Séminaire BOURBAKI Janvier 2011
63ème année, 2010-2011, n$^{\mathrm{o}}$ 1031

# CORRESPONDANCE DE LANGLANDS $p$-ADIQUE, COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL ET APPLICATIONS
## [d'après Colmez, Emerton, Kisin, ...]

par **Christophe BREUIL**

**Table des matières**

1. Introduction et notations .......... 1
2. Le résultat principal et ses applications .......... 3
 2.1. Les théorèmes de compatibilité local-global .......... 3
 2.2. Les applications .......... 6
3. Rappels sur la correspondance locale $p$-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ .......... 8
 3.1. Le foncteur de Colmez .......... 8
 3.2. Correspondance locale $p$-adique et déformations .......... 9
4. Preuve du théorème de compatibilité local-global .......... 11
 4.1. Stratégie de la preuve .......... 11
 4.2. Première réduction .......... 13
 4.3. Déformations sur l'algèbre de Hecke .......... 15
 4.4. Un argument de densité .......... 17
5. Preuve des Théorèmes 2.9, 2.11 et 2.12 .......... 20
 5.1. Compatibilité Langlands $p$-adique/Langlands classique .......... 20
 5.2. Conjectures de Fontaine-Mazur et de Kisin .......... 22
Références .......... 25

## 1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit $p$ un nombre premier. Langlands, Deligne et Carayol ont montré dans [33], [16], [10] que l'on pouvait réaliser une partie de la correspondance de Langlands globale pour $\mathrm{GL}_2$ dans la cohomologie étale :

$$\varinjlim_{K} H^1_{\text{ét}}\big(Y(K) \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p\big)$$

Je remercie chaleureusement M. Emerton pour ses réponses précises et détaillées à mes questions. Je remercie P. Colmez, J.-F. Dat, M. Emerton, G. Henniart, M. Kisin et V. Paškūnas pour leurs commentaires.

où la limite est prise sur les sous-groupes ouverts compacts $K$ de $\mathrm{GL}_2$ des adèles finis de $\mathbb{Q}$ et où $Y(K)$ est la courbe modulaire (ouverte) de "niveau $K$". Plus précisément, si $\mathcal{O}_E$ est l'anneau des entiers d'une extension finie $E$ de $\mathbb{Q}_p$ contenant les valeurs propres de Hecke d'une forme modulaire parabolique propre de poids 2, l'espace $\varinjlim_K H^1_{\text{ét}}\big(Y(K) \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{O}_E\big) \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ contient $\rho_f \otimes_E \otimes'_\ell \pi_\ell(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)})$ où $\rho_f$ est la représentation $p$-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée à $f$ et $\pi_\ell(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)})$ la représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ correspondant à la représentation galoisienne locale $\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}$ par la correspondance de Langlands locale. De plus, $\pi_\ell(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)})$ détermine (essentiellement) $\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}$ si $\ell \neq p$. Ainsi, la correspondance de Langlands locale pour chaque $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ s'insère naturellement dans une correspondance globale qui se réalise sur un espace de cohomologie. On appelle cela "compatibilité local-global".

Lorsque $\ell = p$, il n'est plus vrai en général que la représentation lisse $\pi_p(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)})$ détermine $\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$. La dernière décennie a vu l'émergence et la preuve d'une correspondance locale $p$-adique nouvelle pour le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui associe à la représentation $\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ un *espace de Banach $p$-adique* $B(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)})$ avec action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui la détermine complètement (voir [1] pour un rapport). L'examen de cas particuliers non triviaux ([5], [6]) faisait fortement soupçonner que cette correspondance locale $p$-adique s'insérait aussi dans une correspondance globale se réalisant sur l'espace de cohomologie étale "complétée" :

$$\varinjlim_{K^p}\Big(\varinjlim_{K_p} H^1_{\text{ét}}\big(Y(K^pK_p) \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{O}_E\big)\Big)^{\wedge} \otimes_{\mathcal{O}_E} E$$

où le chapeau $\wedge$ désigne le complété $p$-adique et où les limites inductives sont prises respectivement sur les sous-groupes ouverts compacts $K^p$ (resp. $K_p$) de $\mathrm{GL}_2$ des adèles finis hors $p$ (resp. de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$). C'est ce qu'Emerton vient de montrer dans un article récent ([19]) sur lequel est centré ce rapport.

Combinée avec des résultats précédents de Colmez ([15]), cette nouvelle compatibilité local-global entraîne d'abord la compatibilité entre la correspondance de Langlands locale classique et la correspondance de Langlands locale $p$-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Kisin a alors montré ([30]) que cette dernière compatibilité classique/$p$-adique avait pour conséquence la conjecture sur les multiplicités modulaires de [7] (sous des hypothèses techniques faibles). Combinée avec la preuve de la conjecture de modularité de Serre par Khare-Wintenberger-Kisin et avec les résultats de promodularité que l'on en déduit, la compatibilité local-global d'Emerton a ensuite deux conséquences globales : la preuve de la conjecture de Fontaine-Mazur caractérisant les représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ provenant des formes modulaires classiques et la preuve de la conjecture de Kisin caractérisant les représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ provenant des formes modulaires surconvergentes (les deux sous des hypothèses techniques faibles). Notons que Kisin dans [30] déduit de la conjecture sur les multiplicités modulaires combinée avec la conjecture de modularité de Serre une autre preuve de la conjecture de Fontaine-Mazur (sous des hypothèses techniques légèrement différentes). Nous donnons ici un aperçu des résultats d'Emerton ainsi que de l'essentiel de leurs preuves. Mentionnons simplement que le coeur de la démonstration du résultat de compatibilité local-global d'Emerton est un argument de densité pour la topologie de Zariski (Proposition 4.7 ci-dessous).

