\pi^0)^U \to \pi_D(\overline{\rho})^U$$

est injective. En prenant la limite inductive, on obtient le lemme suivant.

Lemme 3.1.2. — *L'application naturelle $k_E \otimes_{\mathcal{O}_E} \pi^0 \to \pi_D(\overline{\rho})$ est injective.*

3.2. Relevés de type fixé. — On rappelle quelques conséquences de résultats de Gee et de Barnet-Lamb, Gee et Geraghty ([**24**], [**1**], [**2**]) et on en déduit quelques autres.

Le résultat principal de Gee est inspiré d'une technique due à Khare et Wintenberger ([**31**]) pour démontrer l'existence et la modularité de relevés avec comportement local prescrit de représentations $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ (continues, irréductibles, totalement impaires). Il généralise des résultats de [**18**] (pour $v \neq p$) et de [**30**] (pour $v = p$) dans le cas $F = \mathbb{Q}$, eux-mêmes inspirés des résultats de changement de niveau de Ribet ([**35**], [**36**]). Ce résultat de Gee est étendu et renforcé par celui clef de Barnet-Lamb, Gee et Geraghty qui donne l'existence de tels relevés qui sont ordinaires en des places prescrites au-dessus de p.

On conserve les notations du § 3.1. Pour v place finie de F on note ν la surjection canonique $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k_v}/k_v) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ où l'isomorphisme de droite est défini en envoyant le Frobenius géométrique Fr_v sur 1. On rappelle qu'une *représentation de Weil-Deligne* (r, N) en v (définie sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$) est un $\overline{\mathbb{Q}_p}$-espace vectoriel V de dimension finie muni d'une représentation lisse $r : W_v \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} V$ et d'un endomorphisme nilpotent $N : V \to V$ tels que $Nr(g) = q_v^{\nu(g)} r(g) N$ pour tout $g \in W_v$. On définit un *type de Weil-Deligne* en v comme une classe d'équivalence $[r, N]$ de représentations de Weil-Deligne en v de dimension 2 où $(r, N) \sim (r', N')$ si $(r|_{I_v}, N)$ est isomorphe à $(r'|_{I_v}, N')$. On dit qu'une représentation linéaire continue $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ est de type de Weil-Deligne $[r, N]$ si ρ est potentiellement semi-stable et si $\mathrm{WD}(\rho) \sim (r, N)$. On dit que $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \to \mathrm{GL}_2(E)$ est de type de Weil-Deligne $[r, N]$ si $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_E \rho$ en est.

Soit $[r, N]$ un type de Weil-Deligne en v. On dit qu'une représentation lisse irréductible ϑ_v de $\mathcal{O}_{D_v}^\times$ sur E est un *K-type* pour $[r, N]$ si l'on a l'équivalence suivante pour toute représentation de Weil-Deligne (r', N') en v de dimension 2 :

$$\mathrm{Hom}_{E[\mathcal{O}_{D_v}^\times]}(\vartheta_v, \pi_{D_v}(r', N')) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r', N') \sim (r, N).$$

Supposant E suffisamment grand, un K-type pour $[r, N]$ existe (sans être en général unique, voir [**28**]) sous l'une des deux hypothèses suivantes :

(i) D_v est non ramifiée et $N = 0$
(ii) D_v est ramifiée et ou bien r est irréductible ou bien $N \neq 0$.

Le lemme ci-dessous relie poids de Serre et types et se démontre par un argument classique que l'on omet (voir par exemple [**8**, Prop.2.10] pour un énoncé et une preuve sous des hypothèses légèrement différentes).

Lemme 3.2.1. — *Soit v une place de F divisant p, $[r, N]$ un type de Weil-Deligne en v et ϑ_v un K-type pour $[r, N]$. On a $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_\pi$ pour une représentation automorphe π de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ telle que $\pi_\infty \cong \sigma_2$ et $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est de type $[r, N]$ si et seulement si $\overline{\rho}$ est modulaire de poids τ (en v, par rapport à D) pour un constituant τ du semi-simplifié de ϑ_v sur k_E.*

On rappelle maintenant la conséquence suivante des résultats de Barnet-Lamb, Gee et Geraghty ([**24**], [**1**], [**2**]).

Théorème 3.2.2. — *Supposons $p > 2$, $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ modulaire, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1}))}$ irréductible et, si $p = 5$, l'image de $\overline{\rho}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1})))$ dans $\mathrm{PGL}_2(k_E)$ non isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$. Soit $\psi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to E^\times$ un caractère qui relève $\det \overline{\rho}$ et tel que $\psi\varepsilon^{-1}$ est d'ordre fini, T un sous-ensemble de l'ensemble des places de F divisant p et S un ensemble fini de places finies de F contenant les places divisant p et les places où $\overline{\rho}$ ou ψ sont ramifiés. Pour chaque $v \in S$, soit $[r_v, N_v]$ un type de Weil-Deligne en v et pour chaque $v \in T \cup \{v \nmid p, N_v \neq 0\}$, soit $\overline{\mu}_v : \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \to k_E^\times$ un caractère. Supposons que, pour chaque $v \in S$, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ admet un relevé $\rho_v : \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \to \mathrm{GL}_2(E)$ tel que :*

(i) *si $v|p$ alors ρ_v est potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate $(0, 1)$ pour tout $F_v \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$*
(ii) *si $v|p$ alors ρ_v est potentiellement ordinaire si et seulement si $v \in T$*
(iii) *ρ_v est de type de Weil-Deligne $[r_v, N_v]$ ($v \in S$)*
(iv) *si $v \in T \cup \{v \nmid p, N_v \neq 0\}$ alors ρ_v a une sous-représentation σ_v de dimension 1 telle que σ_v relève $\overline{\mu}_v\omega$ et $\sigma_v\varepsilon^{-1}|_{I_v}$ est d'ordre fini*
(v) $\det \rho_v|_{I_v} = \psi|_{I_v}$ *($v \in S$).*

Alors, quitte à agrandir E, $\overline{\rho}$ possède un relevé $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(E)$ continu non ramifié en dehors de S et tel que :

(i) *si $v|p$ alors $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate $(0, 1)$ pour tout $F_v \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$*
(ii) *si $v|p$ alors $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est potentiellement ordinaire si et seulement si $v \in T$*
(iii) *$\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est de type de Weil-Deligne $[r_v, N_v]$ ($v \in S$)*
(iv) *si $v \in T \cup \{v \nmid p, N_v \neq 0\}$ alors $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ a une sous-représentation σ'_v de dimension 1 telle que σ'_v relève $\overline{\mu}_v\omega$ et $\sigma'_v\varepsilon^{-1}|_{I_v}$ est d'ordre fini*
(v) $\det \rho = \psi$.

De plus, un tel relevé ρ de $\overline{\rho}$ provient d'une forme modulaire de Hilbert de poids $(2, 2, \cdots, 2)$.

Démonstration. — Ce théorème se déduit des résultats principaux de [**24**] et [**2**] comme expliqué dans la preuve de [**25**, Lem.5.3.2]. Il diffère de *loc.cit.* seulement parce que le cas $N_v \neq 0$ n'y est pas considéré lorsque $v|p$ et n'y est pas explicité lorsque $v \nmid p$. Pour obtenir le théorème 3.2.2, il suffit de modifier les arguments dans [**24**] comme expliqué ci-dessous.
D'abord, on vérifie qu'il existe une extension résoluble totalement réelle F_0/F de degré pair telle que :
(i) les restrictions $r_v|_{I_w}$, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_{0,w})}$ et $\psi\varepsilon^{-1}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_{0,w})}$ sont triviales pour tout $v \in S$ et tout $w|v$
(ii) les hypothèses de [**25**, Lem.5.3.2] s'appliquent à $\overline{r} = \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F_0)}$ où (changeant ℓ en p, S en S^+ et ψ en $\psi|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F_0)}$) :

- $S^+ = \{w|p\} \amalg S_0$ où S_0 est l'ensemble des places de F_0 au-dessus des places v de F telles que $v \nmid p$ et $N_v \neq 0$
- τ_w est trivial pour tout $w \in S^+$
- si $w|p$ alors R_w est la composante irréductible (de l'anneau de déformation) paramétrant les déformations ordinaires si et seulement si w divise v pour un v dans T
- si $w \in S_0$ alors R_w est la composante irréductible (de l'anneau de déformation) paramétrant les déformations de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dans une base convenable.

Notant D_0 l'algèbre de quaternions sur F_0 ramifiée exactement aux places infinies et aux places de S_0, on obtient alors une représentation automorphe π_0 de $(D_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ telle que :

- $\pi_{0,w}$ est triviale si w est une place infinie ou si $w \in S_0$
- $\pi_{0,w}$ est non ramifiée si $w \notin S_0$
- $\overline{\rho}_{\pi_0} \cong \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F_0)}$
- si $w|p$ alors π_0 est ordinaire en w si et seulement si $w|v$ pour un v dans T.

On utilise alors l'argument d'augmentation du niveau de [**42**] comme dans la preuve de [**32**, (3.5.3)] pour remplacer S_0 par l'ensemble de toutes les places de F_0 au-dessus des places v de F telles que $N_v \neq 0$. Plus précisément, soit $w_1, \cdots, w_r$ les places de F_0 divisant p et au-dessus d'une place v de F telle que $N_v \neq 0$. Pour $i = 1, \cdots, r$ on définit par récurrence des extensions F_i de F_0 telles que :

- F_i/F_{i-1} est quadratique totalement réelle
- $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F_i(\sqrt[p]{1}))}$ est irréductible
- si $w \in S_i'$ alors w est totalement décomposée dans F_i où S_i' est l'ensemble des places de F_{i-1} au-dessus des places de $\{w_1, \cdots, w_i\} \amalg S_0$

– si w est une place de F_{i-1} au-dessus d'une place de $\{w_{i+1}, \cdots, w_r\}$ alors w est inerte dans F_i.

Soit S_i l'ensemble des places de F_i au-dessus de celles de S'_i, on a $S'_i = \{w'_i\} \amalg S_{i-1}$ où w'_i est l'unique place de F_{i-1} au-dessus de w_i (en particulier on a $w'_1 = w_1$ et $S'_1 = \{w_1\} \amalg S_0$). Soit D_i l'algèbre de quaternions sur F_i ramifiée exactement aux places infinies et aux places de S_i. On montre par récurrence sur i qu'il existe une représentation automorphe π_i de $(D_i \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ vérifiant la même liste de propriétés que π_0 (voir ci-dessus) avec F_0 remplacé par F_i, D_0 par D_i et S_0 par S_i (cela se démontre en choisissant un premier auxiliaire ℓ satisfaisant [**32**, (3.5.6)] et en appliquant le même argument qu'en [**32**, (3.5.3)], l'existence d'un relevé de $\overline{\rho}_{\pi_{i-1}}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_{w'_i}}/F_{w'_i})}$ de type de Weil-Deligne $[r, N]$ avec r non ramifiée et $N \neq 0$ combinée avec l'ordinarité de π_{i-1} en la place w'_i et la compatibilité local-global en w'_i assurent que les hypothèses de [**32**, (3.1.11)] sont satisfaites, l'hypothèse $w'_i \nmid p$ étant superflue dans la preuve lorsque la représentation τ de *loc.cit.* est triviale).
Pour finir, on procède exactement comme dans la preuve de [**24**, (3.1.5)] : pour toutes les places finies $v \in S$ telles que $N_v \neq 0$, on choisit la composante irréductible (de l'anneau de déformation locale "cadrée" (framed)) paramétrant les relevés conjugués à $\mu_v \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec $\mu_v : \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \to \mathcal{O}_E^\times$ choisi tel que le relevé ρ_v de l'énoncé vérifie $\rho_v \sim \mu_v \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (cf. [**31**, (3.2.6)] pour une analyse de cette composante lorsque v divise p). En travaillant au-dessus de $F' \overset{\text{déf}}{=} F_r$, on voit que l'anneau de déformation qui en résulte possède un point modulaire, et donc tous ses points à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_p}$ sont modulaires et il est fini sur $\mathbb{Z}_p$. Il s'ensuit que $R^{\psi,\tau}_{F',S}$ (avec la notation de [**24**]) est fini sur $\mathbb{Z}_p$, donc a un point à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_p}$. De plus, si ρ est la déformation correspondante, alors $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')}$ est modulaire, et donc aussi ρ. Cela conclut la preuve. □

Notons **(H0)** l'hypothèse de compatibilité suivante entre D et $\overline{\rho}$:

(H0) Pour chaque place v de F telle que $v \nmid p$ et D_v est ramifiée, la représentation $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est soit irréductible soit isomorphe à une représentation de la forme $\overline{\mu}_v \left(\begin{smallmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour un caractère $\overline{\mu}_v : \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \to k_E^\times$.

Corollaire 3.2.3. — *Supposons $p > 2$, $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ modulaire, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1}))}$ irréductible et, si $p = 5$, l'image de $\overline{\rho}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1})))$ dans $\mathrm{PGL}_2(k_E)$ non isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$. Alors $\pi_D(\overline{\rho}) \neq 0$ (voir § 3.1) si et seulement si l'hypothèse* **(H0)** *est vérifiée.*

Démonstration. — Notons d'abord que $\pi_D(\overline{\rho})$ est non nul si et seulement si $\overline{\rho} = \overline{\rho}_\pi$ pour une représentation automorphe π de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ telle que $\pi_\infty \cong \sigma_2$. En effet, si une telle π existe alors le lemme 3.1.2 montre que $\pi_D(\overline{\rho}) \neq 0$. Réciproquement, si $\pi_D(\overline{\rho}) \neq 0$ alors $\overline{\rho}$ est une sous-représentation de la réduction d'un réseau dans $H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, E)(1)$ pour un U convenable, et la représentation

$H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}}, E)(1)$ est une somme directe de telles représentations ρ_π (quitte à agrandir E). En particulier, si $\pi_D(\overline{\rho}) \neq 0$ et D est ramifiée en v, alors $\overline{\rho}$ possède un relevé modulaire ρ tel que $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est soit irréductible, soit un tordu d'une représentation de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon & *\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. De plus, il est bien connu que si $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est irréductible mais a une réduction réductible, alors c'est une induite d'un caractère $\psi : \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/L) \to \mathcal{O}_E^\times$ tel que $\overline{\psi}^\sigma = \overline{\psi}$ où $q_v \equiv -1 \bmod p$, L est l'extension quadratique non ramifiée de F_v et σ le générateur de $\mathrm{Gal}(L/F_v)$. On en déduit que $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est dans tous les cas de la forme requise pour que **(H0)** soit vérifiée.
Réciproquement, supposons **(H0)** satisfaite. Comme $\overline{\rho}$ est modulaire, on a $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_{\pi'}$ pour une représentation automorphe π' de $(D' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ telle que $\pi'_\infty \cong \sigma_2$ où D' est une algèbre de quaternions sur F non ramifiée aux places divisant p et en une place infinie exactement (voir par exemple [**8**, (2.12)]). Soit $\psi \overset{\text{déf}}{=} \det \rho_{\pi'}$ et, pour chaque $v|p$, soit τ_v un poids de Serre tel que $\overline{\rho}$ est modulaire de poids τ_v (en v) par rapport à D'. Par la proposition 4.4 (ou la proposition 4.3) de l'appendice, τ_v est un constituant de la réduction d'un K-type supercuspidal, donc par le lemme 3.2.1 pour chaque $v|p$ la représentation $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ admet un relevé potentiellement semi-stable ρ_v avec tous ses poids de Hodge-Tate $(0,1)$ et de type de Weil-Deligne correspondant à une représentation supercuspidale. Pour chaque $v \nmid p$ où D est ramifiée, l'hypothèse **(H0)** assure que $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ admet un relevé ρ_v de type de Weil-Deligne spécial ou supercuspidal. Comme $\det \overline{\rho}|_{I_v} = \overline{\psi}|_{I_v}$ pour tout v, on peut tordre chaque ρ_v par un caractère d'ordre une puissance de p de sorte que $\det \rho_v|_{I_v} = \psi|_{I_v}$. Maintenant par le théorème 3.2.2 et la correspondance de Jacquet-Langlands, on a $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}_\pi$ pour une représentation automorphe π de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ telle que $\pi_\infty \cong \sigma_2$. On en déduit $\pi_D(\overline{\rho}) \neq 0$. □

Même si l'objectif principal de cet article concerne les propriétés de l'hypothétique facteur local $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ en (26) pour $v|p$ lorsque $D_v^\times \cong \mathrm{GL}_2(F_v)$ et F_v est non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$, on en profite pour signaler le résultat surprenant suivant lorsque D_v reste une algèbre de quaternions en $v|p$.

Corollaire 3.2.4. — *Supposons $p > 2$, $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ modulaire, l'hypothèse* **(H0)** *satisfaite, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1}))}$ irréductible et, si $p = 5$, l'image de $\overline{\rho}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1})))$ dans $\mathrm{PGL}_2(k_E)$ non isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$. Si (26) est vrai alors pour toute place v de F divisant p où D est ramifiée la représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ est de longueur infinie.*

Démonstration. — Soit π une représentation automorphe de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ telle que $\pi_\infty \cong \sigma_2$ et $\overline{\rho}_\pi \cong \overline{\rho}$. Soit S l'ensemble des places $w \neq v$ de F telles que ou bien $w|p$ ou bien $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est ramifiée (S contient donc en particulier les places finies distinctes de v où D est ramifiée) et soit $\psi \overset{\text{déf}}{=} \det \rho_\pi$. Pour chaque $w \in S$, soit $[r_w, N_w]$ le type de Weil-Deligne de $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$. Soit τ_v un poids de Serre quelconque pour lequel $\overline{\rho}$ est modulaire en v par rapport à D. Par la proposition

4.7 (cf. appendice), pour tout $m \geq 0$ il existe un K-type supercuspidal $\vartheta_{v,m}$ de conducteur essentiel $2m+3$ dont la réduction contient τ_v comme constituant. Par le lemme 3.2.1, on en déduit que $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ admet un relevé $\rho_{v,m}$ potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate $(0,1)$ de type de Weil-Deligne irréductible $[r_{v,m}, 0]$ de conducteur essentiel $2m+3$. Quitte à tordre par un caractère, on peut de plus supposer $\det \rho_{v,m}|_{I_v} = \psi|_{I_v}$. Par le théorème 3.2.2 et la correspondance de Jacquet-Langlands, on a donc une représentation automorphe π_m de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ telle que $\pi_{m,\infty} \cong \sigma_2$, $\overline{\rho}_{\pi_m} \cong \overline{\rho}$, $\rho_{\pi_m}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est de type de Weil-Deligne $[r_w, N_w]$ pour tout $w \in S$ et $\rho_{\pi_m}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est de type de Weil-Deligne $[r_{v,m}, 0]$. Pour $w \in S$ et pour un sous-groupe ouvert compact $U_w \subseteq \mathcal{O}_{D_w}^\times$, la dimension (sur $\overline{\mathbb{Q}}$) de $\pi_{m,w}^{U_w}$ est indépendante de m (car la compatibilité local-global et le fait que $\rho_{\pi_m}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est de type de Weil-Deligne indépendant de m impliquent que la restriction $\pi_{m,w}|_{\mathcal{O}_{D_w}^\times}$ ne dépend pas de m). Soit $U^v \overset{\text{déf}}{=} \prod_{w \neq v} U_w$ où, pour $w \in S$, U_w est suffisamment petit pour que $\pi_{m,w}^{U_w} \neq 0$ et où $U_w = \mathcal{O}_{D_w}^\times$ pour $w \notin S$. Alors on a $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} \pi_{m,f}^{U^v} = Cq_v^m$ pour un entier C strictement positif et indépendant de m (voir la proposition 4.7 de l'appendice). Par le lemme 3.1.2 on a donc $\dim_{k_E} \pi_D(\overline{\rho})^{U^v} \geq Cq_v^m$. Comme c'est vrai pour tout m, on en déduit que $\pi_D(\overline{\rho})^{U^v}$ est de dimension infinie. Si (26) est vrai, on voit donc que $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ est aussi de dimension infinie. Comme $D_v^\times$ est compact modulo son centre, toutes ses représentations lisses irréductibles sur k_E sont de dimension finie. On en déduit que $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ est de longueur infinie. $\square$

Nous donnerons au § 3.5 ci-dessous une variante du corollaire 3.2.4 (cf. corollaire 3.5.4) qui s'applique, elle, à une “vraie” représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ (et non plus conjecturale) que nous définissons maintenant.

3.3. Le facteur local. — Si $\overline{\rho}$ est modulaire et si v est une place de F divisant p, on définit de manière ad hoc (sous quelques hypothèses techniques assez faibles) un “facteur local” $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ dépendant de la représentation globale $\overline{\rho}$.

On suppose $p > 2$ et on fixe une représentation $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ continue, modulaire et irréductible en restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1}))$ telle que, si $p = 5$, l'image de $\overline{\rho}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1})))$ dans $\mathrm{PGL}_2(k_E)$ est non isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$. On fixe une place v de F au-dessus de p (on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur v dans cette section). On fixe aussi une algèbre de quaternions D sur F vérifiant **(H0)**, de sorte que $\pi_D(\overline{\rho}) \neq 0$ par le corollaire 3.2.3. On note $\mathcal{O}_D$ un ordre maximal dans D et $\mathcal{O}_{D_w}$ son adhérence dans D_w pour une place finie quelconque w de F. Dans toute cette section, on suppose de plus satisfaites les hypothèses **(H1)** et **(H2)** suivantes :

(H1) Si w est une place finie de F où D est ramifiée, alors $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est non scalaire.

(H2) Si $w \neq v$ est une place de F divisant p, alors D_w est déployée et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est réductible non scalaire.

