SCHÉMAS EN GROUPES ET MODULES FILTRÉS

Christophe Breuil
Mathématiques, Bât. 425
U.R.A. 752 du C.N.R.S.
Université Paris-Sud
F-91405 ORSAY cedex
(France)
E-mail: breuil@math.u-psud.fr

RÉSUMÉ. — Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Pour $p \geq 3$, Fontaine a classifié les groupes p-divisibles et les p-groupes commutatifs finis et plats sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ en termes de modules filtrés ([FL]+[Fo1],[Fo2]). Nous étendons ces classifications (toujours pour $p \geq 3$) en remplaçant $W(k)$ par un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques de corps résiduel k et en utilisant des modules filtrés "généralisés". En particulier, il n'y a pas de restriction sur la ramification.

Group schemes and filtered modules

ABSTRACT. — Let k be a perfect field of characteristic $p > 0$. When $p \geq 3$, Fontaine has classified p-divisible groups and finite flat commutative p-groups over the Witt vectors $W(k)$ in terms of filtered modules ([FL]+[Fo1],[Fo2]). Still assuming $p \geq 3$, we extend these classifications over an arbitrary complete discrete valuation ring of unequal characteristic and residue field k by using "generalized" filtered modules. In particular, there is no restriction on the ramification index.

ABRIDGED ENGLISH VERSION

This note is a summary of [Br3].

Let k be a perfect field of characteristic $p > 0$, $W = W(k)$ the Witt vectors, $K_0 = Frac(W)$, K a finite totally ramified extension of K_0, e the ramification index, $\mathcal{O}_K$ the integers of K and π a fixed uniformizer of $\mathcal{O}_K$.

1 The categories

Let $E(u) \in W[u]$ the minimal polynomial of π over K_0, S the p-adic completion of the ring $W[u, \frac{u^{ie}}{i!}]_{i\in\mathbf{N}} \subset K_0[u]$, Fil^1S the p-adic completion of the ideal generated by $(\frac{E(u)^i}{i!})_{i\geq 1}$ and ϕ the unique additive map $S \to S$, semi-linear with respect to the absolute Frobenius on W, continuous for the p-adic topology and compatible with the divided powers such that $\phi(u) = u^p$. Since $\phi(Fil^1S) \subset pS$, one defines $\phi_1 = \dfrac{\phi}{p}|_{Fil^1S}$. Let $(ModFI/S)$ be the category whose objects are the following data:

a) a S-module $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i\in I} S/p^{n_i}$ (I finite, $n_i \in \mathbf{N}^*$),

b) a sub-S-module $Fil^1\mathcal{M}$ containing $Fil^1S \cdot \mathcal{M}$,

c) a ϕ-semi-linar map $\phi_1 : Fil^1\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ such that for $s \in Fil^1S$ and $x \in \mathcal{M}$, $\phi_1(sx) = \phi_1(s)\phi(x)$ where $\phi(x) = \dfrac{1}{\phi_1(E(u))}\phi_1(E(u)x)$ and such that $\phi_1(Fil^1\mathcal{M})$ generates $\mathcal{M}$ over S,

and whose arrows are S-linear maps respecting Fil^1 and commuting with ϕ_1. One can show that for $e \leq p-2$, $(ModFI/S)$ is abelian and that for $e = 1$ (and $p \geq 3$), it is equivalent to the category $\underline{MF}^{f,1}_{tor}$ of ([FL],9). We call a strongly divisible module $\mathcal{M}$ a free S-module of finite type equipped with data b) and c) above and such that $\mathcal{M}/Fil^1\mathcal{M}$ has no p-torsion.

2 The main results

Theorem C
Assume $p \geq 3$, then there is an (anti-)equivalence of categories between $(ModFI/S)$ and the category of finite flat commutative group schemes G over $\mathcal{O}_K$ killed by a power of p such that $Ker(p^n_G)$ is still flat for all $n \in \mathbf{N}$.

Note that this includes all f. f. commutative group schemes killed by p for any e and all commutative p-groups if $e \leq p-2$. By using more general objects than those of $(ModFI/S)$, one can in fact classify all commutative p-groups (for all e, see th. B in the French text).