Dans tout le texte, $E$ désigne une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_E$ et de corps résiduel $k_E$. On note $\varpi_E$ une uniformisante de $\mathcal{O}_E$. Les représentations sont toutes à coefficients soit dans $E$, soit dans $\mathcal{O}_E$, soit dans $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n$ pour $n \geq 1$ (i.e. dans $k_E$ si $n = 1$). Si $\rho$ est une représentation $E$-linéaire continue d'un groupe compact, on note $\overline{\rho}$ la semi-simplification de la réduction modulo $\varpi_E$ d'un $\mathcal{O}_E$-réseau quelconque stable par ce groupe (lorsque ce groupe est $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\overline{\rho}$ sera en fait supposée irréductible). On note $\mathbb{A}_f$ (resp. $\mathbb{A}_f^p$) les adèles finis (resp. les adèles finis hors $p$) de $\mathbb{Q}$. Si $\Sigma$ est un ensemble fini de nombres premiers, on note $\mathbb{A}_f^\Sigma$ les adèles finis de $\mathbb{Q}$ hors $\Sigma$. Si $\ell$ est un nombre premier, on note $\mathrm{Frob}_\ell$ un Frobenius arithmétique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$, c'est-à-dire un élément qui s'envoie sur $x \mapsto x^\ell \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_\ell}/\mathbb{F}_\ell)$. On normalise les applications de réciprocité de la théorie du corps de classes local de telle sorte que $\mathrm{Frob}_\ell^{-1}$ corresponde à une uniformisante de $\mathbb{Q}_\ell$. On note $\varepsilon$ le caractère cyclotomique $p$-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de même que sa restriction aux sous-groupes de décomposition $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$ (quel que soit le premier $\ell$), et $\overline{\varepsilon}$ sa réduction modulo $p$. On voit sans commentaire $\varepsilon$ et $\overline{\varepsilon}$ comme des caractères de $\mathbb{Q}_\ell^\times$ via l'injection de $\mathbb{Q}_\ell^\times$ dans l'abélianisé de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$ donnée par la théorie du corps de classes local. On note $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ l'extension non ramifiée maximale de $\mathbb{Q}_p$. On fixe enfin des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ et $E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ ce qui permet d'associer à une forme modulaire parabolique classique ou survonvergente $f$ vecteur propre des opérateurs de Hecke (et dont les valeurs propres se retrouvent dans $E$) une représentation $E$-linéaire continue $\rho_f$ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

## 2. LE RÉSULTAT PRINCIPAL ET SES APPLICATIONS

### 2.1. Les théorèmes de compatibilité local-global

Pour $K \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sous-groupe ouvert compact on note $Y(K)$ la courbe modulaire affine définie sur $\mathbb{Q}$ dont les points complexes $Y(K)(\mathbb{C})$ sont :

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\Big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^{+\times} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K\Big) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\big((\mathbb{C}-\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K\big).$$

On pose :

$$\widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E} \stackrel{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \varinjlim_{K_p} H^1_{\text{ét}}\big(Y(K^pK_p) \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{O}_E/\varpi_E^n\mathcal{O}_E\big)$$

où $K^p$ désigne un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ et où la limite inductive est prise sur les sous-groupes ouverts compacts $K_p$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On peut aussi voir $\widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E}$ comme le *complété $p$-adique* du $\mathcal{O}_E$-module libre $\varinjlim_{K_p} H^1_{\text{ét}}\big(Y(K^pK_p) \times_{\mathbb{Q}}$

$\overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{O}_E\big)$. On note $\widehat{H}^1(K^p)_E \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ : c'est un espace de Banach $p$-adique avec $\widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E}$ comme boule unité. Il est muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui préserve la boule unité. Enfin on note :

$$\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E} \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim_{K^p} \widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E} \quad \text{et} \quad \widehat{H}^1_E \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} E = \varinjlim_{K^p} \widehat{H}^1(K^p)_E$$

que l'on munit de la topologie limite inductive des topologies des $\widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E}$ et $\widehat{H}^1(K^p)_E$. On a $(\widehat{H}^1_E)^{K^p} = \widehat{H}^1(K^p)_E$. L'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sur $\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E}$ et $\widehat{H}^1_E$ est continue (l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ est lisse).

On dit qu'une représentation linéaire continue absolument irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur un $E$-espace vectoriel de dimension 2 est *promodulaire* si elle provient d'une forme modulaire $p$-adique parabolique propre (voir Définition 4.2 pour une définition plus précise). Une représentation promodulaire est *impaire* (i.e. l'image de la conjugaison complexe sur $\overline{\mathbb{Q}}$ a pour déterminant $-1$) et le Théorème 2.4 ci-dessous dit que presque toute représentation impaire est en fait promodulaire.

Nous énonçons le résultat principal de ce texte en deux versions, l'une "faible" et l'autre "forte".