L'hypothèse **(H1)** et la condition d'être non scalaire dans l'hypothèse **(H2)** sont nécessaires afin d'être sûr que les facteurs locaux en dehors de v ont des propriétés convenables de "multiplicité 1". Il devrait être possible de supprimer l'hypothèse de réductibilité dans **(H2)**, i.e. de traiter des cas où $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est irréductible pour $w \neq v$ divisant p, en utilisant le travail récent de Cheng ([**12**]), voir la remarque 3.7.2.

On ignore à l'heure actuelle si l'on dispose d'une factorisation (26), mais on définit ci-dessous de manière ad hoc une représentation lisse admissible $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ de $D_v^\times$ sur k_E (dépendant *a priori* de toute la représentation $\overline{\rho}$) et dont on montrera au § 3.7 que, au moins lorsque F_v est non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$, D_v est déployée et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est réductible générique, elle coïncide avec le "facteur local" en v dans (26) si (26) est vérifiée (corollaire 3.7.4). La représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ est définie comme suit :

$$\pi_{D,v}(\overline{\rho}) = \mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho}))[\mathfrak{m}']$$

où $\overline{M}^v$ est une représentation lisse irréductible sur k_E d'un sous-groupe ouvert compact U^v de $\prod_{w\neq v} \mathcal{O}_{D_w}^\times$ et où $\mathfrak{m}'$ est un idéal maximal dans une algèbre de Hecke agissant sur $\mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho}))$. Plus précisément, on définit ci-dessous des ensembles finis $S' \subseteq S$ de places finies de F, des représentations $\overline{M}_w$ (sur k_E) de sous-groupes ouverts compacts $U_w \subset \mathcal{O}_{D_w}^\times$ pour $w \in S$, et des opérateurs de Hecke T_w et des scalaires $\alpha_w \in k_E^\times$ pour $w \in S'$ tels que :

$$U^v = \prod_{w\in S} U_w \prod_{w\notin S\cup\{v\}} \mathcal{O}_{D_w}^\times, \qquad \overline{M}^v = \otimes_{w\in S}\overline{M}_w$$

et tels que $\mathfrak{m}'$ est l'idéal maximal de $k_E[T_w, w \in S']$ engendré par les $T_w - \alpha_w$ pour $w \in S'$. Si w est une place finie de F, ϖ_w une uniformisante de F_w et $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, on écrit modulo w^n pour modulo ϖ_w^n.

On pose :

$$S \overset{\text{déf}}{=} \{w \neq v,\ w|p\,\mathrm{disc}(D) \text{ ou bien } \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \text{ est ramifiée}\},$$

et :

$$S' \overset{\text{déf}}{=} \{w \neq v,\ w|p\} \ \coprod\ \{w \neq v,\ w|\,\mathrm{disc}(D) \text{ et } \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \text{ est réductible}\} \subseteq S.$$

On définit U_w, $\overline{M}_w$ (pour $w \in S$) et T_w, α_w (pour $w \in S'$) au cas par cas en distinguant les quatre cas suivants (pour $w \in S$) :

Cas I : $w|p$

Cas II : $w|\,\mathrm{disc}(D)$ et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est réductible

Cas III : $w\nmid p\,\mathrm{disc}(D)$ et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est réductible (ramifiée)

Cas IV : $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est irréductible (donc ramifiée).

Notons que $w \in S'$ correspond aux cas I et II et $w \in S\backslash S'$ aux cas III et IV (par **(H2)**).

Cas I : Par **(H2)**, d'une part l'algèbre de quaternions D est déployée en w et on a donc un isomorphisme $\mathcal{O}_{D_w}^\times \cong \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$, d'autre part $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est réductible et on peut donc écrire :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \begin{pmatrix} \overline{\xi}_w \omega & * \\ 0 & \overline{\xi}'_w \end{pmatrix}$$

pour des caractères $\overline{\xi}_w, \overline{\xi}'_w : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to k_E^\times$.

Si $\overline{\xi}_w|_{I_w} = \overline{\xi}'_w|_{I_w}$ et $\overline{\xi}_w^{-1} \otimes \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la fibre générique d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_{F_w}$, on pose $U_w \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$. Sinon, on définit $U_w \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$ comme le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo w.

En voyant $\overline{\xi}_w, \overline{\xi}'_w$ comme des caractères de $F_w^\times$, on pose $\overline{M}_w \overset{\text{déf}}{=} k_E(\overline{\vartheta}_w)$ où $\overline{\vartheta}_w : U_w \to k_E^\times$ est le caractère défini par $\overline{\vartheta}_w(g) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\xi}_w(\det(g))$ si $U_w = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$ et $\overline{\vartheta}_w(g) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\xi}_w(a)\overline{\xi}'_w(d)$ pour $g \equiv \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ mod w sinon.

Pour T_w et α_w, on choisit une uniformisante ϖ_w de $\mathcal{O}_{F_w}$, puis on définit T_w comme la double classe $V_w \left(\begin{smallmatrix} \varpi_w & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) V_w$ où $V_w \overset{\text{déf}}{=} \ker(\overline{\vartheta}_w)$ et on pose $\alpha_w \overset{\text{déf}}{=} \overline{\xi}_w(\varpi_w)$.

Cas II : Par **(H0)**, on a $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \overline{\xi}_w \left(\begin{smallmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour un caractère $\overline{\xi}_w : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to k_E^\times$. De plus, par **(H1)**, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est non scindée si $|k_w| \equiv 1 \bmod p$ (car alors $\omega = 1$).

On pose $U_w \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{D_w}^\times$ et $\overline{M}_w \overset{\text{déf}}{=} k_E(\overline{\vartheta}_w)$ où $\overline{\vartheta}_w \overset{\text{déf}}{=} \overline{\xi}_w \circ \det$ (det désigne ici la norme réduite). On choisit une uniformisante Π_{D_w} de $\mathcal{O}_{D_w}$ puis on définit T_w comme la double classe $V_w \Pi_{D_w} V_w$ où $V_w \overset{\text{déf}}{=} \ker(\overline{\vartheta}_w)$ et on pose $\alpha_w \overset{\text{déf}}{=} \overline{\xi}_w(\det(\Pi_{D_w}))$.

Cas III : On fixe un isomorphisme $\mathcal{O}_{D_w}^\times \cong \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$ ainsi qu'un caractère $\overline{\xi}_w : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to k_E^\times$ tel que $\overline{\sigma}_w \overset{\text{déf}}{=} \overline{\xi}_w^{-1} \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est de conducteur minimal parmi ses tordus. On note n_w l'exposant du conducteur de $\overline{\sigma}_w$ (un entier positif ou nul) et $\overline{\mu}_w : F_w^\times \to k_E^\times$ le caractère correspondant à $\det(\overline{\sigma}_w)$.

Si $\overline{\sigma}_w$ est non ramifiée, on pose $U_w \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$. Sinon, on définit $U_w \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$ comme le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo w^{n_w}. On pose $\overline{M}_w \overset{\text{déf}}{=} k_E(\overline{\vartheta}_w)$ où $\overline{\vartheta}_w : U_w \to k_E^\times$ est le caractère défini par $\overline{\vartheta}_w(g) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\xi}_w(\det(g))$ si $U_w = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$ et $\overline{\vartheta}_w(g) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\xi}_w(\det(g))\overline{\mu}_w(d)$ pour $g \equiv \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ mod w^{n_w} sinon, et $V_w \overset{\text{déf}}{=} \ker(\overline{\vartheta}_w)$.

Cas IV : Soit $\rho_w : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to \mathrm{GL}_2(E)$ un relevé quelconque de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ et soit ϑ_w un K-type pour $[r, N]$ (voir début du § 3.2) où $r = \rho_w|_{I_w}$ et $N = 0$. Par des résultats de Vignéras, la représentation $\overline{\vartheta}_w$ reste toujours irréductible (si D est déployée en w, cela suit de [**46**, 1.6] et [**46**, 3.11], et si D est ramifiée en w, cela suit de [**45**, Prop.9], [**45**, Prop.11] et [**45**, Cor.12]). On pose $U_w \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{D_w}^\times$, $V_w \overset{\text{déf}}{=} \ker(\overline{\vartheta}_w)$ et $\overline{M}_w \overset{\text{déf}}{=} \overline{\vartheta}_w$.

Ayant défini U_w, V_w et $\overline{M}_w$ pour tout $w \in S$, on pose :

$$U^v \overset{\text{déf}}{=} \prod_{w \in S} U_w \prod_{w \notin S \cup \{v\}} \mathcal{O}_{D_w}^\times, \quad V^v \overset{\text{déf}}{=} \prod_{w \in S} V_w \prod_{w \notin S \cup \{v\}} \mathcal{O}_{D_w}^\times$$

et $\overline{M}^v \overset{\text{déf}}{=} \otimes_{w \in S} \overline{M}_w$. Notons que $\overline{M}^v$ est une représentation de U^v/V^v.

Lemme 3.3.1. — *Pour $w \in S'$, l'action naturelle de T_w sur $\pi_D(\overline{\rho})^{V^v}$ induit une action sur :*

$$\mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho})) = \mathrm{Hom}_{k_E[U^v/V^v]}(\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho})^{V^v}).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que (pour $w \in S'$) l'action de U_w sur $\pi_D(\overline{\rho})^{V^v}$ commute avec celle de T_w. Lorsque $w|p$ (cas I), on peut choisir des représentants dans U_w de U_w/V_w qui commutent avec $\left(\begin{smallmatrix} \varpi_w & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et donc pour $g \in U_w$ on a :

$$g \begin{pmatrix} \varpi_w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g^{-1} \in V_w \begin{pmatrix} \varpi_w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V_w.$$

Comme V_w est distingué dans U_w, on en déduit que g commute avec T_w. Lorsque $w|\operatorname{disc}(D)$ (cas II), le caractère $\overline{\vartheta}_w$ s'étend à $D_w^\times$. On a donc $\overline{\vartheta}_w(g\Pi_{D_w}g^{-1}) = \overline{\vartheta}_w(\Pi_{D_w})$ pour $g \in U_w = \mathcal{O}_{D_w}^\times$ d'où $g\Pi_{D_w}g^{-1}\Pi_{D_w}^{-1} \in \ker(\overline{\vartheta}_w) \cap \mathcal{O}_{D_w}^\times = V_w$ et en particulier $g\Pi_{D_w}g^{-1} \in V_w\Pi_{D_w}V_w$. Donc g commute encore avec T_w. □

Pour $w \in S'$, les opérateurs T_w agissent sur $\mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho}))$ par le lemme 3.3.1 et ils commutent de plus entre eux puisque tel est le cas sur $\pi_D(\overline{\rho})^{V^v}$. On a donc une action de $\mathbb{T}' \overset{\text{déf}}{=} k_E[T_w, w \in S']$ sur $\mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho}))$ et on pose :

$$\pi_{D,v}(\overline{\rho}) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}\left(\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho})\right)[\mathfrak{m}'] \tag{28}$$

où $\mathfrak{m}'$ est l'idéal maximal de $\mathbb{T}'$ engendré par les $T_w - \alpha_w$ pour $w \in S'$. C'est une représentation lisse admissible de $D_v^\times$ sur k_E de caractère central $\omega^{-1}\det\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$.

Remarque 3.3.2. — (i) La définition de $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ en I et II ne dépend pas des choix des uniformisantes ϖ_w et Π_{D_w}. Si, dans le cas I, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est scindée, ses sous-représentations de dimension 1 sont par hypothèse distinctes et il y a donc deux choix possibles pour définir $\overline{\xi}_w$ et $\overline{\xi}'_w$. De même dans le cas II avec $\overline{\xi}_w$ si $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est scindée et si $|k_w| \equiv -1 \bmod p$ (car alors $\omega = \omega^{-1}$). Dans ces situations nous choisissons à chaque fois une des deux possibilités. Il est probable

que la représentation obtenue $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ soit indépendante de ces choix, mais nous ignorons comment le démontrer pour l'instant.
(ii) Il y a d'autres choix possibles pour les définitions de U_w et $\overline{M}_w$. Par exemple, on aurait pu procéder en III comme on l'a fait en IV, c'est-à-dire introduire des K-types. Mais il aurait alors fallu utiliser une notion de type plus étendue de manière à inclure la représentation de Steinberg lorsque $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est spéciale. De plus, pour avoir une représentation $\overline{M}_w$ irréductible, il aurait fallu choisir un relevé irréductible de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ lorsque $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est spéciale et $|k_w| \equiv -1 \bmod p$. Inversement, on aurait pu aussi utiliser en IV une définition similaire à celle de III (sauf dans le cas $|k_w| \equiv -1 \bmod p$ et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est induite de l'extension quadratique non ramifiée de F_w). Il n'est pas difficile, là, de vérifier que ces variantes donneraient la même représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$.
(iii) Enfin, on peut remarquer que l'opérateur de Hecke T_w est vraiment nécessaire dans le cas I seulement si $\overline{\rho}|_{I_w}$ est une représentation scalaire, et dans le cas II seulement si $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est scindée et $|k_w| \equiv -1 \bmod p$.

3.4. Déformations. — On définit les anneaux de déformations de représentations galoisiennes locales et globales que l'on utilisera dans la section suivante.

On suppose dans cette section $p > 2$, $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ irréductible et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ réductible non scalaire pour toutes les places w de F divisant p.

Soit Σ un ensemble fini de places finies de F contenant les places divisant p et les places où $\overline{\rho}$ est ramifiée. Soit Σ' un sous-ensemble de Σ tel que :

- si $w|p$ ou si $\overline{\rho}|_{I_w}$ est réductible non scindée (donc en particulier $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est alors réductible ramifiée), alors $w \in \Sigma'$
- si $w \nmid p$ et $w \in \Sigma'$, alors $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est isomorphe à une représentation non scalaire de la forme $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \left(\begin{smallmatrix}\overline{\xi}_w\omega & * \\ 0 & \overline{\xi}_w\end{smallmatrix}\right)$.

Donc, pour tout $w \in \Sigma'$, on peut écrire :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \begin{pmatrix}\overline{\xi}_w\omega & * \\ 0 & \overline{\xi}'_w\end{pmatrix}$$

pour des caractères $\overline{\xi}_w, \overline{\xi}'_w : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to k_E^\times$. Lorsqu'il y a plusieurs choix possibles pour le caractère $\overline{\xi}_w$, on en fixe un (voir la remarque 3.3.2(i)).

On commence par les anneaux de déformations de représentations locales. On note $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ la catégorie des $\mathcal{O}_E$-algèbres locales noethériennes complètes de corps résiduel k_E. Si A est un objet de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, on note $\mathfrak{m}_A$ son idéal maximal.

On note $\psi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathcal{O}_E^\times$ le relevé de Teichmüller de $\omega^{-1}\det\overline{\rho}$. On rappelle qu'il existe un anneau de déformation "cadrée" (framed) $R_w^\square$ qui paramètre les relevés de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ de déterminant $\varepsilon\psi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$. Plus précisément $R_w^\square$

représente le foncteur de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ vers les ensembles qui envoie A vers l'ensemble des relevés $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to \mathrm{GL}_2(A)$ de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ tels que $\det \sigma = \varepsilon\psi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$.

Pour $w \in \Sigma$ on définit un foncteur $D_w^{\triangle}$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ vers les ensembles comme suit. Soit A un object de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$. Si $w \notin \Sigma'$, alors $D_w^{\triangle}(A)$ est par définition l'ensemble des relevés $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to \mathrm{GL}_2(A)$ de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ tels que $\det \sigma = \varepsilon\psi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ et $\sigma(I_w) \xrightarrow{\sim} \overline{\rho}(I_w)$. Si $w \in \Sigma'$, alors $D_w^{\triangle}(A)$ est par définition l'ensemble des paires ordonnées (σ, L) où $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to \mathrm{GL}_2(A)$ est un relevé de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ tel que $\det \sigma = \varepsilon\psi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ et L est un facteur direct de rang un de A^2 (l'espace de σ) sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)$ agit par un caractère de la forme $\eta\varepsilon$, où η est un relevé de $\overline{\xi}_w$ tel que $\eta(I_w) \xrightarrow{\sim} \overline{\xi}_w(I_w)$. Dans le cas où $w|p$, $\overline{\xi}_w = \overline{\xi}'_w$ et $\overline{\xi}_w^{-1} \otimes \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la fibre générique d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_{F_w}$, on demande de plus que $\eta^{-1} \otimes \sigma \otimes_A A/\mathfrak{m}_A^n$ soit aussi la fibre générique d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_{F_w}$ pour tout $n \geq 1$. On définit $D_w^{\triangle}$ sur les morphismes de la manière évidente.

Lemme 3.4.1. — *Le foncteur $D_w^{\triangle}$ pour $w \in \Sigma$ est représentable par un anneau $R_w^{\triangle}$ qui est formellement lisse sur $\mathcal{O}_E$ de dimension relative $3+[F_w : \mathbb{Q}_p]$ (resp. 3) si $w|p$ (resp. $w \nmid p$). Si $w \notin \Sigma'$ ou si $\overline{\rho}|_{I_w}$ n'est pas scalaire, alors le morphisme $R_w^{\square} \to R_w^{\triangle}$ est surjectif. Si $w \in \Sigma'$ et $\overline{\rho}|_{I_w}$ est scalaire, alors $R_w^{\triangle}$ est topologiquement engendré sur $R_w^{\square}$ par $\eta_w^{\mathrm{univ}}(g)$ où $\eta_w^{\mathrm{univ}} : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to (R_w^{\triangle})^{\times}$ est défini par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)$ sur L^{univ} pour la paire universelle $(\sigma^{\mathrm{univ}}, L^{\mathrm{univ}})$ sur $R_w^{\triangle}$ et où $g \in \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)$ est un relevé quelconque de Fr_w.*

Démonstration. — La preuve est essentiellement dans [**31**]. On explique ci-dessous comment la déduire des résultats qui y sont énoncés.

(i) Supposons d'abord $w \notin \Sigma'$, donc en particulier $w \nmid p$. Dans ce cas, la représentabilité de $D_w^{\triangle}$ par un objet $R_w^{\triangle}$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ et l'existence d'un relevé ρ_0 de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ dans $D_w^{\triangle}(\mathcal{O}_E)$ sont des résultats standards. Considérons la $\mathcal{O}_E$-algèbre $\overline{R}_{\psi,0,\mathrm{fl}}^{\square}$ associée à ρ_0 dans [**31**, § 2.7]. Comme $\overline{R}_{\psi,0,\mathrm{fl}}^{\square}$ est un quotient de $R_w^{\triangle}$ (par [**31**, Prop.2.11]) et que $\overline{R}_{\psi,0,\mathrm{fl}}^{\square}[1/p]$ est régulier de dimension 3 (par [**31**, Prop.2.10]), il suffit de montrer que l'espace tangent de $R_w^{\triangle} \otimes_{\mathcal{O}_E} k_E$ est de dimension au plus 3. Comme $p > 2$, on peut identifier cet espace tangent $D_w^{\triangle}(k_E[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ avec le noyau de l'application naturelle $Z^1(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), M) \to H^1(I_w, M)$ où $M \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{ad}^0(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)})$. Le quotient de ce noyau par les cobords $B^1(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), M)$ est isomorphe à $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)/I_w, M^{I_w})$, qui a même dimension (sur k_E) que $H^0(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), M)$. On en déduit que la dimension de l'espace tangent est bien :

$$\dim_{k_E} B^1(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), M) + \dim_{k_E} H^0(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), M) = \dim_{k_E} M = 3.$$

La surjectivité du morphisme $R_w^{\square} \to R_w^{\triangle}$ dans ce cas est claire.

(ii) On suppose maintenant $w \in \Sigma'$. Comme $D_w^{\triangle}$ est isomorphe au foncteur obtenu en remplaçant la représentation $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ par une de ses conjuguées et en la tordant par un caractère, on peut supposer :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} = \begin{pmatrix} \overline{\xi}_w\omega & z_{\overline{\rho}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour un cocycle $z_{\overline{\rho}} \in Z^1(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), k_E(\overline{\xi}_w\omega))$.

On considère d'abord le cas $w|p$ et $\overline{\xi}_w \neq 1$. On va construire explicitement un relevé universel $(\sigma^{\mathrm{univ}}, L^{\mathrm{univ}}) \in D_w^{\triangle}(R_w^{\triangle})$ où $R_w^{\triangle} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_E[[T, X_1, \cdots, X_{d+1}, Y]]$ et $d \overset{\text{déf}}{=} [F_w : \mathbb{Q}_p]$.

Soit $\eta_w^{\mathrm{univ}} : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to \mathcal{O}_E[[T]]$ le caractère $\xi_w\mathrm{nr}(1+T)$ où $\xi_w \overset{\text{déf}}{=} [\overline{\xi}_w]$ est le relevé de Teichmüller de $\overline{\xi}_w$ et $\mathrm{nr}(1+T)$ est le caractère non ramifié envoyant un Frobenius géométrique vers $1+T$. On note $\Xi^{\mathrm{univ}} = \mathrm{nr}(1+T)\eta_w^{\mathrm{univ}}\varepsilon$. Par [**31**, Lem.3.7], le $\mathcal{O}_E[[T]]$-module des cocycles :

$$Z^{\mathrm{univ}} \overset{\text{déf}}{=} Z^1(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), \mathcal{O}_E[[T]](\Xi^{\mathrm{univ}}))$$

est libre de rang $d+1$ et pour tout morphisme $\beta : \mathcal{O}_E[[T]] \to A$ dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, on a :

$$Z^1(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), A(\beta \circ \Xi^{\mathrm{univ}})) = Z^{\mathrm{univ}} \otimes_{\mathcal{O}_E[[T]]} A.$$

(Notons que [**31**, Lem.3.7] suppose en fait F_w non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$, mais cela n'est pas nécessaire dans la preuve.) En particulier, on a $Z^1(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), k_E(\overline{\xi}_w\omega)) = Z^{\mathrm{univ}} \otimes_{\mathcal{O}_E[[T]]} k_E$ et on peut choisir un relevé $\tilde{z}_{\overline{\rho}} \in Z^{\mathrm{univ}}$ de $z_{\overline{\rho}}$ ainsi qu'une base $\{z_1, \cdots, z_{d+1}\}$ de Z^{univ} sur $\mathcal{O}_E[[T]]$. On définit alors :

$$\sigma^{\mathrm{univ}} : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to \mathrm{GL}_2(R_w^{\triangle}) = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_E[[T, X_1, \cdots, X_{d+1}, Y]])$$

par :

$$\sigma^{\mathrm{univ}} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{nr}(1+T)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Xi^{\mathrm{univ}} & \tilde{z}_{\overline{\rho}} + \sum_{i=1}^{d+1} X_i z_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Y & 1 \end{pmatrix},$$

et L^{univ} comme le sous-$R_w^{\triangle}$-module engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} \in \left(R_w^{\triangle}\right)^2$ (en particulier on a bien $\det(\sigma^{\mathrm{univ}}) = \xi_w\varepsilon$).