Theorem D
Assume $p \geq 3$, then there is an (anti-)equivalence of categories between the category of strongly divisible modules and the category of p-divisible groups over $\mathcal{O}_K$.

To prove theorem C, from which theorem D is deduced, one first defines two functors: one from the category of commutative p-groups to some big category of filtered modules and one from the category $(ModFI/S)$ to the category of sheaves of commutative groups on the (p-adic formal) syntomic site of $Spec(\mathcal{O}_K)$. One then has to show that the filtered modules are in $(ModFI/S)$, that the sheaves are representable by finite syntomic schemes and that the two functors are quasi-inverse one to the other. To do this, one reduces to the case killed by p and uses the theory of [BBM] as well as several non-trivial local computations on the syntomic site of $Spec(\mathcal{O}_K)$. For $e = 1$, these results are equivalent to those of ([FL],9) (completed by [Fo1]+[Fo2]).

Cette note est un résumé de [Br3].

On désigne par k un corps de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ les vecteurs de Witt, $K_0 = Frac(W)$, K une extension finie totalement ramifiée de K_0 d'indice de ramification e, $\mathcal{O}_K$ les entiers de K et π une uniformisante fixée de $\mathcal{O}_K$.

1 Les modules filtrés

Le choix de π permet d'écrire $\mathcal{O}_K \simeq W[u]/(E(u))$ où $E(u)$ est le polynôme minimal de π sur K_0. Soit S la complétion p-adique de $W[u, \frac{u^{ie}}{i!}]_{i\in\mathbf{N}} \subset K_0[u]$, c'est-à-dire la complétion p-adique de l'enveloppe aux puissances divisées de $W[u]$ par rapport à l'idéal $(E(u))$. On a une surjection $S \to \mathcal{O}_K$, $u \mapsto \pi$, $\frac{u^{ie}}{i!} \mapsto \frac{\pi^{ie}}{i!}$ dont on note Fil^1S le noyau. On munit S de l'unique opérateur ϕ semi-linéaire par rapport au Frobenius sur W et continu pour la topologie p-adique tel que $\phi(u) = u^p$ et $\phi(u^{ie}/i!) = u^{pie}/i!$. On vérifie que $\phi(Fil^1S) \subset pS$ et on pose $\phi_1 = \dfrac{\phi}{p}|_{Fil^1S}$. Dans la suite, on pose $S_n = S/p^n$ et $Fil^1S_n = (Fil^1S)/p^n$.
Soit $'(Mod/S)$ la catégorie suivante: les objets sont la donnée:
a) d'un S-module $\mathcal{M}$,

b) d'un sous-S-module $Fil^1\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ contenant $Fil^1 S\cdot\mathcal{M}$,
c) d'une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_1 : Fil^1\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que pour tout $s \in Fil^1 S$ et $x \in \mathcal{M}$, $\phi_1(sx) = \phi_1(s)\phi(x)$ où $\phi(x) = \dfrac{1}{\phi_1(E(u))}\phi_1(E(u)x)$,
et les flèches sont les morphismes S-linéaires qui préservent $Fil^1\mathcal{M}$ et commutent à ϕ_1. La catégorie $'(Mod/S)$ est munie d'une notion de suite exacte courte: $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ est une suite exacte dans $'(Mod/S)$ si les deux suites de S-modules $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ et $0 \to Fil^1\mathcal{M}' \to Fil^1\mathcal{M} \to Fil^1\mathcal{M}'' \to 0$ sont exactes.
Soit $(ModFI/S)$ (Modules à "Facteurs Invariants") la sous-catégorie pleine de $'(Mod/S)$ formée des objets $\mathcal{M}$ qui vérifient les deux conditions:
a') le S-module $\mathcal{M}$ est de la forme $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i\in I} S_{n_i}$ pour I fini et $n_i \in \mathbf{N}^*$,
c') $\phi_1(Fil^1\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ sur S.