Théorème 2.1 ([19]). — *(Compatibilité local-global version faible) Soit $\rho$ une représentation $E$-linéaire continue impaire de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui est non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers. On suppose $\overline{\rho}$ absolument irréductible et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \not\cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \bar{\varepsilon} \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère (avec $*$ nul ou non).*
*(i) Si $\rho$ est promodulaire, alors il existe un ensemble fini de nombres premiers $\Sigma$ contenant $p$ et les places où $\rho$ est ramifiée tel que l'on ait un morphisme non nul continu $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^\Sigma)$-équivariant :*

$$B\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big) \otimes_E \otimes'_{\ell\notin\Sigma} \pi_\ell\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\rho, \widehat{H}^1_E) \tag{1}$$

*où $B\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big)$ est la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation continue sur un espace de Banach $p$-adique associée à $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ par la correspondance de Langlands locale $p$-adique (voir §3 ou* [1]*) et où $\pi_\ell\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}\big)$ est la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$-représentation lisse associée à $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}$ par la correspondance de Langlands locale classique (voir Remarque 2.3(i),(ii)).*
*(ii) Si $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ n'est ni la somme directe de deux caractères, ni une extension d'un caractère par lui-même, alors tout morphisme comme en (1) est une injection fermée.*

Lorsque $\ell \in \Sigma$, le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ agit sur le $E$-espace vectoriel des morphismes comme en (1) via son action sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\rho, \widehat{H}^1_E)$. La version forte précise cette action :

Théorème 2.2 ([19]). — *(Compatibilité local-global version forte) Conservons les hypothèses du Théorème 2.1 et supposons de plus $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \not\cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par* *un caractère (avec $*$ nul ou non). Si $\rho$ est promodulaire, alors on a un isomorphisme topologique* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$*-équivariant :*

$$B(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}) \otimes_E \otimes'_{\ell \neq p} \pi_\ell(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\rho, \widehat{H}^1_E). \tag{2}$$

*Remarque 2.3.* — (i) La représentation $\pi_\ell(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)})$ est dans presque tous les cas (mais pas tous, cf. (ii) ci-dessous) la représentation lisse admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ correspondant à la représentation de Weil-Deligne associée à $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}$ (et $F$-semi-simplifiée) par la correspondance de Langlands locale classique avec la normalisation de Tate.
(ii) Lorsque la correspondance de Langlands locale classique associe à $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}$ une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ *non générique*, i.e. de dimension 1, la représentation $\pi_\ell(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)})$ ci-dessus est alors dans ce cas l'unique extension non scindée de cette représentation de dimension 1 par le tordu convenable de la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$. En particulier elle est alors *réductible* (de longueur 2).
(iii) Plusieurs cas particuliers du Théorème 2.1 pour des $\rho = \rho_f$ avec $f$ forme modulaire parabolique propre de poids $\geq 2$ étaient déjà connus ([5], [6]).
(iv) Le Théorème 2.1(i) implique en particulier $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\rho, \widehat{H}^1_E) \neq 0$ pour *tout* $\rho$ promodulaire satisfaisant les conditions de l'énoncé (ce qui n'est nullement évident *a priori*).
(v) L'isomorphisme (2) devrait être encore valable en supposant seulement $\rho$ impaire absolument irréductible de dimension 2 presque partout non ramifiée et telle que $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \not\cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère (cf. [19, Conj. 1.1.1]). Le cas où $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$ semble plus compliqué (cf. [19, Rem. 6.1.23]).
(vi) En fait, l'isomorphisme (2) est conséquence d'un résultat plus fort encore décrivant la $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$-représentation $\varinjlim_{K_\Sigma^p} \widehat{H}^1\big(K_\Sigma^p \prod_{\ell \notin \Sigma} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\big)_{E,\overline{\rho}}$ pour chaque ensemble fini $\Sigma$ de nombres premiers contenant $p$ et les places ramifiées de $\overline{\rho}$, où la limite inductive est prise sur les sous-groupes ouverts compacts $K_\Sigma^p$ de $\prod_{\ell \in \Sigma \setminus \{p\}} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ et où l'indice $\overline{\rho}$ signifie la complétion par rapport à l'idéal maximal associé à $\overline{\rho}$ engendré par les opérateurs de Hecke hors $\Sigma$ ([19, Th. 6.2.13]).

La portée des Théorèmes 2.1 et 2.2 est grandement élargie par le théorème de promodularité suivant, synthèse de plusieurs résultats dus à Boeckle, Diamond-Flach-Guo, Kisin,... tous généralisant les méthodes inaugurées par Wiles et Taylor-Wiles ([43], [41]) et utilisant la preuve de la conjecture de Serre ([39]) par Khare-Wintenberger et Kisin ([26], [27], [31]) :

Théorème 2.4. — *Conservons les hypothèses du Théorème 2.1 et supposons de plus $p > 2$, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1}))}$ absolument irréductible et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \not\cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère (avec $*$ nul ou non). Alors $\rho$ est promodulaire.*

Tous les détails de la preuve du Théorème 2.2 ne sont pas encore disponibles. Nous nous limitons dans la suite de ce rapport à celle du Théorème 2.1 qui suffit pour toutes les applications et qui est entièrement dans [19].