Maintenant que nous avons défini un élément σ^{univ} de $D_w^{\triangle}(R_w^{\triangle})$, nous devons montrer que, pour A dans $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ et $(\sigma, L) \in D_w^{\triangle}(A)$, il existe un unique $\alpha : R_w^{\triangle} \to A$ tel que $\sigma = \alpha \circ \sigma^{\mathrm{univ}}$ et $L = L^{\mathrm{univ}} \otimes_{R_w^{\triangle}} A$. On remarque d'abord qu'il y a des éléments $t, y \in \mathfrak{m}_A$ uniques tels que L est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)$ agit sur L par $\eta\varepsilon$ où $\eta = \xi_w\mathrm{nr}(1+t)$. Comme $\det(\sigma) = \xi_w\varepsilon$, on a :

$$\mathrm{nr}(1+t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \circ \Xi^{\mathrm{univ}} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour un $z \in Z^1(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), A(\beta \circ \Xi^{\mathrm{univ}}))$ où $\beta : \mathcal{O}_E[[T]] \to A$ est défini par $\beta(T) = t$. Comme z est un relevé de $z_{\overline{\rho}}$, on a $z = 1 \otimes \tilde{z}_{\overline{\rho}} + \sum_{i=1}^{d+1} x_i \otimes z_i$ pour des $x_1, \cdots, x_{d+1} \in \mathfrak{m}_A$ uniques. On en déduit que $\alpha : R_w^{\triangle} \to A$ défini par $T \mapsto t$, $Y \mapsto y$ et $X_i \mapsto x_i$ pour $i = 1, \cdots, d+1$ est l'unique α transformant $(\sigma^{\mathrm{univ}}, L^{\mathrm{univ}})$ en (σ, L).

Les cas restants où $w \in \Sigma'$ se traitent par des variantes de l'argument ci-dessus. Si $w|p$, $\overline{\xi}_w = 1$ et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la fibre générique d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_{F_w}$, on remplace le module des cocycles par le module :

$$Z^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w), \mathcal{O}_E[[T]](\Xi^{\mathrm{univ}}))$$

comme défini dans [**31**]. Si $w|p$, $\overline{\xi}_w = 1$ et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ ne provient pas d'un schéma en groupes fini et plat, on remplace $\mathcal{O}_E[[T]]$ par $\mathcal{O}_E$, η_w^{univ} par le caractère trivial et $d+1$ par $d+2$. Enfin si $w \nmid p$, l'argument est le même que dans le cas précédent mais en remplaçant $d+2$ par 2.

(iii) Pour montrer la dernière assertion, supposons que $\overline{\rho}|_{I_w}$ est scalaire et soit S la sous-$R_w^{\square}$-algèbre de $R_w^{\triangle}$ topologiquement engendrée par $\eta_w^{\mathrm{univ}}(g)$. Alors η_w^{univ} est à valeurs dans $S^\times$ et σ^{univ} est à valeurs dans l'image de $\mathrm{GL}_2(R_w^{\square})$, donc dans $\mathrm{GL}_2(S)$. Comme $\overline{\rho}(g)$ n'est pas scalaire, on voit que la matrice $B \overset{\text{déf}}{=} \sigma^{\mathrm{univ}}(g) - (\eta_w^{\mathrm{univ}}\varepsilon)(g)I \in M_2(S)$ a une réduction non nulle modulo $\mathfrak{m}_S$. Comme $\det(B) = 0$, on en déduit que $L \overset{\text{déf}}{=} \ker(B)$ est un facteur direct de S^2 de rang 1 et donc que $L^{\mathrm{univ}} = R_w^{\triangle} \otimes_S L$. La propriété universelle de $(\sigma^{\mathrm{univ}}, L^{\mathrm{univ}})$ donne donc une section $R_w^{\triangle} \to S$ de l'inclusion $S \subseteq R_w^{\triangle}$, d'où il suit que $S = R_w^{\triangle}$.

Si $\overline{\rho}|_{I_w}$ n'est pas scalaire, soit S l'image de $R_w^{\square}$ dans $R_w^{\triangle}$. Alors σ^{univ} est à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(S)$ et $\eta_w^{\mathrm{univ}}|_{I_w}$ dans $S^\times$. On choisit $g \in I_w$ tel que $\overline{\rho}(g)$ n'est pas scalaire et on montre exactement comme ci-dessus que $S = R_w^{\triangle}$. $\square$

Remarque 3.4.2. — Si l'on remplace E par une extension finie E', alors on a une application naturelle $R_w'^{\triangle} \to \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R_w^{\triangle}$ où $R_w'^{\triangle}$ est défini en utilisant E' au lieu de E. Un argument standard utilisant le sous-anneau de $R_w'^{\triangle}$ des éléments se réduisant dans k_E montre que cette application est un isomorphisme.

Remarque 3.4.3. — Lorsque $w|p$, l'anneau $R_w^{\triangle}$ coïncide avec l'anneau $\overline{R}_w^{\square,\psi}$ considéré dans [**31**] sauf si $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la tordue par un caractère d'une représentation non ramifiée réductible non scindée, auquel cas l'application naturelle $\overline{R}_w^{\square,\psi} \to R_w^{\triangle}$ n'est pas surjective.

On définit maintenant les anneaux de déformations de représentations globales qui vont intervenir. Pour un ensemble fini Q de places de F, on note D_Q le foncteur de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ vers les ensembles qui envoie un objet A vers l'ensemble des classes d'équivalence des relevés $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(A)$ de $\overline{\rho}$ non ramifiés en dehors de $\Sigma \cup Q$ et tels que $\det \sigma = \varepsilon\psi$, deux relevés étant équivalents s'ils sont conjugués par une matrice $g \in \mathrm{GL}_2(A)$ dont la réduction modulo $\mathfrak{m}_A$ est la matrice identité. Comme $\overline{\rho}$ est irréductible, le foncteur D_Q est représentable par un anneau de déformation universelle R_Q. On note $R_Q^{\square}$ l'objet de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ représentant le foncteur qui associe à A l'ensemble des classes d'équivalence de paires ordonnées $(\sigma, \{B_w\}_{w\in\Sigma})$ où σ est un relevé de $\overline{\rho}$ comme dans la définition de $D_Q(A)$ et chaque B_w est une base de A^2 qui se réduit sur la base standard de k_E^2, et où $(\sigma, \{B_w\}_{w\in\Sigma}) \sim (g\sigma g^{-1}, \{gB_w\}_{w\in\Sigma})$ pour toute matrice $g \in \mathrm{GL}_2(A)$ qui se réduit modulo $\mathfrak{m}_A$ sur l'identité.

On pose $R_{\mathrm{loc}}^{\square} \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\otimes}_{w\in\Sigma} R_w^{\square}$ et $R_{\mathrm{loc}}^{\triangle} \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\otimes}_{w\in\Sigma} R_w^{\triangle}$. On a des applications naturelles $R_Q \to R_Q^{\square}$, $R_{\mathrm{loc}}^{\square} \to R_Q^{\square}$ et $R_{\mathrm{loc}}^{\square} \to R_{\mathrm{loc}}^{\triangle}$. On note enfin $R_Q^{\triangle} \overset{\text{déf}}{=} R_Q^{\square}\widehat{\otimes}_{R_{\mathrm{loc}}^{\square}} R_{\mathrm{loc}}^{\triangle}$. Lorsque $Q = \emptyset$, on supprime l'indice Q.

3.5. Multiplicité un I. — Dans cette section et la suivante, on applique la méthode de Taylor-Wiles comme modifiée par Diamond, Fujiwara et Kisin (cf. [**16**] et [**32**]). Cette première section contient essentiellement des préliminaires.

On conserve les notations et hypothèses du § 3.3 et on suppose de plus que la place $v|p$ fixée est telle que F_v est non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$, D_v est déployée et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est réductible générique (cf. § 2.1 et rappelons que la généricité implique $p > 3$). On fixe un isomorphisme de $\mathcal{O}_{F_w}$-algèbres $\mathcal{O}_{D_w} \cong M_2(\mathcal{O}_{F_w})$ pour chaque place finie w où D est déployée.

Notons qu'avec **(H2)**, on suppose en particulier que pour toute place $w|p$, D_w est déployée et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est réductible non scalaire. (Comme déjà remarqué au § 3.3, les résultats de [**12**] devraient permettre de traiter les cas où $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est irréductible pour $w \neq v$ divisant p, voir la remarque 3.7.2.)

Rappelons qu'au § 3.3, on a défini des sous-groupes ouverts compacts $U_w \supset V_w$ et des représentations $\overline{M}_w$ de U_w/V_w sur k_E pour $w \in S$. La place v n'est pas dans S, mais on définit maintenant de manière similaire U_v comme le sous-groupe de $\mathcal{O}_{D_v}^{\times} \cong \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$ des matrices triangulaires supérieures modulo v (cf. le cas I ci-dessus). On écrit :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)} \cong \begin{pmatrix} \overline{\xi}_v\omega & * \\ 0 & \overline{\xi}'_v \end{pmatrix}$$

pour des caractères $\overline{\xi}_v, \overline{\xi}'_v : \mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \to k_E^{\times}$ et on pose $V_v \overset{\text{déf}}{=} \ker(\overline{\vartheta}_v)$ et $\overline{M}_v \overset{\text{déf}}{=} k_E(\overline{\vartheta}_v)$ où $\overline{\vartheta}_v : U_v \to k_E^{\times}$ est défini par $\overline{\vartheta}_v(g) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\xi}_v(a)\overline{\xi}'_v(d)$ pour $g \equiv \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ modulo v.

Pour $w \in S \cup \{v\}$, on relève la représentation $\overline{M}_w$ en caractéristique 0 comme suit. Dans les cas I, II et III du § 3.3, on a défini $\overline{M}_w = k_E(\overline{\vartheta}_w)$ pour un caractère $\overline{\vartheta}_w : U_w \to k_E^{\times}$, on pose alors $M_w \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_E(\vartheta_w)$ où ϑ_w est le relevé de Teichmüller de $\overline{\vartheta}_w$ et $\mathcal{O}_E$ est supposé suffisamment grand. Dans le cas IV (où $w \nmid p$), on a defini $\overline{M}_w$ comme la réduction d'un K-type ϑ_w pour un relevé σ de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$.

On suppose maintenant que ce relevé est choisi tel que $\det\sigma = \varepsilon\psi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ et $\sigma(I_w) \xrightarrow{\sim} \overline{\rho}(I_w)$ où ψ est le relevé de Teichmüller de $\omega^{-1}\det\overline{\rho}$ (voir § 3.4). On définit M_w comme un modèle de ϑ_w sur $\mathcal{O}_E$ (en supposant $\mathcal{O}_E$ suffisamment grand pour que ϑ_w ait un tel modèle). Dans tous les cas on a $\overline{M}_w = k_E \otimes_{\mathcal{O}_E} M_w$ comme module pour $k_E[U_w/V_w]$.

On définit aussi des sous-groupes $U_w \subset U_w^0$ de $\mathcal{O}_{D_w}^\times \cong \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$ pour les places finies $w \notin S \cup \{v\}$ qui vérifient la condition :

(Q) le quotient des racines du polynôme caractéristique de $\overline{\rho}(\mathrm{Fr}_w)$ n'est pas dans $\{1, \mathrm{N}(w), \mathrm{N}(w)^{-1}\}$

où $\mathrm{N}(w) \overset{\text{déf}}{=} |k_w| = \varepsilon^{-1}(\mathrm{Fr}_w)$. Pour une telle place w, on définit $U_w^0 \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$ comme le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo w et U_w comme l'ensemble des $g \in U_w^0$ tels que $g \equiv \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \bmod w$.

Si maintenant Q est un ensemble fini quelconque de places finies de F qui ne sont pas dans $S \cup \{v\}$ et qui satisfont toutes (**Q**), on pose :

$$U_Q \overset{\text{déf}}{=} \prod_{w \in S\cup\{v\}\cup Q} U_w \prod_{w \notin S\cup\{v\}\cup Q} \mathcal{O}_{D_w}^\times \quad \text{et} \quad V_Q \overset{\text{déf}}{=} \prod_{w\in S\cup\{v\}} V_w \prod_{w\in Q} U_w \prod_{w\notin S\cup\{v\}\cup Q} \mathcal{O}_{D_w}^\times.$$

On voit $U_Q/V_Q = \prod_{w\in S\cup\{v\}} U_w/V_w$ comme agissant sur le $\mathcal{O}_E$-module $M \overset{\text{déf}}{=} \otimes_{w\in S\cup\{v\}} M_w$ (le produit tensoriel est sur $\mathcal{O}_E$). Comme ψ est totalement pair (car $\overline{\rho}$ est modulaire), on peut l'identifier par la théorie du corps de classes à un caractère des adèles finis $\mathbb{A}_{F,f}^\times$ trivial sur $F^\times$. Comme ψ coïncide avec ϑ_w sur $\mathcal{O}_{F_w}^\times$ pour $w \in S \cup \{v\}$ et est trivial sur $\mathcal{O}_{F_w}^\times$ sinon, on peut étendre l'action de U_Q/V_Q sur M via ψ pour obtenir une action du groupe fini $G \overset{\text{déf}}{=} U_Q\mathbb{A}_{F,f}^\times/V_QF^\times$. Notons que ce groupe est indépendant de Q et agit naturellement sur la courbe de Shimura X_{V_Q}, donc sur la cohomologie $H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)$. On pose :

$$C_Q \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[G]}\big(M, H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)\big).$$

Pour $w \notin \{v\} \cup S \cup Q$ on définit l'opérateur de Hecke T_w agissant sur le $\mathcal{O}_E$-module $H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)$ par la double classe $\mathcal{O}_{D_w}^\times \left(\begin{smallmatrix} \varpi_w & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{O}_{D_w}^\times$ pour un choix quelconque d'uniformisante ϖ_w de $\mathcal{O}_{F_w}$. De même pour $w \in Q$, on définit T_w agissant sur $H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)$ par la double classe $U_w \left(\begin{smallmatrix} \varpi_w & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) U_w$. Attention que l'opérateur T_w pour $w \in Q$ *dépend* du choix de ϖ_w. Pour $w \in S'$ on définit T_w exactement comme au § 3.3. On vérifie comme dans la preuve du lemme 3.3.1 (et plus simplement même lorsque $w \notin S \cup Q$) que chaque T_w induit une action sur C_Q. De plus, ces opérateurs commutent deux à deux ce qui permet de définir une action de la $\mathcal{O}_E$-algèbre commutative $\tilde{\mathbb{T}} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_E[T_w, w \notin \{v\} \cup S\backslash S']$ engendrée par des variables formelles T_w pour $w \notin \{v\} \cup S\backslash S'$. On note $\mathbb{T}_Q$ l'image de $\tilde{\mathbb{T}}$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_E}(C_Q)$: c'est un $\mathcal{O}_E$-module de type fini.

Rappelons que, pour $w \in S'$, on a défini des éléments $\alpha_w \in k_E^\times$. Pour $w \in Q$, on pose $\alpha_w \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{N}(w)\alpha'_w$ pour un choix de valeur propre α'_w de $\overline{\rho}(\mathrm{Fr}_w)$. On note ϕ_Q l'homomorphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres $\tilde{\mathbb{T}} \to k_E$ défini par $\phi_Q(T_w) = \alpha_w$ pour $w \in S' \cup Q$ et $\phi_Q(T_w) = \mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\overline{\rho}(\mathrm{Fr}_w))$ pour $w \notin \{v\} \cup S \cup Q$, et on pose $\mathfrak{m}_Q \overset{\text{déf}}{=} \ker(\phi_Q)$.

On pose maintenant $\Sigma \overset{\text{déf}}{=} S \cup \{v\}$ et :

$$\Sigma' \overset{\text{déf}}{=} S' \cup \{v\} \cup \{w,\ \overline{\rho}|_{I_w} \text{ est réductible non scindée}\}.$$

Rappelons que S contient toutes les places où $\overline{\rho}$ est ramifiée, donc on a $\Sigma' \subset \Sigma$, et notons que les hypothèses du § 3.4 sont satisfaites pour $\overline{\rho}$, Σ et Σ'. En particulier, pour tout $w \in \Sigma'$, on peut écrire :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \begin{pmatrix} \overline{\xi}_w\omega & * \\ 0 & \overline{\xi}'_w \end{pmatrix}$$

pour des caractères $\overline{\xi}_w, \overline{\xi}'_w : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to k_E^\times$. De plus, on a toujours $\overline{\xi}_w = \overline{\xi}'_w$ si $w \nmid p$ (par **(H0)** ou car l'extension est non scindée). Lorsqu'il y a plusieurs choix possibles pour le caractère $\overline{\xi}_w$, on en fixe un (voir la remarque 3.3.2(i)).

Proposition 3.5.1. — *On a des isomorphismes $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} C_{Q,\mathfrak{m}_Q} \cong \oplus \rho_\pi$ et $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q} \cong \oplus \overline{\mathbb{Q}_p}$ où $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ agit composante par composante sur $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ et où les sommes directes sont sur les représentations automorphes π de $(D \otimes \mathbb{A})^\times$ telles que :*

- $\pi_\infty \cong \sigma_2$ *(cf. § 3.1)*
- $\det \rho_\pi = \psi\varepsilon$
- ρ_π *est un relevé de* $\overline{\rho}$
- ρ_π *est non ramifiée en dehors de* $\Sigma \cup Q$
- *si $w \in \Sigma \backslash \Sigma'$, alors $\rho_\pi(I_w) \xrightarrow{\sim} \overline{\rho}(I_w)$*
- *si $w \in \Sigma'$, alors $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \left(\begin{smallmatrix} \eta_w\varepsilon & * \\ 0 & \eta'_w \end{smallmatrix}\right)$ pour un caractère η_w relevant $\overline{\xi}_w$ tel que $\eta_w(I_w) \xrightarrow{\sim} \overline{\xi}_w(I_w)$*
- *si $w|p$, $\overline{\xi}_w|_{I_w} = \overline{\xi}'_w|_{I_w}$ et $\overline{\xi}_w^{-1}\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la fibre générique d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_{F_w}$, alors $\eta_w^{-1}\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la fibre générique d'un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_{F_w}$.*

De plus, l'ensemble de telles π est non vide.

Démonstration. — (i) On a des isomorphismes :

$$\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} C_{Q,\mathfrak{m}_Q} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[G]}\left(M, \overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)_{\mathfrak{m}_Q}\right)$$

et :

$$\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)_{\mathfrak{m}_Q} \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}_p})(1)_{\mathfrak{p}}$$

où la somme est sur les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} \tilde{\mathbb{T}}$ tels que $\mathfrak{p} \cap \tilde{\mathbb{T}} \subset \mathfrak{m}_Q$ et qui sont dans le support de $H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}_p})$. En tant que $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} \tilde{\mathbb{T}}$-module, on a une décomposition :

$$H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}_p})(1) = \oplus_\pi \big(\rho_\pi \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \pi_f^{V_Q}\big)$$

où la somme est sur les représentations automorphes π de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ telles que $\pi_\infty \cong \sigma_2$ et π_f est comme au § 3.1 mais avec les scalaires étendus à $\overline{\mathbb{Q}_p}$ au lieu de $\mathbb{C}$. On en déduit que $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ est la somme directe sur de telles π des $\overline{\mathbb{Q}_p}$-espaces vectoriels :

$$\rho_\pi \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[G]}(M, \oplus_{\mathfrak{p}} (\pi_f^{V_Q})_{\mathfrak{p}})$$

pour $\mathfrak{p}$ comme ci-dessus. Comme cet espace vectoriel est nul sauf si ψ est le caractère central de π, ou de manière équivalente $\det \rho_\pi = \psi\varepsilon$, on a seulement besoin de sommer sur ces π là et on peut alors remplacer G par U_Q/V_Q. Dans le produit tensoriel restreint usuel $\pi_f = \otimes'_w \pi_w$ l'opérateur de Hecke T_w agit par l'identité en dehors de w. Comme on a :

$$\pi_f^{V_Q} = \big(\otimes_{w\in\Sigma} \pi_w^{V_w}\big) \otimes \big(\otimes_{w\in Q} \pi_w^{U_w}\big) \otimes \Big(\otimes'_{w\notin\Sigma\cup Q} \pi_w^{\mathcal{O}_{D_w}^\times}\Big)$$

on en déduit que les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} \tilde{\mathbb{T}}$ tels que $(\pi_f^{V_Q})_{\mathfrak{p}} \neq 0$ sont précisément les noyaux des homomorphismes définis par $T_w \mapsto a_w$ ($w \notin \Sigma\backslash S'$) où $a_w \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ est une valeur propre de T_w sur le facteur en w. Notons que $\mathfrak{p} \cap \tilde{\mathbb{T}} \subset \mathfrak{m}_Q$ (pour le $\mathfrak{p}$ correspondant) si et seulement si a_w se réduit sur α_w pour $w \in S' \cup Q$ et sur $\mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\overline{\rho}(\mathrm{Fr}_w))$ pour $w \notin \Sigma \cup Q$. On en déduit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[G]}(M, \oplus_{\mathfrak{p}} (\pi_f^{V_Q})_{\mathfrak{p}}) \cong \otimes'_w X_w$$

où :

$$X_w \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U_w]}(M_w, \pi_w^{V_w}) & \text{si } w \in \Sigma\backslash S' \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U_w]}(M_w, (\pi_w^{V_w})_{\alpha_w}) & \text{si } w \in S' \\ (\pi_w^{U_w})_{\alpha_w} & \text{si } w \in Q \\ (\pi_w^{\mathcal{O}_{D_w}^\times})_{\mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\overline{\rho}(\mathrm{Fr}_w))} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et où α en indice veut dire la somme des espaces propres généralisés pour T_w associés aux valeurs propres $a_w \in \overline{\mathbb{Z}_p}$ qui se réduisent sur $\alpha \in k_E$. Pour $w \notin \Sigma\cup Q$, les espaces $\pi_w^{\mathcal{O}_{D_w}^\times}$ sont de dimension 1 et $a_w = \mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\rho_\pi(\mathrm{Fr}_w))$, donc la dimension de $\otimes'_{w\notin\Sigma\cup Q}(\pi_w^{\mathcal{O}_{D_w}^\times})_{\mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\overline{\rho}(\mathrm{Fr}_w))}$ est 1 si ρ_π se réduit sur $\overline{\rho}$ et 0 sinon. On peut donc supposer que ρ_π est un relevé de $\overline{\rho}$ en déterminant les autres facteurs.