Théorème A
Supposons $e \leq p-2$, alors $(ModFI/S)$ est abélienne et stable par extension dans $'(Mod/S)$.

Pour $e = 1$, la preuve est un cas particulier de ([Br1],2) et ([Br2],2.3) et pour $e > 1$, elle est similaire. En fait, quand $e = 1$, $(ModFI/S)$ n'est pas nouvelle: elle est équivalente à la catégorie $\underline{MF}^{f,1}_{tor}$ de ([FL],9) (c.f. ([Br2],4.4)).
On note (Mod/S) la sous-catégorie pleine de $'(Mod/S)$ formée des objets qui sont des extensions successives (dans $'(Mod/S)$) d'objets de $(ModFI/S)$. Quand $e \geq p-1$, (Mod/S) contient strictement $(ModFI/S)$ et aucune n'est abélienne, mais les objets annulés par p des deux catégories coïncident pour tout e: ce sont des S_1-modules libres de type fini.

Exemple
On suppose $e = p-1$. Soient $(\mathcal{M}_1, Fil^1\mathcal{M}_1, \phi_1) = (S_1e_1, Fil^1S_1e_1, \phi_1(se_1) = \phi_1(s)e_1\ (s \in Fil^1S_1))$ et $(\mathcal{M}_2, Fil^1\mathcal{M}_2, \phi_1) = (S_1e_2, S_1e_2, \phi_1(e_2) = \phi_1(u^e)e_2)$, la flèche S_1-linéaire $\mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_1, e_2 \mapsto u^pe_1$ est un morphisme dans $'(Mod/S)$. On se convainc que les catégories $(ModFI/S)$ et (Mod/S) ne sont pas abéliennes dans ce cas en regardant les noyau et conoyau.

Définition
On appelle module fortement divisible tout objet $\mathcal{M}$ de $'(Mod/S)$ tel que:
a') $\mathcal{M}$ est libre de type fini sur S,
b') $\mathcal{M}/Fil^1\mathcal{M}$ est sans p-torsion,
c') $\phi_1(Fil^1\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ sur S.

2 Enoncé des résultats

Théorème B
Supposons $p \geq 3$, il y a une (anti-)équivalence de catégories entre (Mod/S) et la catégorie des schémas en groupes commutatifs finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ annulés par une puissance de p. Cette équivalence préserve (en les renversant) les suites exactes courtes des deux catégories.

Théorème C
L'équivalence précédente induit une (anti-)équivalence de catégories entre $(ModFI/S)$ et la catégorie des schémas en groupes commutatifs finis et plats G sur $\mathcal{O}_K$

annulés par une puissance de p tels que $Ker(p_G^n)$ est encore plat (sur $\mathcal{O}_K$) pour tout n.

On remarquera que le th. C donne en particulier tout les schémas en groupes commutatifs finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ annulés par p ($p \geq 3$) et, si $e \leq p-2$, tous les p-groupes commutatifs.

Théorème D
Supposons $p \geq 3$, il y a une (anti-)équivalence de catégories entre la catégorie des modules fortement divisibles et la catégorie des groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_K$.

Pour $e = 1$, ces résultats sont équivalents à ceux de Fontaine ([FL],9 via [Fo1]+[Fo2]) et pour $e \leq p-2$, redonnent (par le th. A) des résultats de Raynaud ([Ra]). Lorsque $e \leq p-2$, signalons qu'une autre classification est disponible en terme de "systèmes de Honda" ([Fo1],[Fo2],[Fo3],[Co]).