### 2.2. Les applications

Rappelons d'abord les trois conjectures suivantes, la première étant la conjecture de Fontaine-Mazur ([24, Conj. 3c]), la deuxième étant due essentiellement à Kisin ([28, Rem. 11.7(2)], [18, Conj. 7.9.1(4)]) et la troisième étant la conjecture sur les multiplicités modulaires (ou "conjecture de Breuil-Mézard", [7, Conj. 1.1], [30, Conj. 1.1.3]) :

CONJECTURE 2.5. — *Soit $\rho$ une représentation $E$-linéaire continue impaire absolument irréductible de dimension* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *presque partout non ramifiée et dont la restriction à* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate distincts (*[21]*). Alors il existe une forme modulaire parabolique propre $f$ de poids $\geq 2$ telle que $\rho$ est la tordue de $\rho_f$ par un caractère.*

La condition "$\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ potentiellement semi-stable" dit en gros que l'action d'un sous-groupe ouvert suffisamment petit de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ se trivialise sur $\rho \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{st}}$ où $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}$ est l'anneau de périodes de Fontaine ([21]). Rappelons que toutes les représentations $p$-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ provenant de la cohomologie étale $p$-adique des variétés algébriques sont potentiellement semi-stables ([20], [36], [42]). La conjecture de Fontaine-Mazur contient la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil en prenant pour $\rho$ le module de Tate $p$-adique d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ ([43], [41], [8]). Une de ses conséquences frappantes est le fait que les polynômes caractéristiques des $\mathrm{Frob}_\ell$ sur $\rho$ (pour $\ell \neq p$ non ramifié) sont à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}$ (et pas seulement de $\mathbb{Q}_p$).

CONJECTURE 2.6. — *Soit $\rho$ une représentation $E$-linéaire continue impaire absolument irréductible de dimension* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *presque partout non ramifiée et dont la restriction à* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *est trianguline (*[13], [1, §3.3]*). Alors il existe une forme modulaire $p$-adique surconvergente parabolique propre $f$ de pente finie telle que $\rho$ est la tordue de $\rho_f$ par un caractère.*

La condition "trianguline" (introduite par Colmez [13] à la suite de travaux de Kisin [28]) dit *grosso modo* en dimension 2 que, après torsion éventuelle par un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ se trivialise sur un sous-module non nul de $\rho \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$.

CONJECTURE 2.7. — *Soit $\overline{\rho}_p$ une représentation $k_E$-linéaire continue de dimension* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *telle que* $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}_p) = k_E$*, $k$ un entier $\geq 2$ et $\tau$ une représentation $E$-linéaire de dimension* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ *de noyau ouvert qui s'étend au groupe de Weil de $\mathbb{Q}_p$. Soit $R(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ la $\mathcal{O}_E$-algèbre locale noethérienne complète paramétrant les déformations potentiellement semi-stables de $\overline{\rho}_p$ de poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ et de type $\tau$ (voir* [29]*) et soit $\mu_{\mathrm{Gal}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ la multiplicité de Hilbert-Samuel de l'anneau local $R(k,\tau,\overline{\rho}_p) \otimes_{\mathcal{O}_E} k_E$. Alors on a :*

$$\mu_{\mathrm{Gal}}(k,\tau,\overline{\rho}_p) = \mu_{\mathrm{Aut}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$$

*où* $\mu_{\mathrm{Aut}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ *est (essentiellement) le nombre de poids de Serre associés à* $\overline{\rho}_p|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}$ *apparaissant dans le semi-simplifié modulo* $\varpi_E$ *de la* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$*-représentation* $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2\otimes_E\sigma(\tau)$ *(*$\sigma(\tau)$ *est la représentation irréductible de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *associée à* $\tau$ *par la théorie des types, cf.* [25]*).*

Cette dernière conjecture dit essentiellement que l'on peut compter les composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathrm{Spec}R(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ (qui forment donc la "géométrie" des déformations potentiellement semi-stables de poids de Hodge-Tate $(0,k-1)$ et de type $\tau$) par une formule entièrement du côté $\mathrm{GL}_2$.

*Remarque 2.8.* — (i) L'hypothèse $\rho$ impaire dans la Conjecture 2.5 devrait être inutile car elle devrait suivre des autres hypothèses sur $\rho$, en particulier du fait que les poids de Hodge-Tate sont distincts (cf. [24, Conj. 3c] et les résultats de Calegari [9]).
(ii) L'hypothèse $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}_p)=k_E$ dans la Conjecture 2.7 est inutile à condition de définir $R(k,\tau,\overline{\rho}_p)$ correctement quand $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}_p)\neq k_E$ (cf. [30, §1.1]). Par ailleurs, dans la définition de $\mu_{\mathrm{Aut}}(k,\tau,\overline{\rho}_p)$, il faut parfois compter certains poids de Serre avec des multiplicités $>1$ (cf. *loc. cit.).*

Le Théorème 2.1 seul a d'abord pour conséquence le théorème suivant :

Théorème 2.9 ([19], [15]). — *La correspondance de Langlands locale p-adique est compatible avec la correspondance de Langlands locale classique pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *(cf. §5.1 pour un énoncé plus précis).*

Le Théorème 2.9 a alors lui-même pour conséquence :

Théorème 2.10 ([30]). — *Supposons* $p>2$ *et* $\overline{\rho}_p\not\cong\left(\begin{smallmatrix}\overline{\varepsilon}&*\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ *à torsion près par un caractère, alors la conjecture 2.7 est vraie.*

Combiné avec le Théorème 2.4, le Théorème 2.1 a ensuite pour conséquence les deux théorèmes :