(ii) Supposons d'abord $w \in S\backslash S'$ (donc en particulier $w \nmid p$). Si $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est irréductible, alors le facteur en w est $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{D_w}^\times}(\vartheta_w, \pi_w)$, qui est non nul (et nécessairement de dimension 1) si et seulement si $\rho_\pi|_{I_w} \cong \sigma|_{I_w}$, i.e. $\rho_\pi(I_w) \overset{\sim}{\to} \overline{\rho}(I_w)$ (cf. le choix de σ au début de cette section).

Si $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est réductible et $w \notin \Sigma'$, alors $\overline{\rho}|_{I_w} \cong \overline{\xi}_w \oplus \overline{\xi}'_w$ pour des caractères $\overline{\xi}_w, \overline{\xi}'_w : I_w \to k_E^\times$ et $\mathrm{ind}_{U_w}^{\mathcal{O}_{D_w}^\times} \vartheta_w$ est un K-type pour $[\sigma, 0]$ (cf. § 3.2) où $\sigma|_{I_w} \cong [\overline{\xi}_w] \oplus [\overline{\xi}'_w]$. On en déduit comme dans le cas précédent que :

$$\mathrm{Hom}_{U_w}(\vartheta_w, \pi_w) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{D_w}^\times}(\mathrm{ind}_{U_w}^{\mathcal{O}_{D_w}^\times} \vartheta_w, \pi_w)$$

est non nul (nécessairement de dimension 1) si et seulement si $\rho_\pi(I_w) \xrightarrow{\sim} \overline{\rho}(I_w)$.

Si $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est réductible et $w \in \Sigma'$, alors $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \overline{\xi}_w \otimes \left(\begin{smallmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour un caractère $\overline{\xi}_w : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to k_E^\times$ et $\overline{\xi}_w^{-1} \otimes \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est ramifiée. Dans ce cas $\mathrm{Hom}_{U_w}(\vartheta_w, \pi_w)$ est non trivial si et seulement si π_w est de la forme $\eta_w \circ \det \otimes \pi'_w$ où η_w est un relevé de $\overline{\xi}_w$ tel que $\eta_w(I_w) = \overline{\xi}_w(I_w)$ et π'_w est soit une série principale non ramifiée soit la représentation de Steinberg. Comme $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ relève $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ et que $\overline{\xi}_w^{-1} \otimes \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est ramifiée, on ne peut avoir pour π'_w une série principale non ramifiée. On en déduit que $\mathrm{Hom}_{U_w}(\vartheta_w, \pi_w)$ est non nul (nécessairement de dimension 1) si et seulement si $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \eta_w \otimes \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, qui est équivalent à $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ de la forme demandée dans l'énoncé.

(iii) Supposons maintenant $w \in S'$. Considérons d'abord le cas $w \nmid p$. On a alors $\overline{\xi}'_w = \overline{\xi}_w$, D_w ramifiée et $U_w = \mathcal{O}_{D_w}^\times$. D'après les définitions de M_w et de T_w, on voit que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U_w]}(M_w, \pi_w)_{\alpha_w} \neq 0$ (nécessairement de dimension 1) si et seulement si $\pi_w = \eta_w \circ \det$ pour un caractère $\eta_w : F_w^\times \to \overline{\mathbb{Z}_p}^\times$ tel que $\eta_w|_{\mathcal{O}_{F_w}^\times} = [\overline{\xi}_w]|_{\mathcal{O}_{F_w}^\times}$ et $a_w = \eta_w(\det(\Pi_{D_w}))$ relève α_w (rappelons que Π_{D_w} est une uniformisante de $\mathcal{O}_{D_w}$), ce qui par compatibilité local-global est équivalent à $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ de la forme demandée.

Supposons $w|p$, $w \neq v$ et $\overline{\xi}_w|_{I_w} \neq \overline{\xi}'_w|_{I_w}$. Dans ce cas $\mathrm{ind}_{U_w}^{\mathcal{O}_{D_w}^\times} \vartheta_w$ est un K-type pour $[[\overline{\xi}_w] \oplus [\overline{\xi}'_w], 0]$, et donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U_w]}(M_w, \pi_w)$ est non nul si et seulement si $\mathrm{WD}(\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}) = \eta_w|\cdot| \oplus \eta'_w$ (avec $N = 0$) pour des caractères $\eta_w, \eta'_w : W_w \to \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ tels que $\eta_w|_{I_w} = [\overline{\xi}_w]|_{I_w}$, $\eta'_w|_{I_w} = [\overline{\xi}'_w]|_{I_w}$ et $\eta_w\eta'_w = \psi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$. De plus dans ce cas $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U_w]}(M_w, \pi_w)$ est de dimension 1 avec T_w agissant par $a_w = \eta_w(\varpi_w)$, de sorte que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U_w]}(M_w, \pi_w)_{\alpha_w}$ est non nul (nécessairement de dimension 1) si et seulement si la représentation de Weil-Deligne $\mathrm{WD}(\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)})$ est comme ci-dessus avec $\eta_w(\varpi_w) \in \overline{\mathbb{Z}_p}^\times$ relevant $\alpha_w = \overline{\xi}_w(\varpi_w)$ (et donc avec aussi $\eta'_w(\varpi_w) \in \overline{\mathbb{Z}_p}^\times$). Une représentation potentiellement semi-stable $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ a une telle représentation de Weil-Deligne si et seulement si $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est comme dans l'énoncé.

Supposons $w|p$, $w \neq v$ et $\overline{\xi}_w|_{I_w} = \overline{\xi}'_w|_{I_w}$. La preuve est similaire au cas précédent avec les modifications suivantes. Si $\overline{\xi}_w^{-1} \otimes \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ n'est pas la fibre générique d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_{F_w}$, alors on a

$\mathrm{WD}(\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}) = \eta_w|\cdot| \oplus \eta_w$ avec $N \neq 0$ et T_w agissant par $\eta_w(\varpi_w)$. Si $\overline{\xi}_w^{-1} \otimes \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la fibre générique d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_{F_w}$, alors $U_w = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})$ et on a $\mathrm{WD}(\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}) = \eta_w|\cdot| \oplus \eta'_w$ (avec $N = 0$) pour des η_w, η'_w comme dans le cas précédent, mais maintenant T_w agit par $\eta_w(\varpi_w) + \eta'_w(\varpi_w)\mathrm{N}(w)$. C'est une unité p-adique si et seulement si soit $\eta_w(\varpi_w)$ soit $\eta'_w(\varpi_w)\mathrm{N}(w)$ l'est. Quitte à échanger $\eta_w|\cdot|$ et η'_w on voit comme précédemment que $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est comme dans l'énoncé.

Supposons maintenant $w = v$. Comme $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est (réductible) générique, on a $\overline{\xi}_v|_{I_v} \neq \overline{\xi}'_v|_{I_v}$ et encore une fois $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U_v]}(M_v, \pi_v)$ non nul (nécessairement de dimension 1) si et seulement si $\mathrm{WD}(\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}) = \eta_v|\cdot|\oplus\eta'_v$ avec $N = 0$ et des caractères η_v, η'_v comme ci-dessus. Comme $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ relève $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$, on en déduit par la proposition 2.2.3 que dans ce cas le $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible qui donne $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est de type $\emptyset$ (cf. définition 2.2.1), et par le théorème 2.4.1 que $\eta_v(p)$ est une unité p-adique qui relève $\overline{\xi}_v(p)$. (Notons que le caractère $\eta'(\emptyset)$ du § 2.1 est la restriction à I_v du caractère noté ici η_v.) On conclut exactement comme précédemment.

(iv) Supposons enfin $w \in Q$ (donc en particulier $w \nmid p$). Par la condition **(Q)**, on a $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \overline{\xi}_w \oplus \overline{\xi}'_w$ pour des caractères distincts $\overline{\xi}_w, \overline{\xi}'_w : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to k_E^\times$ dont le quotient n'est pas $\omega^{\pm 1}$. Comme ρ_π relève $\overline{\rho}$, on en déduit $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \eta_w \oplus \eta'_w$ pour des caractères η_w et η'_w qui relèvent $\overline{\xi}_w$ et $\overline{\xi}'_w$. On a donc $\pi_w \cong \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(F_w)}^{\mathrm{GL}_2(F_w)}(\eta_w|\cdot|^{-1} \otimes \eta'_w)$ de sorte que $\mathrm{Hom}_{U_w}(M_w, \pi_w)$ est de dimension 2 avec $\eta_w(\varpi_w)\mathrm{N}(w)$ et $\eta'_w(\varpi_w)\mathrm{N}(w)$ pour valeurs propres de T_w. Comme une seule de ces valeurs propres se réduit sur α_w, on obtient que $\mathrm{Hom}_{U_w}(M_w, \pi_w)_{\alpha_w}$ est de dimension 1.

Ceci achève la preuve de $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} C_{Q,\mathfrak{m}_Q} \cong \oplus \rho_\pi$ avec π comme dans l'énoncé. Notons que $\tilde{\mathbb{T}}$ agit sur la composante en π via un homomorphisme $\tilde{\mathbb{T}} \to \overline{\mathbb{Q}_p}$ envoyant T_w sur $\mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\rho_\pi(\mathrm{Fr}_w))$ pour $w \notin \Sigma \cup Q$. Comme ces homomorphismes sont tous distincts, la conclusion concernant $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ s'ensuit.

(v) Le fait que l'ensemble de ces π est non vide découle du théorème 3.2.2 appliqué avec $S = \Sigma$, $\psi = \psi\varepsilon$ et $T =$ l'ensemble des places de F divisant p. Posons $\overline{\mu}_w = \overline{\xi}_w$ pour $w \in \Sigma'$ et choisissons les types de Weil-Deligne $[r_w, N_w]$ pour $w \in \Sigma$ comme ceux apparaissant dans la preuve ci-dessus. Un relevé ρ_w provenant d'un point à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ quelconque de l'anneau $R_w^{\triangle}$ du lemme 3.4.1 est du type demandé. Le théorème 3.2.2 produit alors un relevé $\rho = \rho_\pi$ qui a les propriétés requises. $\square$

Remarque 3.5.2. — Notons que, dans la preuve ci-dessus, le cas $w = v$ se distingue des cas $w|p$, $w \neq v$ car nous n'introduisons pas d'opérateur de Hecke T_v en v. Nous aurions pu, comme pour les places $w|p$, $w \neq v$, rajouter un tel opérateur et remplacer dans l'énoncé les hypothèses F_v non ramifiée, D_v déployée et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ réductible générique par juste D_v déployée et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ réductible non scalaire. Mais cela aurait alors compliqué l'énoncé et la preuve du théorème 3.7.1 ci-après qui, de toute manière, requièrent ces hypothèses plus fortes en v.

Nous aurons besoin d'une variante de la proposition 3.5.1 dans le cas $Q=\emptyset$. Écrivons :

$$\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)} \cong \begin{pmatrix} \overline{\xi}_v\omega & * \\ 0 & \overline{\xi}'_v \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \overline{\xi}_v\theta_v^{-1}\omega & * \\ 0 & \overline{\xi}'_v\theta_v^{-1} \end{pmatrix} \otimes \theta_v \tag{29}$$

où θ_v est l'unique caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ qui coïncide avec $\overline{\xi}'_v$ sur l'inertie et qui vaut 1 en p (si $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est scindée on fait un choix pour $\overline{\xi}_v$, $\overline{\xi}'_v$, et donc pour θ_v, cf. les remarques 2.1.2(ii) et 3.3.2(i)). Notons $\mathcal{S}_v$ l'ensemble des plongements de k_v dans k_E, on a :

$$\overline{\xi}_v\theta_v^{-1} = \mathrm{nr}(\lambda_v)\prod_{\sigma\in\mathcal{S}_v}\omega_\sigma^{r_{v,\sigma}} \quad \text{et} \quad \overline{\xi}'_v\theta_v^{-1} = \mathrm{nr}(\mu_v)$$

pour $\lambda_v,\mu_v\in k_E^\times$ et des $r_{v,\sigma}\in\{0,\cdots,p-3\}$ uniques avec $(r_{v,\sigma})_\sigma\neq(0,\cdots,0),(p-3,\cdots,p-3)$. Rappelons que l'on a alors défini en (4) le caractère $\eta'(J)\otimes\eta(J)$ de $\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})=U_v$ pour tout $J\subseteq\mathcal{S}_v$. Définissons les $\mathcal{O}_E$-modules $M(J)$ et $C(J)$ exactement comme l'on a défini M et $C_\emptyset$ au § 3.5 mais en remplaçant M_v par $M_v(J)\overset{\text{déf}}{=}\mathcal{O}_E(\eta'(J)\otimes\eta(J))$ (en particulier $M_v(\emptyset)=M_v$). On note $\mathbb{T}(J)$ le $\mathcal{O}_E$-module de type fini image de $\tilde{\mathbb{T}}$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_E}(C(J))$ et on pose $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_\emptyset$.

Proposition 3.5.3. — *Pour tout $J\subseteq\mathcal{S}_v$, on a des isomorphismes $\overline{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathcal{O}_E}C(J)_\mathfrak{m}\cong\oplus\rho_\pi$ et $\overline{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathbb{T}(J)_\mathfrak{m}\cong\oplus\overline{\mathbb{Q}_p}$ où $\overline{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathbb{T}(J)_\mathfrak{m}$ agit composante par composante sur $\overline{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathcal{O}_E}C(J)_\mathfrak{m}$ et où les sommes directes sont sur les représentations automorphes π de $(D\otimes\mathbb{A})^\times$ telles que :*

- $\pi_\infty\cong\sigma_2$
- $\det\rho_\pi=\psi\varepsilon$
- *ρ_π est un relevé de $\overline{\rho}$*
- *ρ_π est non ramifiée en dehors de Σ*
- *si $w\in\Sigma\backslash\Sigma'$, alors $\rho_\pi(I_w)\xrightarrow{\sim}\overline{\rho}(I_w)$*
- *si $w\in\Sigma'\backslash\{v\}$, alors $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}\cong\begin{pmatrix}\eta_w\varepsilon & * \\ 0 & \eta'_w\end{pmatrix}$ pour un caractère η_w relevant $\overline{\xi}_w$ tel que $\eta_w(I_w)\xrightarrow{\sim}\overline{\xi}_w(I_w)$*
- *si $w=v$, alors $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est potentiellement Barsotti-Tate de type de Weil-Deligne $[\eta'(J)\oplus\eta(J),0]$*
- *si $w|p$, $\overline{\xi}_w|_{I_w}=\overline{\xi}'_w|_{I_w}$ et $\overline{\xi}_w^{-1}\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la fibre générique d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_{F_w}$, alors $\eta_w^{-1}\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la fibre générique d'un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_{F_w}$.*

De plus, l'ensemble de telles π est non vide.

Démonstration. — La preuve est en tout point similaire à celle de la proposition 3.5.1, sauf pour la dernière assertion (cf. (v) dans la preuve de *loc.cit.*) où, pour pouvoir utiliser le théorème 3.2.2, il faut vérifier que la représentation $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ admet un relevé potentiellement Barsotti-Tate de type de Weil-Deligne $[\eta'(J)\oplus\eta(J),0]$. Cela se déduit par exemple de [**4**, Thm.5.1.1(i)] en se souvenant que $\tau(\emptyset)\in\mathcal{D}(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)})$ est un constituant de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})}\overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J)$, cf. § 2.6 (cela se déduit aussi du lemme 3.2.1 en utilisant que $\overline{\rho}$ est modulaire de poids $\tau(\emptyset)$ en v par la preuve du théorème 3.7.1(i) ci-après). □

Pour terminer cette section, nous revenons au cadre du § 3.3 (où il n'y a plus d'hypothèse sur v) pour montrer le corollaire suivant qui complète le corollaire 3.2.4.

Corollaire 3.5.4. — *Supposons $p>2$, $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)\to\mathrm{GL}_2(k_E)$ modulaire, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1}))}$ irréductible et, si $p=5$, l'image de $\overline{\rho}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1})))$ dans $\mathrm{PGL}_2(k_E)$ non isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$. Supposons également satisfaites les hypothèses* **(H0)**, **(H1)**, **(H2)** *(cf. §§ 3.2 et 3.3). Si D est ramifiée en v alors la représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ en (28) est de longueur infinie.*

Démonstration. — Soient τ_v, $\vartheta_{v,m}$ et $r_{v,m}$ comme dans la preuve du corollaire 3.2.4 et $\psi\overset{\text{déf}}{=}[\omega^{-1}\det\overline{\rho}]$. On applique le théorème 3.2.2 avec pour T l'ensemble des places $w\neq v$ divisant p, pour S l'ensemble $\Sigma=S\cup\{v\}$, avec $\overline{\mu}_w\overset{\text{déf}}{=}\overline{\xi}_w$ si $w\in\Sigma'\setminus\{v\}$, avec le type de Weil-Deligne $[r_{v,m},0]$ en v et avec les types de Weil-Deligne de la preuve de la proposition 3.5.1 aux places $w\neq v$ de Σ, c'est-à-dire :

– $[\sigma,0]$ comme dans le (ii) de cette preuve si $w\notin\Sigma'$
– $[[\overline{\xi}_w]|\cdot|\oplus[\overline{\xi}_w],N_w]$ avec $N_w\neq 0$ si $w\in\Sigma'$ mais $w\nmid p$, ou bien si $w|p$, $\overline{\xi}_w|_{I_w}=\overline{\xi}'_w|_{I_w}$ et $\overline{\xi}_w^{-1}\otimes\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ n'est pas la fibre générique d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_{F_w}$
– $[[\overline{\xi}_w]\oplus[\overline{\xi}'_w],0]$ sinon.

(L'existence des relevés locaux se déduit des lemmes 3.2.1 et 3.4.1.) Soit π_m une représentation automorphe de $(D\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{A})^\times$ donnée par le théorème 3.2.2 et la correspondance de Jacquet-Langlands. Sur une extension suffisamment grande E_m de E, on obtient comme dans la preuve de la proposition 3.5.1 :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U^v]}(M^v,\overline{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathcal{O}_{E_m}}\pi_m^0)\cong\overline{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\overline{\mathbb{Q}}}\pi_{m,v}$$

où $M^v\overset{\text{déf}}{=}\otimes_{w\in S}M_w$, π_m^0 est un $\mathcal{O}_{E_m}$-réseau de $\pi_{m,f}$ comme en (27) et T_w pour $w\in S'$ agit par multiplication par un scalaire dans $\mathcal{O}_{E_m}^\times$ qui se réduit sur $\alpha_w\in k_E^\times$. On déduit de la proposition 4.7 que le $\mathcal{O}_{E_m}$-rang de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U^v]}(M^v,\pi_m^0)$ est Cq_v^m pour un entier C strictement positif indépendant de m. Soit ϖ_{E_m} une uniformisante de $\mathcal{O}_{E_m}$, l'injection naturelle $\pi_m^0/\varpi_{E_m} \hookrightarrow k_{E_m} \otimes_{k_E} \pi_D(\overline{\rho})$ (cf. lemme 3.1.2) induit des injections compatibles avec l'action de T_w pour $w \in S'$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U^v]}(M^v, \pi_m^0)/\varpi_{E_m} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v, \pi_m^0/\varpi_{E_m})&\\ \hookrightarrow k_{E_m} \otimes_{k_E} \mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho}))&\end{aligned}$$

et l'image de l'injection composée tombe donc dans :

$$k_{E_m} \otimes_{k_E} \mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho}))[\mathfrak{m}'] = k_{E_m} \otimes_{k_E} \pi_{D,v}(\overline{\rho}).$$

On en déduit que $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ est de dimension (sur k_E) supérieure ou égale à Cq_v^m pour tout m et on conclut comme dans la preuve du corollaire 3.2.4. $\square$

3.6. Multiplicité un II. — On montre que le module $C_{\mathfrak{m}} = C_{\emptyset,\mathfrak{m}_\emptyset}$ est libre de rang 2 sur $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}} = \mathbb{T}_{\emptyset,\mathfrak{m}_\emptyset}$.