3 Définition des foncteurs
On rappelle qu'un morphisme de schémas $X \to Y$ est dit syntomique s'il est plat, localement de présentation finie et s'il se factorise localement en une immersion fermée régulière dans un Y-schéma lisse. Un morphisme de schémas formels p-adiques $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est syntomique si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ le morphisme de schémas $\mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ est syntomique, où $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{X}/p^n$ (resp. avec $\mathfrak{Y}$). On note $Spf(\mathcal{O}_K)_{syn}$ la catégorie des schémas formels p-adiques syntomiques sur $Spf(\mathcal{O}_K)$ munie de la topologie de Grothendieck engendrée par les familles surjectives de morphismes syntomiques. Si G est un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_K$ annulé par une puissance de p, G est un objet de $Spf(\mathcal{O}_K)_{syn}$. On va associer à tout p-groupe un objet de $'(Mod/S)$ et à tout objet de (Mod/S) un faisceau en groupes (commutatifs) sur $Spf(\mathcal{O}_K)_{syn}$. On pose $E_n = Spec(S_n)$. La surjection en 1 induit un épaississement à puissances divisées $Spec(\mathcal{O}_K/p^n) \hookrightarrow E_n$. On définit un triplet $(\mathcal{O}_n^{cris}, \mathcal{J}_n^{cris}, \phi_1)$ comme suit: $\mathcal{O}_n^{cris}$ est le faisceau sur $Spf(\mathcal{O}_K)_{syn}$ défini par $\mathcal{O}_n^{cris}(\mathfrak{X}) = H^0_{cris}(\mathfrak{X}_n/E_n, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n/E_n})$, $\mathcal{J}_n^{cris}$ le faisceau sur $Spf(\mathcal{O}_K)_{syn}$ défini par $\mathcal{J}_n^{cris}(\mathfrak{X}) = Ker\Big(\mathcal{O}_n^{cris}(\mathfrak{X}) \to \mathcal{O}_n(\mathfrak{X})\Big)$ où $\mathcal{O}_n(\mathfrak{X}) = \Gamma(\mathfrak{X}_n, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_n})$. Le Frobenius cristallin $\phi : \mathcal{O}_n^{cris} \to \mathcal{O}_n^{cris}$ vérifie $\phi(\mathcal{J}_n^{cris}) \subset p\mathcal{O}_n^{cris}$ et par des arguments de platitude, on définit $\phi_1 =$"$\dfrac{\phi}{p}$"$:\mathcal{J}_n^{cris} \to \mathcal{O}_n^{cris}$. Pour tout $\mathfrak{X}$ de $Spf(\mathcal{O}_K)_{syn}$, $(\mathcal{O}_n^{cris}(\mathfrak{X}), \mathcal{J}_n^{cris}(\mathfrak{X}), \phi_1)$ est un objet de $'(Mod/S)$.

A G, p-groupe commutatif fini et plat, vu comme faisceau sur $Spf(\mathcal{O}_K)_{syn}$, on associe:

- $Mod(G) = Hom(G, \varinjlim_n \mathcal{O}_n^{cris})$ (homomorphismes de faisceaux de groupes sur $Spf(\mathcal{O}_K)_{syn}$)
- $Fil^1 Mod(G) = Hom(G, \varinjlim_n \mathcal{J}_n^{cris})$ (idem)
- $\phi_1 : Fil^1 Mod(G) \to Mod(G)$ induit par $\phi_1 : \varinjlim_n \mathcal{J}_n^{cris} \to \varinjlim_n \mathcal{O}_n^{cris}$.

$(Mod(G), Fil^1 Mod(G), \phi_1)$ est un objet de $'(Mod/S)$.

A $\mathcal{M}$, objet de (Mod/S), on associe le faisceau $Gr(\mathcal{M})$ sur $Spf(\mathcal{O}_K)_{syn}$ défini par:

$$Gr(\mathcal{M})(\mathfrak{X}) = Hom_{'(Mod/S)}\Big(\mathcal{M}, (\mathcal{O}_n^{cris}(\mathfrak{X}), \mathcal{J}_n^{cris}(\mathfrak{X}), \phi_1)\Big)$$

où $p^n\mathcal{M} = 0$ (c'est indépendant d'un tel n), qu'on peut abréger en $Gr(\mathcal{M}) = Hom(\mathcal{M}, \varinjlim_n \mathcal{O}_n^{cris})$.

Pour montrer le théorème B, il suffit donc de montrer:
a) $Gr(\mathcal{M})$ est représentable dans $Spf(\mathcal{O}_K)_{syn}$ par un schéma fini sur $\mathcal{O}_K$,
b) $(Mod(G), Fil^1 Mod(G), \phi_1)$ est un objet de (Mod/S),
c) $Mod \circ Gr(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}$ et $Gr \circ Mod(G) \simeq G$.