Théorème 2.11 ([19], [30], [40]). — *Supposons* $p>2$, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1}))}$ *absolument irréductible et, ou bien* $p>3$ *et* $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\not\cong\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\overline{\varepsilon}\end{smallmatrix}\right)$ *à torsion près par un caractère, ou bien* $p=3$ *et* $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\not\cong\left(\begin{smallmatrix}1&*\\0&\overline{\varepsilon}\end{smallmatrix}\right)$ *à torsion près par un caractère (avec* $*$ *nul ou non), alors* $\rho$ *vérifie la conjecture 2.5.*

Théorème 2.12 ([19]). — *Supposons* $p>2$, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1}))}$ *absolument irréductible et* $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\not\cong\left(\begin{smallmatrix}1&*\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ *ou* $\left(\begin{smallmatrix}1&*\\0&\overline{\varepsilon}\end{smallmatrix}\right)$ *à torsion près par un caractère (avec* $*$ *nul ou non), alors* $\rho$ *vérifie la conjecture 2.6.*

*Remarque 2.13.* — (i) Le Théorème 2.9 utilise dans sa preuve plusieurs résultats de Colmez (voir §5.1).
(ii) Le Théorème 2.10 a été démontré par Kisin en utilisant le Théorème 2.9 et des arguments globaux de déformations (qui nécessitent les hypothèses techniques, cf. [30, Cor. 2.3.2]). Sa preuve s'étend aux cas où $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est semi-simple non isomorphe à $\left(\begin{smallmatrix}\overline{\varepsilon}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ à torsion près (cf. Remarque 2.8(ii)).

(iii) Le Théorème 2.11 donne un énoncé à peu près optimal à ce jour (janvier 2011) sur la conjecture de Fontaine-Mazur (voir §5.2). Certains cas ne sont en fait pas traités dans [19] comme conséquence des Théorèmes 2.1 et 2.4 : ce sont les cas où $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est scindée (déjà démontrés par Skinner-Wiles [40]) et les cas où, à torsion près, $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ($*$ nul ou non) ou bien $p > 3$ et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \overline{\varepsilon} \end{smallmatrix}\right)$ ($*$ non nul) (traités par Kisin [30, §2.2]). En fait, Kisin donne dans *loc. cit.* une *autre* preuve de la conjecture de Fontaine-Mazur basée uniquement sur une variante du Théorème 2.10 dans un contexte global (et sur la conjecture de Serre).

Nous rappelons maintenant ce dont nous avons besoin de la correspondance de Langlands locale $p$-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

## 3. RAPPELS SUR LA CORRESPONDANCE LOCALE $p$-ADIQUE POUR $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

### 3.1. Le foncteur de Colmez

Pour plus de détails sur cette partie, nous renvoyons le lecteur à l'exposé de Berger au séminaire Bourbaki et aux références qu'il contient ([1]) ainsi qu'à [19, §3].

La correspondance de Langlands locale $p$-adique associe à toute représentation $E$-linéaire continue $\rho_p$ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ un espace de Banach $p$-adique $B(\rho_p)$ sur $E$ muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Unitaire veut dire qu'il existe une norme définissant la topologie du Banach pour laquelle l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est invariante (i.e. $\|g(v)\| = \|v\|$). La correspondance de Langlands locale modulo $p$ associe à toute représentation $k_E$-linéaire continue de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $k_E$. Ces deux correspondances sont compatibles, c'est-à-dire que l'on peut retrouver la deuxième par réduction modulo $p$ à partir de la première. Les représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui interviennent dans ces correspondances sont toujours admissibles (sur $k_E$, c'est la définition usuelle : l'espace des invariants sous un sous-groupe ouvert compact quelconque est de dimension finie, et sur $E$, cela revient à demander que la réduction modulo $\varpi_E$ d'une boule unité stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ soit une représentation admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $k_E$). De plus, la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est (topologiquement) irréductible (resp. indécomposable) si et seulement si la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ l'est et, dans le cas réductible, elle est en général de longueur (topologique) 2, chaque facteur de Jordan-Hölder étant une série principale (continue sur $E$ ou lisse sur $k_E$).

En pratique, il se trouve qu'il est plus facile d'aller de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ vers $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ que l'inverse. Ainsi, un outil essentiel dans la construction des correspondances locales $p$-adique et modulo $p$ est un *foncteur* dû à Colmez qui associe à une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, que nous décrivons brièvement maintenant (voir aussi [15, §IV] ou [1, §4.1]). Soit $\Gamma \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}_p(\sqrt[p^\infty]{1})/\mathbb{Q}_p\big)$ (qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_p^\times$ par $\varepsilon$) et appelons $(\varphi,\Gamma)$-module un $\mathcal{O}_E[[X]][\frac{1}{X}]$-module $D$ de type fini annulé par une puissance de $\varpi_E$, muni d'une action continue de $\Gamma$ telle que $\gamma(f(X)d) = f((1+X)^{\varepsilon(\gamma)}-1)\gamma(d)$ ($\gamma \in \Gamma$, $d \in D$) et d'un Frobenius $\varphi$ tel que $\varphi(f(X)d) = f((1+X)^p-1)\varphi(d)$, $\varphi$ commute à $\Gamma$ et l'image de $\varphi$ engendre $D$ sur $\mathcal{O}_E[[X]][\frac{1}{X}]$. Soit $n \geq 1$, rappelons que, par un résultat de Fontaine ([23]), il y a une équivalence de catégories entre les représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de longueur finie sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n$ et les $(\varphi,\Gamma)$-modules annulés par $\varpi_E^n$. Soit $\pi_p$ une représentation lisse admissible de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n$-module. On lui associe une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de longueur finie sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n$ comme suit. Soit $W \subset \pi_p$ un sous-$\mathcal{O}_E$-module de rang fini stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et qui engendre $\pi_p$ sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (il en existe car $\pi_p$ est lisse et de longueur finie). Le sous-$\mathcal{O}_E$-module $\sum_{m\geq 0}\left(\begin{smallmatrix} p^m & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) W$ de $\pi_p$ est stable par l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. On considère le dual $\mathcal{O}_E$-linéaire :