Beaucoup des arguments sont similaires à ceux que l'on trouve dans les articles généralisant [**47**] et [**43**]. Une différence cependant est que le but de ces articles étant typiquement de montrer la modularité de représentations galoisiennes, les méthodes de changement de base peuvent y être utilisées afin de simplifier les hypothèses sur le niveau. Nous donnons par conséquent des preuves complètes aux endroits où cette différence intervient. On conserve les notations des sections 3.3, 3.4 et 3.5 et les hypothèses de la section 3.5.

Pour une représentation automorphe π de $(D\otimes\mathbb{A})^\times$ comme dans la proposition 3.5.1, la représentation ρ_π est naturellement définie sur un objet de la catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ (cf. § 3.4) : prendre par exemple $\{a \in \mathcal{O}_{E'},\ \overline{a} \in k_E\}$ pour une extension E' suffisamment grande de E. Elle définit donc un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres $R_Q \to \overline{\mathbb{Q}_p}$ qui envoie $\mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\rho_Q^{\mathrm{univ}}(\mathrm{Fr}_w))$ sur la valeur propre de T_w agissant sur $\pi_w^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_w})}$ pour $w \notin \Sigma \cup Q$ (où $\rho_Q^{\mathrm{univ}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(R_Q)$ est dans la classe d'équivalence de la déformation universelle de $\overline{\rho}$ correspondante). Par la proposition 3.5.1, on obtient donc un morphisme $R_Q \to \overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ qui envoie $\mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\rho_Q^{\mathrm{univ}}(\mathrm{Fr}_w))$ sur $1 \otimes T_w$ pour $w \notin \Sigma \cup Q$. Comme R_Q est topologiquement engendré sur $\mathcal{O}_E$ par les traces $\{\mathrm{tr}(\rho_Q^{\mathrm{univ}}(\mathrm{Fr}_w)),\ w \notin \Sigma \cup Q\}$, ce morphisme est donc à valeurs dans $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$. On voit aussi que si $Q' \subseteq Q$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R_Q & \longrightarrow & R_{Q'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q} & \longrightarrow & \mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}} \end{array}$$

où la flèche du haut est la surjection canonique, les flèches verticales sont celles que l'on vient de définir et la flèche du bas peut être caractérisée comme l'unique application (surjective) qui envoie $T_w \in \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ sur l'unique racine $\tilde{\alpha}_w \in \mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$ de $X^2 - T_wX + \psi(\varpi_w)\mathrm{N}(w)$ (donnée par le lemme de Hensel) qui se réduit sur α_w si $w \in Q\backslash Q'$ et sur T_w sinon. Pour voir qu'une telle application existe et rend le diagramme commutatif, notons qu'il suffit de le vérifier après avoir tensorisé la ligne du bas par $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et avoir projeté sur chaque composante de $\overline{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$ dans la décomposition de la proposition 3.5.1. L'application de R_Q vers la composante correspondant à π se factorise par la composante de $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ correspondant à π où l'image de T_w y est déterminée par ρ_π comme suit :

(i) si $w \notin \Sigma \cup Q$ alors l'image est $\mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\rho_\pi(\mathrm{Fr}_w))$
(ii) si $w \in S'$ alors il existe un unique caractère η_w de $\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)$ relevant $\overline{\xi}_w$ tel que $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \left(\begin{smallmatrix} \eta_w\varepsilon & * \\ 0 & \eta'_w \end{smallmatrix}\right)$ et $\eta_w(I_w) = \overline{\xi}_w(I_w)$, l'image est alors $\eta_w(\varpi_w)$ sauf si $w|p$ et $\eta_w^{-1}\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la fibre générique d'un groupe p-divisible auquel cas l'image est $\eta_w(\varpi_w) + \mathrm{N}(w)\eta'_w(\varpi_w)$
(iii) si $w \in Q$ alors $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \eta_w \oplus \eta'_w$ où $\eta_w(\varpi_w)$ relève α_w mais pas $\eta'_w(\varpi_w)$ (voir (iv) dans la preuve de la proposition 3.5.1) et l'image est alors $\mathrm{N}(w)\eta_w(\varpi_w)$.

Considérons maintenant le morphisme canonique $R_Q^\square \to \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^\square \overset{\text{déf}}{=} R_Q^\square \otimes_{R_Q} \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$.

Lemme 3.6.1. — *(i) Il y a un unique morphisme de $R_Q^\square$-algèbres : $\alpha_Q : R_Q^\triangle \to \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^\square$.*
(ii) Si $w \in S'$, alors l'application induite $R_w^\triangle \to \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^\square$ correspond à une paire (σ_w, L_w) où $\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)$ agit sur L_w par un caractère $\eta_w\varepsilon$ tel que $\eta_w(\varpi_w) = T_w$.
(iii) Le morphisme α_Q est surjectif.

Démonstration. — Supposons d'abord $\mathcal{O}_E$ suffisamment grand pour contenir l'image du morphisme $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q} \to \overline{\mathbb{Q}_p}$ pour chaque π comme dans la proposition 3.5.1 (il n'y a qu'un nombre fini de telles π). Donc, pour chaque π, on a une déformation correspondante $\sigma_\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_E)$ de $\overline{\rho}$ non ramifiée en dehors de $\Sigma \cup Q$. Soit $\mathcal{O}_E^\square \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_E \otimes_{R_Q} R_Q^\square$, on a alors pour chaque $w \in \Sigma$ un relevé canonique :

$$\sigma_{\pi,w}^\square : \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_E^\square)$$

de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ de la forme $A_w \sigma_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} A_w^{-1}$ pour une matrice $A_w \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_E^\square)$ relevant la matrice identité de $\mathrm{GL}_2(k_E)$. Montrons que le morphisme correspondant $R_w^\square \to \mathcal{O}_E^\square$ se factorise en un unique morphisme $R_w^\triangle \to \mathcal{O}_E^\square$. Si $w \notin \Sigma'$, alors $\sigma_\pi(I_w) = \overline{\rho}(I_w)$, donc également $\sigma_{\pi,w}^\square(I_w) = \overline{\rho}(I_w)$ et le fait que $R_w^\square \to \mathcal{O}_E^\square$ se factorise par $R_w^\triangle$. Si $w \in \Sigma'$, alors $\sigma_\pi|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)} \cong \left(\begin{smallmatrix} \eta_w\varepsilon & * \\ 0 & \eta'_w \end{smallmatrix}\right)$ pour un caractère η_w relevant $\overline{\xi}_w$ et tel que $\eta_w(I_w) = \overline{\xi}_w(I_w)$. On en déduit un unique facteur direct de $(\mathcal{O}_E^\square)^2$ sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)$ agit par $\eta_w\varepsilon$. De plus si $w \in S'$ alors $\eta_w(\varpi_w)$ est l'image de T_w dans $\mathcal{O}_E$. On en déduit que $R_w^\square \to \mathcal{O}_E^\square$ se factorise de manière unique en $R_w^\triangle \to \mathcal{O}_E^\square$, et de plus que $\eta_w^{\mathrm{univ}}(\varpi_w) \in R_w^\triangle$ s'envoie vers l'image de T_w dans $\mathcal{O}_E$ pour $w \in S'$ (η_w^{univ} est le caractère $\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to R_w^\triangle$ relevant $\overline{\xi}_w$ dans le lemme 3.4.1).

Il suit de la définition de $R_w^\triangle$ que pour chaque π comme dans la proposition 3.5.1 la flèche $R_{\mathrm{loc}}^\square \to R_Q^\square \to \mathcal{O}_E^\square$ se factorise de manière unique en un morphisme

$R_{\mathrm{loc}}^{\triangle} \to \mathcal{O}_E^{\square}$, et donc que la flèche $R_Q^{\square} \to \mathcal{O}_E^{\square}$ se factorise de manière unique en un morphisme $R_Q^{\triangle} \to \mathcal{O}_E^{\square}$. On en déduit que :

$$R_Q^{\square} \to \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\square} \hookrightarrow \oplus_{\pi}\mathcal{O}_E^{\square}$$

se factorise de manière unique en un morphisme $R_Q^{\triangle} \to \oplus_{\pi}\mathcal{O}_E^{\square}$. Comme, par le lemme 3.4.1, $R_Q^{\triangle}$ est topologiquement engendré sur $R_Q^{\square}$ par $\{\eta_w^{\mathrm{univ}}(\varpi_w),\ w \in S'\}$, on voit que ce dernier morphisme est encore à valeurs dans $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\square}$.

Maintenant ne faisons plus l'hypothèse que E est suffisamment grand. Si E est remplacé par une extension E', les $\mathcal{O}_E$-algèbres $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\square}$, $R_Q^{\square}$ et $R_Q^{\triangle}$ sont remplacées par leur extension des scalaires à $\mathcal{O}_{E'}$ (voir la remarque 3.4.2). Donc, pour E' suffisamment grand, par le raisonnement précédent le morphisme :

$$\mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R_Q^{\square} \to \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\square}$$

se factorise de manière unique en un morphisme $\mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R_Q^{\triangle} \to \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\square}$ vérifiant le (ii) de l'énoncé. On en déduit que l'image de $R_Q^{\triangle}$ est contenue dans $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\square}$ ce qui démontre (i) et (ii).

Enfin, pour démontrer (iii), rappelons que si $w \notin \Sigma \cup Q$ alors $T_w \in \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ est l'image de $\mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\rho_Q^{\mathrm{univ}}(\mathrm{Fr}_w)) \in R_Q$. Si $w \in Q$, soit $g_w \in \mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)$ dont l'image dans $\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)^{\mathrm{ab}}$ correspond à l'uniformisante ϖ_w. Le polynôme caractéristique de $\rho_Q^{\mathrm{univ}}(g_w)$ a une unique racine dans R_Q qui se réduit sur $\mathrm{N}(w)^{-1}\alpha_w$, et cette racine s'envoie sur $\mathrm{N}(w)^{-1}T_w \in \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$. On en déduit que $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\square}$ est topologiquement engendré sur $R_Q^{\square}$ par les éléments T_w que l'on n'a pas considérés, i.e. les T_w pour $w \in S'$. Mais par (ii) ces éléments sont encore dans l'image de α_Q, donc α_Q est surjectif. $\square$

Notons que si $Q' \subseteq Q$, alors $R_{Q'}^{\square}$ s'identifie à $R_Q^{\square} \otimes_{R_{Q'}^{\square}} R_{Q'}$, et donc $\mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}^{\square}$ s'identifie à $R_Q^{\square} \otimes_{R_Q} \mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$. De plus la surjection induite $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\square} \to \mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}^{\square}$ est compatible avec les applications de source $R_w^{\triangle}$ pour $w \in \Sigma$ de sorte que l'on en déduit un diagramme commutatif où toutes les flèches sont surjectives :

$$\begin{array}{ccc} R_Q^{\triangle} & \longrightarrow & R_{Q'}^{\triangle} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\square} & \longrightarrow & \mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}^{\square}. \end{array}$$

On pose $C_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\square} \stackrel{\text{déf}}{=} R_Q^{\square} \otimes_{R_Q} C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ que l'on voit comme $R_Q^{\triangle}$-module via le morphisme α_Q du lemme 3.6.1.

Pour $w \in Q$, soit Δ_w le sous-groupe de p-Sylow de $k_w^{\times}$ et $\Delta_Q \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{w\in Q}\Delta_w$. L'argument de [**14**, Lem.2.44] montre que $\rho_Q^{\mathrm{univ}}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est la somme de deux caractères et l'on note η_w^{univ} celui qui se réduit sur $\overline{\xi}_w$ où $\overline{\xi}_w(\mathrm{Fr}_w) = \alpha'_w = \mathrm{N}(w)^{-1}$.

Comme $\eta_w^{\mathrm{univ}}|_{I_w}$ a une réduction triviale, donc est d'ordre une puissance de p, il se factorise par $I_w \to \mathcal{O}_{F_w}^\times \to k_w^\times$ (rappelons que $w \nmid p$). Si l'on restreint l'application induite $k_w^\times \to R_Q^\times$ à Δ_w, on a un homomorphisme $\Delta_w \to R_Q^\times$ pour chaque $w \in Q$. En prenant le produit sur $w \in Q$ on obtient un homomorphisme $\Delta_Q \to R_Q^\times$, donc un homomorphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres $\mathcal{O}_E[\Delta_Q] \to R_Q$ par lequel on voit $C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ comme un $\mathcal{O}_E[\Delta_Q]$-module.

On peut aussi définir une action naturelle de Δ_w sur $C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ comme suit. On identifie Δ_w à un sous-groupe de U_w^0/U_w via l'isomorphisme $U_w^0/U_w \xrightarrow{\sim} k_w^\times$ défini par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad^{-1} \bmod \varpi_w \mathcal{O}_{F_w}.$$

Alors l'action naturelle de U_w^0/U_w sur $H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)$ commute avec celles de G et $\tilde{\mathbb{T}}$ et donc induit une action sur $C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$. La compatibilité avec la correspondance de Langlands locale nous dit que Δ_w agit via η_w sur $(\pi_w^{U_w})_{\alpha_w}$ pour chaque π comme dans la proposition 3.5.1 (en utilisant les notations de sa preuve) ce qui entraîne que les deux définitions de l'action de Δ_w coïncident. Notons en particulier que, pour chaque représentation automorphe π qui contribue à la décomposition de $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$, le facteur local π_w est une série principale qui est non ramifiée si et seulement si U_w^0 agit trivialement sur la composante correspondante de $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{O}_E} C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$.

Supposons maintenant $Q' \subseteq Q$. Soit $\tilde{\mathbb{T}}^0$ la sous-$\mathcal{O}_E$-algèbre de $\tilde{\mathbb{T}}$ engendrée par les T_w pour $w \notin (\Sigma \backslash S') \cup (Q \backslash Q')$, $\mathbb{T}_Q^0$ (resp. $\mathbb{T}_{Q'}^0$) l'image de $\tilde{\mathbb{T}}^0$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_E}(C_Q)$ (resp. $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_E}(C_{Q'})$) et soit $\mathfrak{m}^0 \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{m}_Q \cap \tilde{\mathbb{T}}^0 = \mathfrak{m}_{Q'} \cap \tilde{\mathbb{T}}^0$. La preuve de la proposition 3.5.1 est encore valable lorsque $\mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$ est remplacé par $\mathbb{T}^0_{Q',\mathfrak{m}^0}$ et montre que $\mathbb{T}^0_{Q',\mathfrak{m}^0}$ et $\mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$ ont même rang sur $\mathcal{O}_E$, de même que $C_{Q',\mathfrak{m}^0}$ et $C_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$. La construction de la flèche $R_{Q'} \to \mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$ est aussi valable, et montre qu'elle se factorise par $\mathbb{T}^0_{Q',\mathfrak{m}^0}$. Comme T_w est dans l'image de $R_{Q'}$ pour chaque $w \in Q \setminus Q'$, on en déduit que l'application naturelle $\mathbb{T}^0_{Q',\mathfrak{m}^0} \to \mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$ est surjective, donc est un isomorphisme. Comme l'application naturelle $C_{Q',\mathfrak{m}^0} \to C_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$ est automatiquement surjective, c'est aussi un isomorphisme. L'injection naturelle $C_{Q'} \to C_Q$ est $\tilde{\mathbb{T}}^0$-linéaire, donc induit un morphisme $C_{Q',\mathfrak{m}^0} \to C_{Q,\mathfrak{m}^0}$, et on considère l'application composée :

$$\iota_Q^{Q'} : C_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}} \cong C_{Q',\mathfrak{m}^0} \to C_{Q,\mathfrak{m}^0} \to C_{Q,\mathfrak{m}_Q}.$$

En tensorisant par $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et en appliquant la décomposition de la proposition 3.5.1, on voit que $\iota_Q^{Q'}$ est $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$-linéaire où l'action de $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ sur $C_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$ est définie via la surjection $\mathbb{T}_{Q,\mathfrak{m}_Q} \to \mathbb{T}_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}}$ précédente (envoyant T_w sur $\tilde{\alpha}_w$ pour $w \in Q \backslash Q'$). On pose $\Delta_{Q \backslash Q'} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{w \in Q \backslash Q'} \Delta_w$.

Lemme 3.6.2. — *(i) L'application* $\iota_Q^{Q'}$ *induit un isomorphisme* $C_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}} \xrightarrow{\sim} C_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\Delta_{Q\backslash Q'}}$.
(ii) Le module $C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ *est libre sur* $\mathcal{O}_E[\Delta_Q]$.

Démonstration. — (i) Pour $w \in Q\backslash Q'$, soit U'_w la préimage de Δ_w dans U^0_w (on a donc $U_w \subseteq U'_w \subseteq U^0_w$). On pose :

$$U_Q \subseteq U_Q^{Q'} \overset{\text{déf}}{=} U_Q \prod_{w\in Q\backslash Q'} U'_w \subseteq U_{Q,0}^{Q'} \overset{\text{déf}}{=} U_Q \prod_{w\in Q\backslash Q'} U^0_w \subseteq U_{Q'} = U_Q \prod_{w\in Q\backslash Q'} \mathcal{O}_{D_w}^\times$$

$$V_Q \subseteq V_Q^{Q'} \overset{\text{déf}}{=} V_Q \prod_{w\in Q\backslash Q'} U'_w \subseteq V_{Q,0}^{Q'} \overset{\text{déf}}{=} V_Q \prod_{w\in Q\backslash Q'} U^0_w \subseteq V_{Q'} = V_Q \prod_{w\in Q\backslash Q'} \mathcal{O}_{D_w}^\times$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} C_Q^{Q'} &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[G]}\big(M, H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q^{Q'},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)\big)\\ C_{Q,0}^{Q'} &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[G]}\big(M, H^1_{\text{ét}}(X_{V_{Q,0}^{Q'},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)\big). \end{aligned}$$

L'application $\iota_Q^{Q'}$ est alors la composée des applications :

$$C_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}} \to C_{Q,0,\mathfrak{m}_Q}^{Q'} \to C_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{Q'} \to C_{Q,\mathfrak{m}_Q}.$$

D'après la preuve de la proposition 3.5.1 (et la compatibilité entre les deux descriptions de l'action de Δ_w), on voit que les trois premiers $\mathcal{O}_E$-modules ont même rang que le $\mathcal{O}_E$-module $C_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\Delta_{Q\backslash Q'}}$.

(ii) Montrons que la flèche $C_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}} \to C_{Q,0,\mathfrak{m}_Q}^{Q'}$ est un isomorphisme. Par induction, il suffit de montrer que l'application :

$$\delta : C_{Q'',0,\mathfrak{m}_{Q''}}^{Q'} \to C_{Q,0,\mathfrak{m}_Q}^{Q'},$$

avec $Q' \subset Q''$ et $Q = Q'' \cup \{w\}$ pour une place $w \notin Q'$ est un isomorphisme. Pour cela, comme les deux $\mathcal{O}_E$-modules ont même rang, on voit qu'il suffit de définir une application $\mathcal{O}_E$-linéaire :

$$\epsilon : C_{Q,0,\mathfrak{m}_Q}^{Q'} \to C_{Q'',0,\mathfrak{m}_{Q''}}^{Q'}$$

telle que $\epsilon \circ \delta$ est bijectif. Soit π le morphisme naturel $X_{V_{Q,0}^{Q'}} \to X_{V_{Q'',0}^{Q'}}$ (π n'est pas une représentation automorphe ici !), δ provient donc de l'application :

$$\pi^* : H^1_{\text{ét}}(X_{V_{Q'',0}^{Q'},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1) \to H^1_{\text{ét}}(X_{V_{Q,0}^{Q'},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1).$$

Soit $g_w \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_w \end{smallmatrix}\right)$, on a $g_w^{-1} U^0_w g_w \subset \mathcal{O}_{D_w}^\times$ et donc $g_w^{-1} V_{Q,0}^{Q'} g_w \subset V_{Q'',0}^{Q'}$. Soit π' le morphisme associé $X_{V_{Q,0}^{Q'}} \to X_{V_{Q'',0}^{Q'}}$. On ne va pas utiliser l'application $(\pi')^*$ sur la cohomologie, mais plutôt les deux applications trace :

$$\pi_*, \pi'_* : H^1_{\text{ét}}(X_{V_{Q,0}^{Q'},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1) \to H^1_{\text{ét}}(X_{V_{Q'',0}^{Q'},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1).$$

(L'application π'_* peut être vue comme associée à la double classe $\mathcal{O}_{D_w}^\times g_w^{-1} U_w$.) Les applications π_* et π'_* commutent avec l'action de G et celle des opérateurs $T_{w'}$ pour $w' \notin (\Sigma \cup \{w\}) \backslash S'$. Un calcul standard de doubles classes donne la relation :

$$\begin{pmatrix} \pi_* \\ \pi'_* \end{pmatrix} \circ T_w = \begin{pmatrix} 0 & S_w \mathrm{N}(w) \\ -1 & T_w \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \pi_* \\ \pi'_* \end{pmatrix}$$

entre applications $H^1_{\text{ét}}(X_{V^{Q'}_{Q,0},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1) \to H^1_{\text{ét}}(X_{V^{Q'}_{Q'',0},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)^2$, où le T_w à gauche est un endomorphisme de $H^1_{\text{ét}}(X_{V^{Q'}_{Q,0},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)$, le T_w à droite un endomorphisme de $H^1_{\text{ét}}(X_{V^{Q'}_{Q'',0},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)$, et où S_w est défini par l'action de $\varpi_w \in D_w^\times$. Notant encore π_* et π'_* les applications induites $C^{Q'}_{Q,0,\mathfrak{m}^0} \to C^{Q'}_{Q'',0,\mathfrak{m}^0} = C^{Q'}_{Q'',0,\mathfrak{m}_{Q''}}$, on en déduit que $\pi_* - \tilde{\alpha}_w \circ \pi'_*$ se factorise par la localisation $C^{Q'}_{Q,0,\mathfrak{m}^0} \to C^{Q'}_{Q,0,\mathfrak{m}_Q}$ et on définit ϵ comme l'application induite $C^{Q'}_{Q,0,\mathfrak{m}_Q} \to C^{Q'}_{Q'',0,\mathfrak{m}_{Q''}}$. Comme $\pi_* \pi^* = \mathrm{N}(w) + 1$ et $\pi'_* \pi^* = S_w^{-1} T_w$, on en déduit :

$$\epsilon \circ \delta = \mathrm{N}(w) + 1 - \psi(\varpi_w)^{-1} \tilde{\alpha}_w T_w = 1 - \psi(\varpi_w)^{-1} \tilde{\alpha}_w^2 = 1 - \mathrm{N}(w) \tilde{\alpha}_w \tilde{\beta}_w^{-1} \in \mathbb{T}_{Q'',\mathfrak{m}_{Q''}}$$

où $\tilde{\beta}_w$ est l'autre racine de $X^2 - T_w X + \psi(\varpi_w)\mathrm{N}(w)$. Par l'hypothèse **(Q)**, on voit que $1 - \mathrm{N}(w)\tilde{\alpha}_w \tilde{\beta}_w^{-1}$ a une réduction non nulle, et donc est une unité dans $\mathbb{T}_{Q'',\mathfrak{m}_{Q''}}$. Donc $\epsilon \circ \delta$ est un isomorphisme.