4 Méthode de preuves

1) En utilisant une propriété d'exactitude du foncteur de Dieudonné ([BBM],4.2.7), un calcul non trivial d'extensions dans $'(Mod/S)$ ([Br3],4.1.4) et les propriétés des catégories (Mod/S) et $(ModFI/S)$, les trois théorèmes précédents se ramènent par des dévissages à la démonstration des points a), b) et c) ci-dessus pour les modules et les groupes annulés par p seulement.
2) Soit $\mathcal{M}$ dans $(ModFI/S)$ tel que $p\mathcal{M} = 0$. On montre d'abord qu'il existe une base $(e_1, ..., e_d)$ de $\mathcal{M}$ sur S_1 et des entiers $(r_1, ..., r_d)$ dans $\{0, ..., e\}$ tels que $Fil^1\mathcal{M} = Fil^p S_1 \mathcal{M} + \sum_{i=1}^d S_1 u^{r_i} e_i$, où $Fil^p S_1$ est l'image dans S_1 de l'idéal engendré par $\frac{E(u)^i}{i!}$ pour $i \geq p$. A partir de la matrice (inversible) de $(\phi_1(u^{r_1}e_1), ..., \phi_1(u^{r_d}e_d))$ dans la base $(e_1, ..., e_d)$, on construit directement un schéma fini et syntomique sur $\mathcal{O}_K$ dont on montre, par des calculs locaux pour la topologie syntomique, qu'il représente le faisceau $Gr(\mathcal{M})$.
3) Soit G un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_K$ annulé par p. On montre d'abord que $Mod(G)$ est libre de rang d sur S_1, si p^d est le rang de G sur $\mathcal{O}_K$, en identifiant $Mod(G)$ à l'évaluation du cristal de Dieudonné associé à G par la théorie de [BBM] sur l'épaississement $Spec(\mathcal{O}_K/p) \hookrightarrow E_1$ (ce cristal est localement libre de rang d). Il reste à voir que $\phi_1(Fil^1 Mod(G))$ engendre tout, ce qui découle d'une exploitation du Verschiebung de la fibre spéciale de G et de plusieurs lemmes de [BBM].
4) Soit $\mathcal{M}$ dans $(ModFI/S)$ tel que $p\mathcal{M} = 0$, on montre que la flèche canonique dans (Mod/S) entre les deux S_1-modules de même rang: $\mathcal{M} \to Mod(Gr(\mathcal{M}))$ est un isomorphisme en prouvant d'abord que le noyau est au pire dans $Fil^p S_1 \mathcal{M}$ et en utilisant les propriétés de (Mod/S). Soit G un groupe annulé par p, on montre que la flèche canonique $G \to Gr(Mod(G))$ est un isomorphisme en utilisant ce qui précède et la pleine fidélité du foncteur de Dieudonné classique pour les fibres spéciales sur k.

Bibliographie

[BBM] Berthelot P., Breen L., Messing W., *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Maths 930, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[Br1] Breuil C., *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 31, 1998, 281-327.

[Br2] Breuil C., *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, à paraître à Duke Math. J.

[Br3] Breuil C., *Schémas en groupes sur un anneau de valuation discrète complet très ramifié*, prépublication, Université Paris-Sud, 1998.

[Co] Conrad B., *Finite group schemes over bases with low ramification*, à paraître à Compositio.

[Fo1] Fontaine J.-M., *Groupes p-divisibles sur les vecteurs de Witt*, C.R.A.S. 280, 1975, 1353-1356.

[Fo2] Fontaine J.-M., *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt*, C.R.A.S. 280, 1975, 1423-1425.

[Fo3] Fontaine J.-M., *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque 47-48, Soc. Math. de France, 1977.

[FL] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 15, 1982, 547-608.

[Ra] Raynaud M., *Schémas en groupes de type* $(p, ..., p)$, Bull. Soc. Math. de France 102, 1974, 241-280.