$$M(W) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\left(\sum_{m\geq 0}\begin{pmatrix} p^m & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1\end{pmatrix} W, \mathcal{O}_E/\varpi_E^n\right)$$

qui est naturellement un $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n[[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]$-module muni d'une action de $\Gamma \simeq \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ (via l'action duale sur $\sum_{m\geq 0}\left(\begin{smallmatrix} p^m & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) W$). Identifiant $\mathcal{O}_E[[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]$ à $\mathcal{O}_E[[X]]$ via $X = [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)] - [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]$, Colmez montre alors que $\mathcal{O}_E[[X]][\frac{1}{X}] \otimes_{\mathcal{O}_E[[X]]} M(W)$ est stable par l'action duale de $\varphi \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, est indépendant du choix de $W$ et que l'on obtient ainsi un $(\varphi,\Gamma)$-module vérifiant toutes les propriétés précédentes. On note $V(\pi_p)$ le *dual* de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ associée à ce $(\varphi,\Gamma)$-module.

*Remarque 3.1.* — Le lecteur attentif remarquera que la représentation $V(\pi_p)$ est la tordue par le caractère $\varepsilon^{-1}$ de la représentation usuelle (celle de [1] par exemple). Nous suivons ici les conventions de [19] dictées par la réalisation cohomologique de la correspondance $p$-adique.

Le foncteur $\pi_p \mapsto V(\pi_p)$ est covariant, exact et réalise la correspondance de Langlands locale modulo $p$ lorsque restreint à des représentations annulées par $\varpi_E$. En passant à la limite projective sur $n$ dans les $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n$-modules et en inversant $p$, il réalise la correspondance de Langlands locale $p$-adique ([32], [38]).

### 3.2. Correspondance locale $p$-adique et déformations

Nous allons avoir besoin d'une formulation de la correspondance locale $p$-adique qui soit compatible aux déformations des représentations (au sens de [35]) des deux côtés.

Dans la suite de cette partie, on fixe une représentation $k_E$-linéaire continue $\overline{\rho}_p$ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ qui vérifie l'hypothèse :

$$\overline{\rho}_p \not\cong \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \overline{\varepsilon}\end{pmatrix} \text{ à torsion près par un caractère (avec } * \text{ nul ou non)} \tag{3}$$

et on note $\overline{\pi}_p$ la représentation lisse admissible de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui lui correspond par la correspondance de Langlands modulo $p$. On suppose ici pour simplifier $\mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}(\overline{\rho}_p) = k_E$ qui est équivalent à $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\overline{\pi}_p) = k_E$. Comme déjà mentionné au §2, on peut se passer de cette hypothèse au prix de quelques complications sur la théorie des déformations (et l'on s'en passera tacitement dans les parties suivantes).

DÉFINITION 3.2. — *(i) Soit $A$ une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale artinienne de corps résiduel $k_E$ et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On appelle déformation de $\overline{\rho}_p$ (resp. de $\overline{\pi}_p$) sur $A$ une représentation $A$-linéaire lisse $\rho_p$ (resp. $\pi_p$) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ (resp. de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) sur un $A$-module libre de rang 2 (resp. sur un $A$-module libre) telle que $\rho_p \otimes_A A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \overline{\rho}_p$ (resp. telle que $\pi_p \otimes_A A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \overline{\pi}_p$).*
*(ii) Soit $A$ une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale noethérienne complète de corps résiduel $k_E$ et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On appelle déformation de $\overline{\rho}_p$ (resp. de $\overline{\pi}_p$) sur $A$ une représentation $A$-linéaire $\rho_p$ (resp. $\pi_p$) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ (resp. de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) sur un $A$-module libre de rang 2 (resp. sur un $A$-module séparé complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique) tel que $\rho_p \otimes_A A/\mathfrak{m}^n$ (resp. $\pi_p \otimes_A A/\mathfrak{m}^n$) est une déformation de $\overline{\rho}_p$ (resp. de $\overline{\pi}_p$) sur $A/\mathfrak{m}^n$ au sens de (i) pour tout $n \geq 1$.*

L'exactitude du foncteur $V$ et le fait que $V(\overline{\pi}_p) = \overline{\rho}_p$ impliquent qu'il envoie une déformation de $\overline{\pi}_p$ vers une déformation de $\overline{\rho}_p$. Les critères usuels de Schlessinger montrent que le foncteur qui à $A$ associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations de $\overline{\rho}_p$ (resp. $\overline{\pi}_p$) sur $A$ est représentable par une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale noethérienne complète de corps résiduel $k_E$ que l'on note $R(\overline{\rho}_p)$ (resp. $R(\overline{\pi}_p)$). Par ce qui précède, le foncteur $V$ donne donc un morphisme local de $\mathcal{O}_E$-algèbres $R(\overline{\rho}_p) \to R(\overline{\pi}_p)$. On note $R(\overline{\pi}_p)^{\mathrm{det}}$ le quotient de $R(\overline{\pi}_p)$ paramétrant les déformations $\pi_p$ qui ont un caractère central correspondant à $\det(V(\pi_p))\varepsilon$ via le corps de classes local. On déduit d'un résultat de Colmez ([15, §VII.5.3]) que l'application composée $R(\overline{\rho}_p) \to R(\overline{\pi}_p)^{\mathrm{det}}$ est surjective.