(iii) Montrons que $C^{Q'}_{Q,0,\mathfrak{m}_Q} \to C^{Q'}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ est un isomorphisme. L'application :

$$X_{V^{Q'}_Q} \to X_{V^{Q'}_{Q,0}}$$

étant de degré premier à p, la composition avec l'application $C^{Q'}_{Q,\mathfrak{m}_Q} \to C^{Q'}_{Q,0,\mathfrak{m}_Q}$ induite par la trace est un automorphisme de $C^{Q'}_{Q,0,\mathfrak{m}_Q}$. Comme les deux $\mathcal{O}_E$-modules $C^{Q'}_{Q,0,\mathfrak{m}_Q}$ et $C^{Q'}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ ont même rang, on en déduit que $C^{Q'}_{Q,0,\mathfrak{m}_Q} \to C^{Q'}_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ est un isomorphisme.

(iv) On introduit maintenant une place auxiliaire pour simplifier le reste de l'argument. Par [**18**, Lem.3], il y a un nombre infini de places finies w vérifiant **(Q)** telles que $\mathrm{N}(w) \not\equiv 1 \bmod p$ (le lemme de *loc.cit.* ne dit pas que les racines du polynôme caractéristique sont distinctes, mais sa preuve montre que l'on peut toujours le supposer lorsque $p > 3$). On peut donc choisir une telle place $w_0 \notin Q$ telle que w_0 ne divise aucun nombre premier q vérifiant $[F(\sqrt[q]{1}) : F] \leq 2$. Comme Δ_{w_0} est trivial, on a :

$$C^{Q'}_{Q \cup \{w_0\}, \mathfrak{m}_{Q \cup \{w_0\}}} = C^{Q' \cup \{w_0\}}_{Q \cup \{w_0\}, \mathfrak{m}_{Q \cup \{w_0\}}}$$

ce qui montre déjà (par ce qui précède) que les applications horizontales dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} C_{Q',\mathfrak{m}_{Q'}} & \to & C^{Q'}_{Q,\mathfrak{m}_Q} & \to & C^{Q'\cup\{w_0\}}_{Q\cup\{w_0\},\mathfrak{m}_{Q\cup\{w_0\}}} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & C_{Q,\mathfrak{m}_Q} & \to & C_{Q\cup\{w_0\},\mathfrak{m}_{Q\cup\{w_0\}}} \end{array}$$

sont toutes des isomorphismes. On peut donc remplacer Q' par $Q'\cup\{w_0\}$ et Q par $Q\cup\{w_0\}$, i.e. supposer que Q' contient w_0.

L'hypothèse sur w_0 assure que, pour $x\in D_f^\times$, le groupe :

$$\Gamma_x \overset{\text{déf}}{=} (D^\times\cap xU_Q^{Q'}x^{-1}\mathbb{A}_F^\times D_\infty^\times)/F^\times$$

n'a pas d'élément non trivial d'ordre fini. (Pour voir cela, notons que si $\gamma F^\times\in\Gamma_x$ est d'ordre premier q, alors le quotient des racines du polynôme caractéristique de γ est une racine q-ième de 1 et $[F(\sqrt[q]{1}) : F]\le 2$. Comme d'autre part $\gamma_{w_0}\in x_{w_0}U_{w_0}x_{w_0}^{-1}F_{w_0}^\times$, la réduction de ce quotient est congrue à 1 modulo w_0, ce qui implique que $w_0|q$ et est impossible par choix de w_0.) Cela entraîne que, dans l'action à droite du groupe $G\times\Delta_{Q\backslash Q'}\cong U_Q^{Q'}\mathbb{A}_{F,f}^\times/V_QF^\times$ sur la courbe X_{V_Q}, les éléments non triviaux de $G\times\Delta_{Q\backslash Q'}$ ne fixent aucun point géométrique. En effet, il suffit de le vérifier pour l'action sur les points complexes de $D^\times\backslash((\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})\times D_f^\times/V_Q)$. Si $u\in U_Q^{Q'}\mathbb{A}_{F,f}^\times$ fixe le point $D^\times(z,xV_Q)$ (avec $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, x\in D_f^\times$) alors $(z,xu)=(\gamma_\tau(z),\gamma_f xv)$ pour $\gamma\in D^\times$ et $v\in V_Q$ où γ_f est l'image de γ dans $D_f^\times$ et γ_τ son image dans $D_\tau^\times\cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (rappelons que τ est l'unique place archimédienne de F où D est deployée). Comme $\gamma_f = xuv^{-1}x^{-1}$, on en déduit que $\gamma F^\times\in\Gamma_x$, mais l'image de Γ_x dans l'injection $D^\times/F^\times\hookrightarrow D_\tau^\times/F_\tau^\times\cong\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ est discrète et le stabilisateur de z est compact, donc $\gamma F^\times$ est d'ordre fini, ce qui implique $\gamma\in F^\times$ et donc $u\in V_QF^\times$.

On a donc un diagramme commutatif de revêtements galoisiens étales de courbes connexes sur F:

$$\begin{array}{ccc} X_{V_Q} & \to & X_{V_Q^{Q'}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_Q & \to & X_Q^{Q'}, \end{array}$$

où $X_Q^{Q'}\overset{\text{déf}}{=} X_{V_Q^{Q'}}/G$, $X_Q\overset{\text{déf}}{=}X_{V_Q}/G$, les applications horizontales ont comme groupe de Galois $\Delta_{Q\backslash Q'}$, les applications verticales G, et où on fait agir à gauche les éléments de ces groupes via l'action à droite de leur inverse.

Soit $\mathcal{F}$ le $\mathcal{O}_E$-faisceau lisse sur la courbe $X_Q^{Q'}$ associé à l'action de son groupe fondamental $\pi_1(X_Q^{Q'},\overline{s})$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(M,\mathcal{O}_E(1))$ où $\pi_1(X_Q^{Q'},\overline{s})$ agit sur M via son quotient G ($\overline{s}$ est un point géométrique). On note encore $\mathcal{F}$ son image inverse sur $X_{\overline{\mathbb{Q}}}$ pour toutes les courbes X du diagramme ci-dessus. Notons que C_Q s'identifie alors à $H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{F})^G$, et la suite spectrale de Hochschild-Serre donne donc une suite exacte de $\mathcal{O}_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)]$-modules :

$$0 \to H^1(G \times \Delta_{Q\backslash Q'}, H^0_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F})) \to H^1_{\text{ét}}(X^{Q'}_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}) \to \\ C_Q^{\Delta_{Q\backslash Q'}} \to H^2(G \times \Delta_{Q\backslash Q'}, H^0_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F})).$$

Comme l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ sur $H^0_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F})$ se factorise par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}}$ et que $C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ est un réseau dans une somme directe de représentations ρ_π dont la réduction $\overline{\rho}$ est irréductible, on en déduit que l'application composée :

$$H^1_{\text{ét}}(X^{Q'}_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}) \to C_Q^{\Delta_{Q\backslash Q'}} \to C_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\Delta_{Q\backslash Q'}}$$

est surjective. Elle se factorise par $C^{Q'}_{Q,\mathfrak{m}_Q} \to C_{Q,\mathfrak{m}_Q}^{\Delta_{Q\backslash Q'}}$ qui est donc aussi surjective. Cela achève la preuve de (i) puisque ces $\mathcal{O}_E$-modules ont le même rang.

(v) Comme $H^j_{\text{ét}}(X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F})$ et $H^j_{\text{ét}}(X^{Q'}_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F})$ sont nuls pour $j > 2$ et comme l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ se factorise par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}}$ pour $j = 0, 2$, la suite spectrale de Hochschild-Serre appliquée au revêtement $X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}} \to X^{Q'}_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}$ montre que, pour $i > 0$, le $\mathcal{O}_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)]$-module $H^i(\Delta_{Q\backslash Q'}, H^1_{\text{ét}}(X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}))$ a une filtration finie pour laquelle $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ agit via $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}}$ sur chaque gradué. De plus la suite spectrale de Hochschild-Serre pour le revêtement $X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}} \to X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}$ montre que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ sur les noyau et conoyau de $H^1_{\text{ét}}(X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}) \to C_Q$ se factorise par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}}$. On en déduit que $H^i(\Delta_{Q\backslash Q'}, C_Q)$ a une filtration finie pour laquelle $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ agit via $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}}$ sur chaque gradué. Comme $C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ est un facteur direct de C_Q en tant que $\mathcal{O}_E[\Delta_{Q\backslash Q'} \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)]$-module, ceci reste vrai avec $C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ au lieu de C_Q. Par ailleurs, par dévissage on voit que $H^i(\Delta_{Q\backslash Q'}, C_{Q,\mathfrak{m}_Q})$ a une filtration finie par des sous-$\mathcal{O}_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)]$-modules tels que chaque gradué est isomorphe à $\overline{\rho}$. On en déduit finalement que $H^i(\Delta_{Q\backslash Q'}, C_{Q,\mathfrak{m}_Q}) = 0$ pour tout $i > 0$, ce qui implique que $C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ est libre sur $\mathcal{O}_E[\Delta_{Q\backslash Q'}]$ par [**6**, VI(8.7)]. □

Tous les ingrédients sont maintenant en place pour appliquer le "patching argument" de Taylor-Wiles et démontrer le résultat principal de cette section. Lorsque $Q = \emptyset$, on omet l'indice Q.

Théorème 3.6.3. — *(i) Le $\mathbb{T}_\mathfrak{m}$-module $C_\mathfrak{m}$ est libre de rang* 2.
(ii) L'anneau local $\mathbb{T}_\mathfrak{m}$ est un anneau d'intersection complète sur $\mathcal{O}_E$.

Démonstration. — On le démontre exactement comme dans [**32**, Thm.3.4.11]. Aux notations près, la seule différence est que l'anneau jouant le rôle de B dans *loc.cit.*, c'est-à-dire $R^{\triangle}_{\text{loc}}$, est ici formellement lisse sur $\mathcal{O}_E$ et il n'y a donc pas besoin d'inverser p dans la conclusion de [**32**, Prop.3.3.1] (et en fait la preuve devient plus simple, voir [**16**, Thm.2.1]). On conclut par conséquent que $R^{\triangle} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^{\square}_\mathfrak{m} = R^{\square} \otimes_R \mathbb{T}_\mathfrak{m}$ est un isomorphisme d'anneaux locaux d'intersection complète sur $\mathcal{O}_E$ et que $R^{\square} \otimes_R C_\mathfrak{m}$ est libre de rang 2 sur $\mathbb{T}^{\square}_\mathfrak{m}$. Comme $R^{\square}$ est formellement lisse sur $\mathcal{O}_E$, on en déduit que $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ est un anneau local d'intersection complète sur $\mathcal{O}_E$ et que $C_{\mathfrak{m}}$ est libre de rang 2 sur $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$. $\square$

3.7. Résultats principaux. — On montre les deux théorèmes énoncés dans l'introduction.

On conserve les notations et hypothèses des sections précédentes. Rappelons ces hypothèses. On fixe un corps totalement réel F et une représentation :

$$\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$$

continue, modulaire, irréductible en restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1}))$ (où k_E est une extension finie de $\mathbb{F}_q$ suffisamment grande comme au § 3.1), telle que l'image de $\overline{\rho}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F(\sqrt[p]{1})))$ dans $\mathrm{PGL}_2(k_E)$ est non isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ si $p = 5$, et vérifiant les hypothèses :

(i) $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est réductible non scalaire aux places w de F divisant p

(ii) il existe une place v (fixée) de F divisant p telle que F_v est une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est générique (réductible).

Rappelons que (ii) implique $p > 3$.

On fixe une algèbre de quaternions D sur F vérifiant les hypothèses :

(iii) D est déployée en une seule des places infinies et aux places divisant p

(iv) si w est une place finie de F où D est ramifiée, alors $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est soit irréductible soit non scalaire de la forme $\overline{\mu}_w \left(\begin{smallmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour un caractère $\overline{\mu}_w$: $\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w) \to k_E^\times$.

Rappelons que (iv) implique $\pi_D(\overline{\rho}) \neq 0$ par le corollaire 3.2.3.

On écrit $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ comme en (29) et on rappelle que $\tau(\emptyset) \in \mathcal{D}(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)})$ est l'unique poids de Serre tel que l'action de $U_v = \mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})$ sur $\tau(\emptyset)^{\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_{F_v})}$ est donnée par $\overline{M}_v = \overline{\eta}'(\emptyset) \otimes \overline{\eta}(\emptyset) = \overline{\xi}_v|_{[k_v^\times]} \otimes \overline{\xi}'_v|_{[k_v^\times]}$ (cf. § 2.6). Rappelons aussi que l'on a défini $Z(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)})$ en (2) et $F(J)$ en (5) pour $J \subseteq \mathcal{S}_v$.

Théorème 3.7.1. — *(i) On a* $\dim_{k_E} \mathrm{Hom}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})]} \big(\tau(\emptyset), \pi_{D,v}(\overline{\rho})\big) = 1$.
(ii) Pour tout $J \subseteq \mathcal{S}_v$*, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})]} \left(\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})} \overline{\eta}'(J) \otimes \overline{\eta}(J), \pi_{D,v}(\overline{\rho})\right) \neq 0.$$

et si de plus $Z(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}) \cap F(J) = \emptyset$*, alors cet espace d'homomorphismes est de dimension* 1 *sur* k_E*.*

Démonstration. — (i) Par le théorème 3.6.3(i), on a $C_{\mathfrak{m}}/\varpi_E$ libre de rang 2 sur $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}/\varpi_E$. Par le théorème 3.6.3(ii), l'anneau artinien $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}/\varpi_E$ est d'intersection complète, donc Gorenstein. Par conséquent $(\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}/\varpi_E)[\mathfrak{m}]$ est de dimension 1 sur k_E, et donc $(C_{\mathfrak{m}}/\varpi_E)[\mathfrak{m}]$ de dimension 2 sur k_E.

Montrons que l'application naturelle injective :

$$C/\varpi_E = k_E \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[G]}\big(M, H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M}, H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)$$

est un isomorphisme après localisation en $\mathfrak{m}$ (où $\overline{M} \overset{\text{déf}}{=} M/\varpi_E$ et où on omet $Q = \emptyset$ en indice). Posons $Q = \{w_0\}$ où la place w_0 est comme dans la preuve du lemme 3.6.2, on a un isomorphisme $C_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} C_{Q,\mathfrak{m}_Q}$ (lemme 3.6.2) et un isomorphisme défini de manière analogue :

$$\mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M}, H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M}, H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)_{\mathfrak{m}_Q}.$$

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^1_{\text{ét}}(X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}) & \to H^1_{\text{ét}}(X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}/\varpi_E) & \to H^2_{\text{ét}}(X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}) \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[G]}\big(M, H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)\big) & \to & \mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M}, H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big) & \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & H^2\big(G, \mathrm{Hom}_{k_E}\big(\overline{M}, H^0_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)\big) &
\end{array}$$

avec X_Q et $\mathcal{F}$ comme dans la preuve du lemme 3.6.2. Comme la ligne du haut et la colonne de droite sont exactes et que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ sur $H^2_{\text{ét}}(X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F})$ et $H^0_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E(1))$ se factorise par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}}$, on a (comme dans la partie (v) de la preuve du lemme 3.6.2) que l'application composée :

$$H^1_{\text{ét}}(X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X_{Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}/\varpi_E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M}, H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)_{\mathfrak{m}_Q}$$

est surjective, et donc qu'il en est de même de :

$$C_{Q,\mathfrak{m}_Q} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[G]}\big(M, H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E)(1)\big)_{\mathfrak{m}_Q} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M}, H^1_{\text{ét}}(X_{V_Q,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)_{\mathfrak{m}_Q}.$$

On en déduit avec ce qui précède que :

$$C_{\mathfrak{m}}/\varpi_E \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M}, H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)_{\mathfrak{m}}$$

est un isomorphisme et donc que :

$$\dim_{k_E} \mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M}, H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)[\mathfrak{m}] = \dim_{k_E}(C_{\mathfrak{m}}/\varpi_E)[\mathfrak{m}] = 2.$$

Montrons maintenant que $\mathrm{Hom}_{k_E[U_v]}(\overline{M}_v, \pi_{D,v}(\overline{\rho}))$ a dimension 1. Par [**8**, Lem.4.6] et [**8**, Lem.4.10] (aux changements de convention près, cf. § 3.1), on a l'isomorphisme d'évaluation ([**8**, Lem.4.11]) :

$$\overline{\rho} \otimes_{k_E} \pi_D(\overline{\rho})^V \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)[\mathfrak{m}^{\Sigma}_{\overline{\rho}}]$$

où $\mathfrak{m}_{\overline{\rho}}^{\Sigma}$ est l'idéal de $k_E[T_w, S_w]_{w\notin\Sigma}$ engendré par les éléments $T_w - \mathrm{N}(w)\,\mathrm{tr}(\overline{\rho}(\mathrm{Fr}_w))$ et $S_w - \mathrm{N}(w)\det(\overline{\rho}(\mathrm{Fr}_w))$ pour $w \notin \Sigma$. On a donc les identifications par (28) :

$$\begin{aligned}\overline{\rho}\otimes_{k_E}\mathrm{Hom}_{k_E[U_v]}(\overline{M}_v, \pi_{D,v}(\overline{\rho})) &= \overline{\rho}\otimes_{k_E}\mathrm{Hom}_{k_E[U]}(\overline{M}_v\otimes_{k_E}\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho}))[\mathfrak{m}'] \\ &= \mathrm{Hom}_{k_E[U/V]}(\overline{M}_v\otimes_{k_E}\overline{M}^v, \overline{\rho}\otimes_{k_E}\pi_D(\overline{\rho})^V)[\mathfrak{m}'] \\ &= \mathrm{Hom}_{k_E[U/V]}\big(\overline{M}, H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)[\mathfrak{m}_{\overline{\rho}}^{\Sigma}]\big)[\mathfrak{m}'] \\ &= \mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M}, H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)[\mathfrak{m}]\end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, on a identifié l'action des opérateurs S_w avec celle des éléments correspondants de $G = U\mathbb{A}_{F,f}^{\times}/VF^{\times}$. Comme on vient de montrer que ce dernier espace a dimension 2, on en déduit que $\mathrm{Hom}_{k_E[U_v]}(\overline{M}_v, \pi_{D,v}(\overline{\rho}))$ a dimension 1, ou encore par réciprocité de Frobenius :

$$\dim_{k_E}\mathrm{Hom}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})]}\big(\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})}\overline{\eta}'(\emptyset)\otimes\overline{\eta}(\emptyset), \pi_{D,v}(\overline{\rho})\big) = 1.$$

Par le lemme 2.1.4, le seul constituant de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})}\overline{\eta}'(\emptyset)\otimes\overline{\eta}(\emptyset)$ qui est dans $\mathcal{D}(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)})$ est son co-socle $\tau(\emptyset)$. Le théorème 3.1.1 implique alors que les homomorphismes :

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})}\overline{\eta}'(\emptyset)\otimes\overline{\eta}(\emptyset)\longrightarrow\pi_{D,v}(\overline{\rho})$$

sont exactement ceux qui se factorisent par le co-socle $\tau(\emptyset)$. On en déduit que $\mathrm{Hom}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})]}(\tau(\emptyset), \pi_{D,v}(\overline{\rho}))$ a aussi dimension 1.

(ii) Par la proposition 3.5.3, on a $C(J)_{\mathfrak{m}} \neq 0$ et l'injection :

$$C(J)_{\mathfrak{m}}/\varpi_E \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M(J)}, H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)_{\mathfrak{m}}$$

implique donc en particulier $\mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M(J)}, H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)[\mathfrak{m}] \neq 0$. On montre comme dans le (i) ci-dessus l'identification :

$$\overline{\rho}\otimes_{k_E}\mathrm{Hom}_{k_E[U_v]}\big(\overline{M_v(J)}, \pi_{D,v}(\overline{\rho})\big)\cong\mathrm{Hom}_{k_E[G]}\big(\overline{M(J)}, H^1_{\text{ét}}(X_{V,\overline{\mathbb{Q}}}, k_E)(1)\big)[\mathfrak{m}].$$

On voit donc que :

$$\mathrm{Hom}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})]}\big(\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_{F_v})}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})}\overline{\eta}'(J)\otimes\overline{\eta}(J), \pi_{D,v}(\overline{\rho})\big) = \mathrm{Hom}_{k_E[U_v]}\big(\overline{M_v(J)}, \pi_{D,v}(\overline{\rho})\big)$$

est non nul. La dernière assertion découle du lemme 2.1.4 et du théorème 3.1.1. □

Remarque 3.7.2. — Cheng dans [**12**, Thm.4.1, Thm.5.3] démontre des résultats similaires aux théorèmes 3.6.3 et 3.7.1(i) ci-dessus, mais sous des hypothèses techniques différentes. Les principales différences sont les suivantes : d'une part l'hypothèse que les représentations $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ sont réductibles non scalaires pour $w|p$ est remplacée par $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)]}(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}) = k_E$ et F_w non ramifiée, d'autre part tous les poids de Serre réguliers de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ sont considérés (à toutes les places $w|p$) au lieu du poids de Serre particulier $\tau(\emptyset)$ considéré ici. Notons que la condition que $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ a un poids de Serre régulier au sens de [**12**] est plus forte que la généricité au sens de [**5**, Def.11.7].

Les hypothèses imposées dans [**12**] aux places w ne divisant pas p sont par ailleurs plus restrictives que celles de cet article.

Remarque 3.7.3. — Dans le très récent travail [**20**], Emerton, Gee and Savitt montrent une variante de [**15**, Conj.B.1] qui entraîne en particulier que le théorème 3.7.1(i) est vrai en remplaçant $\tau(\emptyset)$ par un quelconque poids de Serre $\tau \in \mathcal{D}(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)})$, et aussi que l'espace des homomorphismes du théorème 3.7.1(ii) est de dimension 1 pour tout $J \subseteq \mathcal{S}_v$ (sous l'hypothèse que F est non ramifiée en p et que $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_w}/F_w)}$ est générique pour tout $w|p$).

On en déduit maintenant le corollaire satisfaisant suivant.

Corollaire 3.7.4. — *Si la représentation $\pi_D(\overline{\rho})$ se factorise comme en (26) (cf. § 3.1), alors la représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}\big(\overline{M}^v, \pi_D(\overline{\rho})\big)[\mathfrak{m}']$ (c'est-à-dire définie comme en (28), cf. § 3.3) est nécessairement le facteur local en v de $\pi_D(\overline{\rho})$.*

Démonstration. — Si l'on a $\pi_D(\overline{\rho}) \cong \otimes'_w \pi'_{D,w}(\overline{\rho})$ pour $\pi'_{D,w}(\overline{\rho})$ représentation lisse admissible de $D_w^\times$ sur k_E, alors $\pi_{D,v}(\overline{\rho}) \cong X \otimes_{k_E} \pi'_{D,v}(\overline{\rho})$ où :

$$X \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}\big(\overline{M}^v, \otimes'_{w\neq v}\pi'_{D,w}(\overline{\rho})\big)[\mathfrak{m}']$$

(avec action triviale de $\mathrm{GL}_2(F_v)$). On en déduit par le théorème 3.7.1(i) que le k_E-espace vectoriel :

$$X \otimes_{k_E} \mathrm{Hom}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})]}\big(\tau(\emptyset), \pi'_{D,v}(\overline{\rho})\big) = \mathrm{Hom}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})]}\big(\tau(\emptyset), \pi_{D,v}(\overline{\rho})\big)$$

est de dimension 1. Il en est donc de même du k_E-espace vectoriel X. □

Corollaire 3.7.5. — *La représentation lisse admissible $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.6.1 (pour la représentation locale $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$) pour tout $J \subseteq \mathcal{S}_v$ tel que $Z(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}) \cap F(J) = \emptyset$.*

Démonstration. — L'hypothèse (i) résulte du théorème 3.7.1(i), l'hypothèse (ii) du théorème 3.1.1 et du lemme 2.1.4, et l'hypothèse (iii) du théorème 3.7.1(ii) et de l'hypothèse (ii). □

Remarque 3.7.6. — Il suit de [**20**] que la représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.6.3 (pour $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$), ce qui contient strictement le corollaire 3.7.5 (voir la remarque 3.7.3).

Par le corollaire 3.7.5 et la proposition 2.6.1, pour tout $J \subseteq \mathcal{S}_v$ tel que $Z(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}) \cap F(J) = \emptyset$ la représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ fournit donc un invariant $x(J) \in k_E^\times$. Pour une représentation (lisse avec caractère central) arbitraire π de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur k_E vérifiant les hypothèses de la proposition 2.6.1, ces $x(J)$ peuvent être essentiellement quelconques (cf. § 2.6).

Corollaire 3.7.7. — *Pour $J \subseteq \mathcal{S}_v$ tel que $Z(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}) \cap F(J) = \emptyset$, les invariants $x(J) \in k_E^\times$ de la représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ sont donnés par :*

$$x(J) = -\overline{\xi}'_v(-1)\Big(\prod_{\sigma\in J}\alpha_{v,\sigma}\prod_{\sigma\notin J}\beta_{v,\sigma}\Big)^{-1}\frac{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma\in J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\notin J}} x_{v,\sigma}(r_{v,\sigma}+1)}{\displaystyle\prod_{\substack{\sigma\notin J\\ \sigma\circ\varphi^{-1}\in J}} x_{v,\sigma}(r_{v,\sigma}+1)}$$

avec $(\alpha_{v,\sigma})_{\sigma\in\mathcal{S}_v}$, $(\beta_{v,\sigma})_{\sigma\in\mathcal{S}_v}$ et $(x_{v,\sigma})_{\sigma\in\mathcal{S}_v}$ comme en (1) pour le module de Fontaine-Laffaille contravariant de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)} \otimes \theta_v^{-1}$ (cf. (29)).

Démonstration. — On va appliquer le corollaire 2.6.5 à J et $\pi = \pi_{D,v}(\overline{\rho})$, il faut donc vérifier toutes les conditions de ce corollaire. Notons qu'il suffit de démontrer l'égalité du corollaire dans n'importe quelle extension finie de k_E, et on peut donc agrandir arbitrairement E dans l'application du corollaire 2.6.5, ce que l'on fait de manière tacite dans la suite de la preuve.

Soit π une représentation automorphe de $(D\otimes\mathbb{A})^\times$ telle que ρ_π contribue à $\overline{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathcal{O}_E} C(J)_{\mathfrak{m}}$ comme dans la proposition 3.5.3. Comme dans la preuve de la proposition 3.5.1 (pour $Q=\emptyset$), on voit que l'on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U^v]}(M^v, \overline{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\overline{\mathbb{Q}}}\pi_f) \cong \overline{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\overline{\mathbb{Q}}}\pi_v$ où π_v est le facteur local de π en v, où S et U^v sont comme au § 3.3 et $M^v = \otimes_{w\in S} M_w$ avec M_w comme au § 3.5. Soit π^0 un $\mathcal{O}_E$-réseau de π_f comme en (27), alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U^v]}(M^v,\pi^0)$ est un $\mathcal{O}_E$-réseau π_v^0 de π_v (stable par $\mathrm{GL}_2(F_v)$) et le $\mathcal{O}_E$-module :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U]}(M(J),\pi^0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U_v]}(M_v(J),\pi_v^0) \neq 0$$

est non nul, donc libre de rang 1. On note $\widehat{v}\in\pi_v^0$ un générateur du sous-$\mathcal{O}_E$-module (de rang 1) des éléments de π_v^0 sur lesquels U_v agit par le caractère $M_v(J) = \eta'(J)\otimes\eta(J)$.

L'injection naturelle $\overline{\pi}^0 \overset{\text{déf}}{=} k_E\otimes_{\mathcal{O}_E}\pi^0 \hookrightarrow \pi_D(\overline{\rho})$ (lemme 3.1.2) induit une injection $\mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v,\overline{\pi}^0) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v,\pi_D(\overline{\rho}))$ qui, par construction, tombe dans $\mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v,\pi_D(\overline{\rho}))[\mathfrak{m}'] = \pi_{D,v}(\overline{\rho})$. On a ainsi des injections :

$$k_E\otimes_{\mathcal{O}_E}\pi_v^0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U^v]}(M^v,\pi^0)/\varpi_E \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{k_E[U^v]}(\overline{M}^v,\overline{\pi}^0) \hookrightarrow \pi_{D,v}(\overline{\rho})$$

de sorte que l'image de $\widehat{v}$ dans $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ est non nulle.

Le fait que $\rho_\pi^0|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)} \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}^1,\varphi_1}(\mathcal{M},\widehat{A}_{\mathrm{cris}})^\vee(1)$ (où ρ_π^0 est un $\mathcal{O}_E$-réseau stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ dans ρ_π) pour un (unique) $\mathcal{O}_E$-module fortement divisible $\mathcal{M}$ de type $\eta(J)\otimes\eta'(J)$ provient de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E[U_v]}(M_v(J),\pi_v)\neq 0$ et de la compatibilité avec la correspondance de Langlands locale ([**37**]).

On peut donc appliquer le corollaire 2.6.5 avec J, $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$, $\mathcal{M}$, π_v^0 et $\widehat{v}$, ce qui donne le résultat (le lecteur pourra vérifier sur toutes nos normalisations que la représentation π_v est bien alors la représentation π_p du théorème 2.5.2). $\square$

Remarque 3.7.8. — (i) Notons que les valeurs des $x(J)$ du corollaire 3.7.7 ne dépendent que de $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$. Lorsque la représentation $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.6.3 pour $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ (ce qui est maintenant connu par [**20**], cf. la remarque 3.7.6) et que $Z(\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}) \neq \emptyset$, il existe par les résultats de [**5**] de nombreux autres invariants que l'on peut associer à $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$, par exemple les invariants "cycliques" de [**3**, Ques.9.5] lorsque $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est (générique) semi-simple. Nous ignorons comment calculer ces invariants cycliques en général, mais on peut se demander si leurs valeurs conjecturales explicitées dans [**3**, Ques.9.5] ne seraient pas aussi celles données par $\pi_{D,v}(\overline{\rho})$. Voir à ce propos les résultats de [**29**].
(ii) Il est vraisemblable que le corollaire 3.7.7 reste valable dans le cas où les $r_{v,\sigma}$ sont tous nuls mais où $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)} \otimes \theta_v^{-1}$ est supposée de plus dans la catégorie de Fontaine-Laffaille.

4. Appendice : Réductions de K-types

On donne des formules explicites pour la semi-simplification modulo p de tous les K-types pour $\mathrm{GL}_2(L)$ où $L/\mathbb{Q}_p$ est une extension finie *quelconque*.

On note M l'extension quadratique non ramifiée de L, σ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(M/L)$ et $\mathbb{F}_q$, $\mathbb{F}_{q^2}$ les corps résiduels de L et M. On note I_L le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$, ϖ_L une uniformisante de L et v_L la valuation sur L telle que $v_L(\varpi_L) = 1$.

On rappelle que $\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L) \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ est le pro-p-sous-groupe de Sylow du sous-groupe d'Iwahori $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ des matrices triangulaires supérieures modulo une uniformisante ϖ_L de $\mathcal{O}_L$. On note $\mathrm{I}(\mathbb{F}_q) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et $\mathrm{I}_1(\mathbb{F}_q)$ son p-sous-groupe de Sylow. Pour $n \geq 1$, on note $I(n)$ le sous-groupe de $\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ des matrices triangulaires supérieures modulo ϖ_L^n et $I_1(n)$ son pro-p-sous-groupe de Sylow (donc $I(1) = \mathrm{I}(\mathcal{O}_L)$ et $I_1(1) = \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)$).

Pour un groupe profini G contenant un pro-p-sous-groupe ouvert et pour $\Lambda \in \{E, k_E\}$, on note $R_\Lambda(G)$ le groupe de Grothendieck des représentations (lisses de dimension finie) de G sur Λ. Rappelons que $R_{k_E}(G) \cong R_{k_E}(G/N)$ pour tout pro-p-sous-groupe normale N de G, et qu'un élément de $R_{k_E}(G)$ est déterminé par son caractère de Brauer, qui est une fonction à valeurs dans $\mathcal{O}_E$ (pour E suffisamment grand) sur l'ensemble des classes de conjugaison p-régulières de G (ou de G/N). Si $\vartheta \in R_E(G)$, on note $\overline{\vartheta}$ l'élément dans $R_{k_E}(G)$ donné par la réduction de ϑ. Rappelons que le caractère de Brauer de $\overline{\vartheta}$ est juste la restriction du caractère de ϑ à l'ensemble des éléments p-réguliers de G. On suppose toujours que E est suffisamment grand pour que tous les caractères de Brauer prennent leurs valeurs dans $\mathcal{O}_E$ et que toutes les représentations irréductibles de G en caractéristique p soient définies sur k_E.

Pour un caractère $\xi : \mathbb{F}_{q^2}^\times \to k_E^\times$, on note $\vartheta(\xi)$ l'image dans $R_{k_E}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))$ (ou dans $R_{k_E}(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)))$ de la réduction de la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ de degré $q-1$ sur E associée à $[\xi]$ si $\xi^q \neq \xi$ ou bien de $([\chi]\circ \det)\otimes(\mathrm{Sp}-1) \in R_E(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))$ si $\xi = \chi \circ \mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}$ (où Sp désigne la représentation spéciale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur E). Le caractère de Brauer de $\vartheta(\xi)$ (sur les classes de conjugaison p-régulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$) envoie donc la classe de g vers $(q-1)[\xi(c)]$ si $g = c \in \mathbb{F}_q^\times$, vers $-[\xi(c)] - [\xi(c)]^q$ si g a pour valeurs propres $c, c^q \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \setminus \mathbb{F}_q^\times$, et vers 0 sinon.

Si $[r, N]$ est un type de Weil-Deligne (cf. § 3.2), on définit son *conducteur essentiel* comme le conducteur minimal parmi tous ses tordus par des caractères.

On note d'abord la formule suivante :

Lemme 4.1. — *Pour tout caractère $\psi : \mathbb{F}_q^\times \to k_E^\times$, on a :*

$$\sum_\xi \Theta(\xi) = \mathrm{ind}_{\mathbb{F}_q^\times \mathrm{I}_1(\mathbb{F}_q)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} \psi = \sum_\tau m_\tau \tau$$

dans $R_{k_E}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))$, où la première somme est sur tous les caractères $\xi : \mathbb{F}_{q^2}^\times \to k_E^\times$ tels que $\psi = \xi|_{\mathbb{F}_q^\times}$, où la deuxième somme est sur toutes les représentations irréductibles τ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur k_E de caractère central ψ et où :

$$m_\tau \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 2^{\mathrm{val}(q)-\mathrm{val}(\dim\tau)} & si \dim\tau > 1 \\ 2^{\mathrm{val}(q)} - 1 & si \dim\tau = 1. \end{cases}$$

Démonstration. — Pour démontrer la première égalité, on vérifie facilement que les deux sommes ont même caractère de Brauer, qui envoie g vers $(q^2-1)[\psi(g)]$ pour $g \in \mathbb{F}_q^\times$ et vers 0 sinon. Il suffit de démontrer la seconde égalité en sommant sur tous les caractères centraux possibles $\psi : \mathbb{F}_q^\times \to k_E^\times$, i.e. de démontrer :

$$\sum_{\chi,\chi'} \mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathbb{F}_q)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} \chi\otimes\chi' = \sum_\tau m_\tau \tau$$

où la première somme est sur tous les caractères $\chi, \chi' : \mathbb{F}_q^\times \to k_E^\times$ et la deuxième somme est sur toutes les représentations irréductibles τ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur k_E. Comme les constituants irréductibles de chaque $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathbb{F}_q)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} \chi\otimes\chi'$ sont distincts, on doit montrer que $m_\tau = m'_\tau$ où m'_τ est le nombre de paires ordonnées (χ, χ') telles que τ est un constituant de $\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathbb{F}_q)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} \chi\otimes\chi'$. Quitte à tordre par une puissance de det, on peut supposer $\tau = \otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}(\mathrm{Sym}^{r_\sigma} k_E^2)^\sigma$ où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des plongements $\mathbb{F}_q \hookrightarrow k_E$. Par [**17**, Prop.1.1], m'_τ est le nombre de sous-ensembles

$J \subset \mathcal{S}$ tels que les équations :

$$\begin{array}{rcccccc} r_\sigma & = & c_\sigma & \text{si} & \sigma \in J & \text{et} & \sigma \circ \varphi^{-1} \in J \\ r_\sigma & = & c_\sigma - 1 & \text{si} & \sigma \in J & \text{et} & \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J \\ r_\sigma & = & p-2-c_\sigma & \text{si} & \sigma \notin J & \text{et} & \sigma \circ \varphi^{-1} \in J \\ r_\sigma & = & p-1-c_\sigma & \text{si} & \sigma \notin J & \text{et} & \sigma \circ \varphi^{-1} \notin J \end{array}$$

aient une solution avec $0 \le c_\sigma \le p-1$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$ et au moins un $c_\sigma < p-1$. On trouve qu'il y a une solution si et seulement si J est tel que :

(i) $\{\sigma, r_\sigma = p-1\} \cap F(J) = \emptyset$ (où $F(J)$ est comme en (5))
(ii) si $r_\sigma = p-1$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$ alors $J = \emptyset$
(iii) si $r_\sigma = 0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$ alors $J \neq \emptyset$.

En se souvenant que $\dim \tau = \prod_{\sigma \in \mathcal{S}}(r_\sigma + 1)$, on déduit facilement $m_\tau = m'_\tau$. □

On fixe dans la suite un type de Weil-Deligne $[r, N]$.

Proposition 4.2. — *Supposons que r est décomposable, i.e. $r|_{I_L} = \chi_1 \oplus \chi_2$ pour des caractères lisses $\chi_i : \mathcal{O}_L^\times \to E^\times$. Soit n le conducteur de χ_1/χ_2 (i.e. le conducteur essentiel de $[r, 0]$) et ϑ un K-type correspondant à $[r, 0]$ (cf. § 3.2).*
(i) Si $n = 0$, alors $\overline{\vartheta} = \overline{\chi} \circ \det$ où $\chi = \chi_1 = \chi_2$.
(ii) Si $n \geq 1$, alors :

$$\overline{\vartheta} = \left(\operatorname{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}(\overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2)\right) + \frac{q^{n-1}-1}{q-1} \operatorname{ind}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \psi$$

dans $R_{k_E}(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L))$, où $\psi = \overline{\chi}_1\overline{\chi}_2$ est la réduction du caractère central de ϑ.

Démonstration. — Si $n = 0$ alors $\chi_1 = \chi_2$ et $\vartheta = \chi \circ \det$, l'assertion est alors claire. Si $n > 1$ et $q > 2$, alors il y a un unique K-type correspondant à $[r, 0]$, à savoir $\vartheta = (\det \circ \chi_1) \otimes \operatorname{ind}_{I(n)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \chi$ où $\chi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) \stackrel{\text{déf}}{=} (\chi_2/\chi_1)(d)$ (cf. [**28**, § A.2.5]). On a donc $\overline{\vartheta} = \operatorname{ind}_{I(n)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \operatorname{res}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{I(n)} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2$. Nous allons montrer la formule de l'énoncé :

$$\operatorname{ind}_{I(n)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \operatorname{res}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{I(n)} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 = \left(\operatorname{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}(\overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2)\right) + \frac{q^{n-1}-1}{q-1} \operatorname{ind}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \psi \tag{30}$$

par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ étant clair, on suppose $n > 1$ et (30) vraie avec n remplacé par $n-1$. On montre d'abord que :

$$\operatorname{ind}_{I(n)}^{I(n-1)} \operatorname{res}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{I(n)} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 = \operatorname{res}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{I(n-1)} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 + \operatorname{ind}_{\mathcal{O}_L^\times I_1(n-1)}^{I(n-1)} \operatorname{res}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathcal{O}_L^\times I_1(n-1)} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 \tag{31}$$

dans $R_{k_E}(I(n-1))$. Les classes de conjugaison p-régulières de $I(n-1)$ sont celles des matrices $\left(\begin{smallmatrix} [a] & 0 \\ 0 & [d] \end{smallmatrix}\right)$ pour $a, d \in \mathbb{F}_q^\times$. La valeur du caractère de Brauer sur une telle matrice des deux côtés de (31) est donnée par $q\chi_1([a])\chi_2([d])$ si $a = d$ et par $\chi_1([a])\chi_2([d])$ si $a \neq d$. L'égalité (31) et l'hypothèse de récurrence donnent :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ind}_{I(n)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \mathrm{res}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{I(n)} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 = \\
&\quad \mathrm{ind}_{I(n-1)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \mathrm{res}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{I(n-1)} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 + \mathrm{ind}_{\mathcal{O}_L^\times I_1(n-1)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \mathrm{res}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathcal{O}_L^\times I_1(n-1)} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 = \\
&\quad\quad \big(\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} (\overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2)\big) + \frac{q^{n-2}-1}{q-1} \mathrm{ind}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \psi \\
&\quad\quad\quad + \mathrm{ind}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \mathrm{ind}_{\mathcal{O}_L^\times I_1(n-1)}^{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)} \mathrm{res}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}^{\mathcal{O}_L^\times I_1(n-1)} \psi.
\end{aligned}$$

Comme les éléments p-réguliers de $\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)$ sont centraux et comme $[\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L) : \mathcal{O}_L^\times I_1(n-1)] = q^{n-2}$, on a dans $R_{k_E}(\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L))$:

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{O}_L^\times I_1(n-1)}^{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)} \mathrm{res}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}^{\mathcal{O}_L^\times I_1(n-1)} \psi = q^{n-2}\psi$$

ce qui donne (30). Si $n > 1$ et $q = 2$, il y a deux K-types associés à $[r, 0]$, l'un donné par la même formule que dans le cas $q > 2$, l'autre par son complément dans $\det\circ\chi_1 \otimes \mathrm{ind}_{I(n+1)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \mathrm{res}_{I(n)}^{I(n+1)} \chi$ (cf. [**28**, § A.2.7]). Notons que si $q = 2$ alors $I(n) = I_1(n)$ et $\overline{\chi}_1$, $\overline{\chi}_2$, ψ sont tous triviaux. Le même calcul que dans le cas $q > 2$ montre que la réduction du premier K-type est $2^{n-1} \mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \psi$ (comme demandé). De plus la réduction de $\det\circ\chi_1 \otimes \mathrm{ind}_{I(n+1)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \mathrm{res}_{I(n)}^{I(n+1)} \chi$ est $2^n \mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \psi$. On en déduit que les deux K-types ont même réduction. □

On rappelle que si r est irréductible, alors son conducteur essentiel est pair si et seulement si r est l'induite d'un caractère du groupe de Weil de M (voir par exemple [**33**, Cor.4.1.9]). Dans ce cas, les réductions des K-types sont aussi considérées dans [**39**, Thm.2.3], qui donne aussi la formule récursive (32) de la démonstration ci-dessous.