Posons :

$$R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}} \overset{\text{déf}}{=} R(\overline{\rho}_p)/\cap\,\mathfrak{p} \tag{4}$$

l'intersection étant prise sur les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $R(\overline{\rho}_p)$ de la forme :

$$\mathfrak{p} = \mathrm{Ker}\big(R(\overline{\rho}_p) \to E'\big)$$

où $E'$ est une extension finie de $E$ et où $R(\overline{\rho}_p) \to E'$ est un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres tel que la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2 sur $E'$ obtenue par changement de base à partir de la représentation universelle sur $R(\overline{\rho}_p)$ est cristalline avec des poids de Hodge-Tate distincts. Le schéma $\mathrm{Spec}R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}}$ est donc l'adhérence de Zariski des points cristallins à poids de Hodge-Tate distincts dans $\mathrm{Spec}R(\overline{\rho}_p)$. On pose :

$$R(\overline{\pi}_p)^{\mathrm{cris}} \overset{\text{déf}}{=} R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}} \otimes_{R(\overline{\rho}_p)} R(\overline{\pi}_p)^{\mathrm{det}}. \tag{5}$$

Le résultat essentiel pour la suite, et qui historiquement a été inspiré par les résultats de [30], est le théorème suivant dû à Kisin ([32, Prop. 2.8]) :

Théorème 3.3 ([32]). — *La surjection canonique* $R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}} \twoheadrightarrow R(\overline{\pi}_p)^{\mathrm{cris}}$ *est un isomorphisme.*

Géométriquement, ce résultat signifie que le sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}}$ dont les points sont les déformations galoisiennes provenant par le foncteur $V$ de déformations côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ satisfaisant la condition sur le caractère central est égal à *tout* $\mathrm{Spec}R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}}$. L'argument clef de la preuve est d'une part que *toutes* les représentations cristallines de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ à poids de Hodge-Tate distincts sont dans l'image de $V$, d'autre part que, lorsqu'une déformation $\pi_p$ donne par le foncteur $V$ une déformation galoisienne $\rho_p$ cristalline à poids de Hodge-Tate distincts, alors la condition "caractère central de $\pi_p = \det(V(\pi_p))\varepsilon$" est automatique. Tout cela se déduit des propriétés de $V$ et des constructions explicites de [2], [6], [14], [37].

*Remarque 3.4.* — (i) Dans [32], le Théorème 3.3 est démontré sans la condition $\mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}(\overline{\rho}_p) = k_E$ (mais avec la condition (3)).
(ii) Si $p > 2$ (et même si $p = 2$ par un résultat non publié de Chenevier [15, note (7)]), la surjection $R(\overline{\rho}_p) \twoheadrightarrow R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}}$ est en fait un isomorphisme sous la condition (3) par densité des points cristallins à poids de Hodge-Tate distincts dans $\mathrm{Spec}R(\overline{\rho}_p)$ pour la topologie de Zariski ([32, Cor. 1.11], [3]). Avec (5), on en déduit $R(\overline{\pi}_p)^{\det} \xrightarrow{\sim} R(\overline{\pi}_p)^{\mathrm{cris}}$ et avec le Théorème 3.3, on a donc dans ce cas $R(\overline{\rho}_p) \xrightarrow{\sim} R(\overline{\pi}_p)^{\det}$. Nous n'utilisons pas ces résultats dans la suite.

Le Théorème 3.3 sera utilisé à la fin du §4.3 sous la forme suivante :

Corollaire 3.5. — *Soit $T$ une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale noethérienne complète qui est un quotient de $R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}}$. Toute déformation $\rho_p$ de $\overline{\rho}_p$ sur $T$ provient par le foncteur $V$ d'une déformation $\pi_p$ de $\overline{\pi}_p$ sur $T$.*

## 4. PREUVE DU THÉORÈME DE COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

### 4.1. Stratégie de la preuve

Pour montrer le Théorème 2.1, supposant $\rho$ promodulaire (ce qui implique en particulier $\overline{\rho}$ modulaire) il s'agit donc de produire un ensemble $\Sigma$ contenant $p$ et les places où $\rho$ est ramifiée ainsi qu'un morphisme non nul continu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^\Sigma)$-équivariant :

$$\rho \otimes_E B(\rho_p) \otimes_E \otimes'_{\ell \notin \Sigma} \pi_\ell\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}\big) \longrightarrow \widehat{H}^1_E$$

où $\rho_p \overset{\text{déf}}{=} \rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ et de montrer qu'un tel morphisme est toujours injectif (et fermé) sous les conditions de l'énoncé.