Proposition 4.3. — *Supposons que r est irréductible de conducteur essentiel pair $n = 2m$ (avec $m \geq 1$), de sorte que $r|_{I_L} = \xi \oplus \xi^\sigma$ pour un caractère lisse $\xi : \mathcal{O}_M^\times \to E^\times$ tel que ξ/ξ^σ est de conducteur m. Soit ϑ le K-type correspondant à $[r, N] = [r, 0]$. On a :*

$$\overline{\vartheta} = (-1)^{m-1}\Theta(\overline{\xi}) + \frac{q^{m-1} - (-1)^{m-1}}{q+1} \mathrm{ind}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \psi$$

dans $R_{k_E}(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L))$, où $\psi = \overline{\xi}|_{\mathcal{O}_L^\times}$ est la réduction du caractère central de ϑ.

Démonstration. — Il y a dans ce cas un unique type ϑ associé à $[r, 0]$ dont nous rappelons la définition suivant [**26**, § 3] (voir [**28**, § A.3] pour son unicité). On identifie $\mathrm{M}_2(L)$ avec $\mathrm{End}_L(M) = M \oplus M\sigma$ et $\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L)$ avec $\mathcal{O}_M \oplus \mathcal{O}_M\sigma$. On pose $U_0 \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ et on définit des sous-groupes ouverts compacts de U_0 par :

$$U_t \overset{\text{déf}}{=} \{a + b\sigma, a \in \mathcal{O}_M^\times, b \in \varpi_L^t \mathcal{O}_M\}$$

pour $t > 0$. Quitte à tordre, on peut supposer que r est lui-même de conducteur n. Donc pour $t \geq m/2$, la formule $\beta_\xi(a + b\sigma) = \xi(a)$ définit un caractère de U_t. Alors $\vartheta = \vartheta_\xi = \mathrm{ind}_{U_{[m/2]}}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \alpha_\xi$ où α_ξ est la restriction à $U_{[m/2]}$ de la représentation κ_ξ définie en [**26**, § 3 3]. En particulier, les représentations α_μ pour $\mu \neq \mu^\sigma$ sont déterminées par les formules :

(i) $\alpha_\mu \otimes \mathrm{Sp} = \mathrm{ind}_{U_1}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \beta_\mu$ si $m = 1$
(ii) $\alpha_\mu = \beta_\mu$ si m est pair
(iii) $\mathrm{ind}_{U_{(m+1)/2}}^{U_{(m-1)/2}} \beta_\mu = \oplus_{\omega \neq 1} \alpha_{\mu\omega}$ si $m > 1$ est impair, où la somme est sur les caractères non triviaux $\omega : \mathbb{F}_{q^2}^\times / \mathbb{F}_q^\times \to E^\times$.

Pour voir l'unicité des α_μ dans le cas (iii), on note que

$$q\alpha_\mu = (1 - q)\, \mathrm{ind}_{U_{(m+1)/2}}^{U_{(m-1)/2}} \beta_\mu + \sum_{\omega \neq 1} \mathrm{ind}_{U_{(m+1)/2}}^{U_{(m-1)/2}} \beta_\mu \omega$$

dans $R_E(U_{(m-1)/2})$.

On démontre maintenant la proposition par récurrence sur m. Si $m = 1$, alors α_ξ est précisément la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ associée à ξ et la proposition est immédiate dans ce cas. Si $m = 2$, alors le caractère de Brauer de $\overline{\vartheta} = \mathrm{ind}_{U_1}^{U_0} \overline{\beta}_\xi$ vu comme représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ envoie la classe de conjugaison d'un élément p-régulier g vers $(q-1)q[\xi(c)]$ si $g = c \in \mathbb{F}_q^\times$, vers $[\xi(c)] + [\xi^\sigma(c)]$ si g a pour valeurs propres $c, \sigma(c) \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \setminus \mathbb{F}_q^\times$, et vers 0 sinon. On en déduit que $\overline{\vartheta} + \Theta(\overline{\xi}) = \mathrm{ind}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \psi$ (voir la preuve du lemme 4.1). Supposons maintenant $m > 2$ et soit $\xi' : \mathcal{O}_M^\times \to E^\times$ tel que ξ' a même réduction que ξ mais avec $\xi'/(\xi')^\sigma$ de conducteur $m - 1$. Nous allons montrer que :

$$\overline{\vartheta}_\xi = \sum_{\omega \neq 1} \overline{\vartheta}_{\xi'\omega} \tag{32}$$

où la somme est sur tous les caractères non triviaux $\omega : \mathbb{F}_{q^2}^\times / \mathbb{F}_q^\times \to E^\times$. Si $m > 2$ est pair, alors $\overline{\beta}_\xi = \overline{\beta}_{\xi'}$ et les formules définissant les représentations ci-dessus donnent :

$$\begin{aligned} \overline{\vartheta}_\xi &= \mathrm{ind}_{U_{(m-2)/2}}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \mathrm{ind}_{U_{m/2}}^{U_{(m-2)/2}} \overline{\beta}_\xi \\ &= \mathrm{ind}_{U_{(m-2)/2}}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \mathrm{ind}_{U_{m/2}}^{U_{(m-2)/2}} \overline{\beta}_{\xi'} = \sum_{\omega \neq 1} \mathrm{ind}_{U_{(m-2)/2}}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)} \overline{\alpha}_{\xi'\omega} = \sum_{\omega \neq 1} \overline{\vartheta}_{\xi'\omega} \end{aligned}$$

comme demandé. Si $m > 2$ est impair, alors (32) découlera de la formule $\overline{\alpha}_\xi = \sum_{\omega \neq 1} \overline{\beta}_{\xi'\omega}$ dans $R_{k_E}(U_{(m-1)/2})$. Les caractères de Brauer des $\overline{\alpha}_\mu$ pour $\mu \in \{\xi\omega, \omega : \mathbb{F}_{q^2}^\times / \mathbb{F}_q^\times \to E^\times\}$ sont déterminés comme ci-dessus par :

$$\mathrm{ind}_{U_{(m+1)/2}}^{U_{(m-1)/2}} \overline{\beta}_\mu = \sum_{\omega \neq 1} \overline{\alpha}_{\mu\omega}.$$

Comme $\overline{\beta}_\mu = \mathrm{res}^{U_{(m+1)/2}}_{U_{(m-1)/2}} \overline{\beta}_{\mu'}$ (où $\mu' = \xi'\omega$ si $\mu = \xi\omega$), il suffit de montrer :

$$\mathrm{ind}^{U_{(m-1)/2}}_{U_{(m+1)/2}} \mathrm{res}^{U_{(m+1)/2}}_{U_{(m-1)/2}} \overline{\beta}_{\mu'} = \sum_{\omega,\eta\neq 1} \overline{\beta}_{\mu'\omega\eta} \tag{33}$$

pour $\mu' \in \{\xi'\omega', \omega' : \mathbb{F}_{q^2}^\times/\mathbb{F}_q^\times \to E^\times\}$. Notons que le terme de droite dans (33) est juste $q\overline{\beta}_\xi + (q-1)\sum_{\omega\neq 1}\overline{\beta}_{\xi\omega}$ et que les classes de conjugaison p-régulières dans $U_{(m-1)/2}$ sont précisément celles des éléments $[c]$ pour $c \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$. Le caractère de Brauer du terme de droite dans (33) envoie un tel élément vers $q(q-1)\xi([c])$ si $c \in \mathbb{F}_q^\times$ et vers $\xi([c])$ sinon. En utilisant le fait que, si $c \notin \mathbb{F}_q^\times$ et $g \in U_{(m-1)/2}\backslash U_{(m+1)/2}$, alors $g[c]g^{-1} \notin U_{(m+1)/2}$, on trouve que le caractère de Brauer du terme de gauche dans (33) est le même. Cela termine la preuve de (32). En appliquant (32), l'hypothèse de récurrence et le lemme 4.1 donnent alors :

$$\begin{aligned}
\overline{\vartheta}_\xi &= \sum_{\omega\neq 1}\overline{\vartheta}_{\xi'\omega}\\
&= (-1)^{m-2}\sum_{\omega\neq 1}\Theta(\overline{\xi\omega}) + q\cdot\frac{q^{m-2}-(-1)^{m-2}}{q+1}\,\mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}\psi\\
&= (-1)^{m-1}\Theta(\overline{\xi}) + (-1)^{m-2}\,\mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}\psi + \frac{q^{m-1}-(-1)^{m-2}q}{q+1}\,\mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}\psi\\
&= (-1)^{m-1}\Theta(\overline{\xi}) + \frac{q^{m-1}-(-1)^{m-1}}{q+1}\,\mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}\psi.
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.4. — *Supposons que r est irréductible de conducteur essentiel impair $n = 2m+1$ (avec $m \geq 1$). Soit ϑ le K-type correspondant à $[r, N] = [r, 0]$. On a :*

$$\overline{\vartheta} = q^{m-1}\,\mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}_{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)}\psi$$

dans $R_{k_E}(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L))$, où ψ est la réduction du caractère central de ϑ.

Démonstration. — Il y a dans ce cas un unique type ϑ associé à $[r, N]$ dont nous rappelons la définition suivant [**27**, § 5] (voir [**28**, § 3] pour son unicité). On identifie d'abord $\mathrm{M}_2(L)$ avec $\mathrm{End}_L(M')$ et $\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L)$ avec $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{O}_{M'})$ pour une extension quadratique *ramifiée* M' de L (qui dépend de r) en chosissant $\{1, \varpi_{M'}\}$ comme base de M' sur L (où $\varpi_{M'}$ est une uniformisante de M'). Pour $t \geq 1$, on définit des sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$ par :

$$V_t \overset{\text{déf}}{=} \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L), g(\beta) - \beta \in \beta\varpi_{M'}^t\mathcal{O}_{M'} \text{ si } \beta \in \mathcal{O}_{M'}\}$$

de sorte que $V_1 = \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)$, $[\mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L) : V_t] = q^{2(t-1)}$ et $\mathcal{O}_{M'} \cap V_t = 1 + \varpi_{M'}^t\mathcal{O}_{M'}$, où l'on identifie $\beta \in \mathcal{O}_{M'}$ avec l'endomorphisme de $\mathcal{O}_{M'}$ défini par la multiplication par β. La seule chose que l'on a besoin de savoir sur ϑ est qu'il est de la forme $\mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)}_{\mathcal{O}_{M'}V_m}\alpha$ pour un caractère $\alpha : \mathcal{O}_{M'}V_m \to E^\times$. Comme $[\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L) : \mathcal{O}_{M'}V_m] = q^{m-1}$ et que les classes de conjugaison p-régulières de $\mathcal{O}_{M'}V_m$ et $\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)$ sont celles des éléments $[a]$ pour $a \in \mathbb{F}_q^\times$, on voit que le caractère de Brauer de $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}_{M'}V_m}^{\mathcal{O}_L^\times \mathrm{I}_1(\mathcal{O}_L)} \overline{\alpha}$ est celui de $q^{m-1}\psi$. Ceci achève la preuve. $\square$

Soit maintenant D une algèbre de quaternions sur L, $\mathcal{O}_D$ un ordre maximal dans D, $K \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_D^\times$, $Z \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_L^\times$ et I_1 le pro-p sous-groupe de Sylow de K. On note Π_D une uniformisante de D. On a $I_1 = 1 + \Pi_D\mathcal{O}_D$ et on pose $I_n \overset{\text{déf}}{=} 1 + \Pi_D^n\mathcal{O}_D$ pour $n \geq 1$. On choisit un plongement $M \hookrightarrow D$ ce qui permet d'identifier les représentations irréductibles de K sur k_E avec les caractères de $K/I_1 \cong \mathbb{F}_{q^2}^\times$. Notons que l'analogue du lemme 4.1 dans ce contexte dit juste que $\mathrm{ind}_{ZI_1}^K \psi$ est la somme des $q+1$ caractères ξ de caractère central ψ.

On fixe un type de Weil-Deligne $[r, N]$.

Proposition 4.5. — *Supposons que $N \neq 0$, de sorte que $r|_{I_L} = \chi \oplus \chi$ pour un caractère lisse $\chi : \mathcal{O}_L^\times \to E^\times$. Soit ϑ le K-type correspondant à $[r, N]$. On a :*

$$\overline{\vartheta} = \overline{\chi} \circ \det .$$

Démonstration. — C'est clair puisque $\vartheta = \chi \circ \det$. $\square$

Proposition 4.6. — *Supposons que r est irréductible de conducteur essentiel pair $n = 2m$ (avec $m \geq 1$), de sorte que $r|_{I_L} = \xi \oplus \xi^\sigma$ pour un caractère lisse $\xi : \mathcal{O}_M^\times \to E^\times$ tel que ξ/ξ^σ est de conducteur m. Soit ϑ un K-type correspondant à $[r, N] = [r, 0]$. On a :*

$$\overline{\vartheta} = (-1)^{m-1}\overline{\mu} + \frac{q^{m-1} - (-1)^{m-1}}{q+1} \mathrm{ind}_{ZI_1}^K \psi$$

dans $R_{k_E}(K)$, où $\mu \in \{\xi, \xi^\sigma\}$ et $\psi = \overline{\xi}|_{\mathcal{O}_L^\times}$ est la réduction du caractère central de ϑ.

Démonstration. — Dans ce cas la construction de [**26**, § 5] montre qu'il y a deux types associés à r, chacun déterminé par un choix de $\mu \in \{\xi, \xi^\sigma\}$. La définition des types est analogue à celle pour $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$, mais avec le rôle des parités inversé. En particulier, si m est impair, alors ϑ est induit d'un caractère $\alpha_\mu : \mathcal{O}_M^\times I_m \to E^\times$, et si m est pair, alors ϑ est induit d'une représentation de dimension q de $\mathcal{O}_M^\times I_{m-1}$. On omet la preuve de la proposition, qui est très similaire à celle de la proposition 4.3. $\square$

Proposition 4.7. — *Supposons que r est irréductible de conducteur essentiel impair $n = 2m+1$ (avec $m \geq 1$). Soit ϑ le K-type correspondant à $[r, N] = [r, 0]$. On a :*

$$\overline{\vartheta} = q^{m-1}\,\mathrm{ind}_{ZI_1}^K \psi$$

dans $R_{k_E}(K)$, où ψ est la réduction du caractère central de ϑ.

Démonstration. — Ici encore on omet la preuve car elle est très similaire à celle de la proposition 4.4 en utilisant [**7**, § 54] pour déterminer le type, qui est unique dans ce cas et est induit d'un caractère de $\mathcal{O}_{M'}^{\times} I_m$ pour une extension quadratique ramifiée M' de L plongée dans D. □

Remarque 4.8. — Dans ce cas des algèbres de quaternions, des résultats similaires (rédigés avec plus de détails) ont été aussi récemment obtenus par Tokimoto ([**44**]).

Références

[1] Barnet-Lamb T., Gee T., Geraghty D., *Congruences betwen Hilbert modular forms: constructing ordinary lifts*, Duke Math. J. 161, 2012, 1521-1580.

[2] Barnet-Lamb T., Gee T., Geraghty D., *Congruences betwen Hilbert modular forms: constructing ordinary lifts II*, à paraître à Math. Res. Letters.

[3] Breuil C., *Sur un problème de compatibilité local-global modulo p pour* GL_2, à paraître à J. Reine Angew. Math.

[4] Breuil C., Mézard A., *Multiplicités modulaires raffinées*, à paraître au Bulletin de la S.M.F.

[5] Breuil C., Paškūnas V., *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, Memoirs of A.M.S. 216, 2012.

[6] Brown K., *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics 87, Springer-Verlag, 1982.

[7] Bushnell C., Henniart G., *The Local Langlands Conjecture for* $\mathrm{GL}(2)$, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 335, Springer-Verlag, 2006.

[8] Buzzard K., Diamond F., Jarvis F., *On Serre's conjecture for mod ℓ Galois representations over totally real fields*, Duke Math. J. 55, 2010, 105-161.

[9] Carayol H., *Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura*, Compositio Math. 59, 1986, 151-230.

[10] Carayol H., *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 19, 1986, 409-468.

[11] Chang S., Diamond F., *Extensions of (φ, Γ)-modules and crystalline representations*, Compositio Math. 147, 2011, 375-427.

[12] Cheng C., *Multiplicity one of regular Serre weights*, à paraître à Israel J. Math.

[13] Cornut C., Vatsal V., *CM points and quaternion algebras*, Documenta Math. 10, 2005, 263-309.

[14] Darmon H., Diamond F., Taylor R., *Fermat's Last Theorem*, in Current Developments in Mathematics 1995, International Press, 1996, 1-154.

[15] Dembélé L., Appendice à l'article [**3**].

[16] Diamond F., *The Taylor-Wiles construction and multiplicity one*, Inventiones Math. 128, 1997, 379-391.

[17] Diamond F., *A correspondence between representations of local Galois groups and Lie-type groups*, L.M.S. Lecture Notes 320, Cambridge University Press, 2007, 187-206.

[18] Diamond F., Taylor R., *Lifting modular mod ℓ representations*, Duke Math. J. 74, 1994, 253-269.

[19] Emerton M., *Local-global compatibility in the p-adic Langlands program for* $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, prépublication 2010.

[20] Emerton M., Gee T., Savitt D., *Lattices in the cohomology of Shimura curves*, prépublication 2013.

[21] Fontaine J.-M., *Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, 1994, 321-347.

[22] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15, 1982, 547-608.

[23] Fujiwara K., *Deformation rings and Hecke algebras in the totally real case*, prépublication.

[24] Gee T., *Automorphic lifts of prescribed types*, Math. Ann. 350, 2011, 107-144.

[25] Gee T., Kisin M., *The Breuil-Mézard conjecture for potentially Barsotti-Tate representations*, prépublication 2012.

[26] Gérardin P., *Facteurs locaux des algèbres simples de rang 4, I*, in Reductive Groups and Automorphic Forms, I (Paris, 1976/1977), Univ. Paris VII, Paris, 1978, 37-77.

[27] Gérardin P., Kutzko P., *Facteurs locaux pour* GL(2), Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 13, 1980, 349-384.

[28] Henniart G., *Sur l'unicité des types pour* GL_2, appendice à *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *en* $\ell = p$ par Breuil C., Mézard A., Duke Math. J. 115, 2002, 205-310.

[29] Hu Y., *Valeurs spéciales de paramètres de diagrammes de Diamond*, prépublication 2012.

[30] Khare C., *A local analysis of congruences in the* (p,p) *case II*, Inventiones Math. 143, 2001, 129-155.

[31] Khare C., Wintenberger J.-P., *Serre's modularity conjecture II*, Inventiones Math. 178, 2009, 505-586.

[32] Kisin M., *Moduli of finite flat group schemes, and modularity*, Ann. Math. 170, 2009, 1085-1180.

[33] Kutzko P., *The Langlands conjecture for* GL_2 *of a local field*, Ann. Math. 112, 1980, 381-412.

[34] Lang S., *Cyclotomic fields I and II*, Springer-Verlag, deuxième édition combinée, 1990.

[35] Ribet K., *Congruence relations between modular forms*, Proc. ICM Warsaw, 1983, 503-514.

[36] Ribet K., *On modular representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *arising from modular forms*, Inventiones Math. 100, 1990, 431-476.

[37] Saito T., *Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory*, Compositio Math. 145, 2009, 1081-1113.

[38] Savitt D., *Breuil modules for Raynaud schemes*, J. Number Theory 128, 2008, 2939-2950.

[39] Schein M., *Reduction modulo p of cuspidal representations and weights in Serre's conjecture*, Bull. Lond. Math. Soc. 41, 2009, 147-154.

[40] Serre J.-P., *Sur les représentations modulaires de degré* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Duke Math. J. 54, 1987, 179-230.

[41] Shimura G., *On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. Math. 91, 1970, 144-222.

[42] Taylor R., *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Inventiones Math. 98, 1989, 265-280.

[43] Taylor R., Wiles A., *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. Math. 141, 1995, 553-572.

[44] Tokimoto K., *On the reduction modulo p of representations of a quaternion division algebra over a p-adic field*, prépublication 2012.

[45] Vignéras M.-F., *Correspondance modulaire Galois-quaternions pour un corps p-adique*, Springer-Verlag Lecture Notes 1380, 1989, 254-266.

[46] Vignéras M.-F., *Correspondance de Langlands semi-simple pour* $\mathrm{GL}(n, F)$ *modulo* $\ell \neq p$, Inventiones Math. 144, 2001, 177-223.

[47] Wiles A., *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math. 141, 1995, 443-551.

C. Breuil, Bâtiment 425, C.N.R.S. et Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail : christophe.breuil@math.u-psud.fr

F. Diamond, Department of Math., King's College London, Strand, London WC2R 2LS, U.K.
E-mail : fred.diamond@kcl.ac.uk