Les étapes de la démonstration de l'existence d'un tel morphisme non nul sont les suivantes :

(i) Soit $\Sigma$ un ensemble fini de nombre premiers contenant $p$ et les places où $\rho$ est ramifiée, on se ramène au §4.2 à montrer qu'il existe un morphisme non nul continu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\rho \otimes_E B(\rho_p) \longrightarrow \widehat{H}^1_{E,\Sigma}$$

où $\widehat{H}^1_{E,\Sigma} \stackrel{\text{déf}}{=} (\widehat{H}^1_E)^{\prod_{\ell \notin \Sigma} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)}$ (et qu'un tel morphisme est toujours une injection fermée sous les conditions de l'énoncé).

(ii) Le $E$-espace vectoriel $\widehat{H}^1_{E,\Sigma}$ est naturellement un module sur une algèbre de Hecke $\mathbb{T}_\Sigma$. Notant $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$ le complété de $\mathbb{T}_\Sigma$ "par rapport à $\overline{\rho}$", on montre au §4.3 qu'il existe des déformations naturelles $\rho_\Sigma$ de $\overline{\rho}_p$ et $\pi_\Sigma$ de $\overline{\pi}_p$ sur $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$ telles que $V(\pi_\Sigma) = \rho_\Sigma$ où $\overline{\rho}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ et où $\overline{\pi}_p$ est la représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $k_E$ qui lui correspond par la correspondance locale modulo $p$.

(iii) Notant $\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}} \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{H}^1_{E,\Sigma} \otimes_{\mathbb{T}_\Sigma} \mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$, on montre au §4.4 que le $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$-module des homomorphismes équivariants continus :

$$X_E \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}\big(\rho_\Sigma \otimes_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}} \pi_\Sigma, \widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}\big)$$

est tel que $X_E[\mathfrak{p}] \neq 0$ pour *tout* idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$. On le déduit par un argument de densité du fait que $X_E[\mathfrak{p}] \neq 0$ pour le sous-ensemble des idéaux maximaux "classiques cristallins" de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$. Comme $\rho$ est promodulaire, il existe $\Sigma$ tel que l'idéal $\mathfrak{p}_\rho$ de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ associé à $\rho$ par la recette habituelle est un idéal maximal, et $X_E[\mathfrak{p}_\rho] \neq 0$ montre l'existence d'un morphisme non nul continu équivariant comme en (i).

Les étapes (ii) et (iii) ci-dessus, et les preuves des Théorèmes 2.9 et 2.11 au §5, utilisent de manière essentielle un théorème démontré par Emerton il y a quelques années qui décrit les vecteurs localement algébriques de $\widehat{H}^1_E$ pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et que l'on rappelle maintenant. Si $V$ est un $E$-espace vectoriel muni d'une action linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on note $V^{\mathrm{alg}} \subset V$ le sous-$E$-espace vectoriel des vecteurs $v$ pour lesquels il existe un sous-groupe ouvert compact $K_p \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ tel que la $K_p$-représentation engendrée par $v$ dans $V|_{K_p}$ soit la restriction à $K_p$ d'une somme directe de représentations algébriques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Ce sous-espace est stable sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Si $k$ est un entier $\geq 2$ et $K$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, on note $\mathcal{F}_{k-2}$ le faisceau sur le site étale de $Y(K) \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ correspondant au système local au-dessus de $Y(K)(\mathbb{C})$ :

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\big((\mathbb{C}-\mathbb{R}) \times (\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f) \times \mathrm{Sym}^{k-2}E^2)/K\big)$$

(voir [18, §2.4] pour plus de détails sur les actions respectives de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ et $K$).

THÉORÈME 4.1 ([17], [18]). — *On a un isomorphisme* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$-*équivariant :*

$$\bigoplus_{\substack{k\geq 2\\ n\in\mathbb{Z}}} \varinjlim_{K} H^1_{\text{ét}}\big(Y(K)\times_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}},\mathcal{F}_{k-2}\big)\otimes_E (\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^\vee\otimes_E \varepsilon^n \xrightarrow{\ \sim\ } (\widehat{H}^1_E)^{\mathrm{alg}}$$

*où la limite inductive est prise sur les sous-groupes ouverts compacts de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ *et où* $\varepsilon^n$ *est le caractère* $\varepsilon^n\otimes(\varepsilon^n\circ\det)$ *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$.

En prenant les invariants sous l'action de $\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ où $\Sigma$ est un ensemble fini de nombres premiers contenant $p$, on en déduit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\times\prod_{\ell\in\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)\times\mathbb{T}_\Sigma$-équivariant :

$$(6)\quad \bigoplus_{\substack{k\geq 2\\ n\in\mathbb{Z}}} \varinjlim_{K_\Sigma} H^1_{\text{ét}}\Big(Y\big(K_\Sigma\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\big)\times_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}},\mathcal{F}_{k-2}\Big)\otimes_E(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^\vee\otimes_E\varepsilon^n \xrightarrow{\ \sim\ } (\widehat{H}^1_{E,\Sigma})^{\mathrm{alg}}$$

où la limite inductive est prise sur les sous-groupes ouverts compacts $K_\Sigma$ de $\prod_{\ell\in\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$.

### 4.2. Première réduction

Si $K$ est un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, on note $\mathbb{T}(K)$ la sous-$\mathcal{O}_E$-algèbre de :

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})]}\big(H^1_{\text{ét}}\big(Y(K)\times_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}},\mathcal{O}_E\big)\big)$$

engendrée par les opérateurs de Hecke $T_\ell \overset{\text{déf}}{=} K\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)K$ et $S_\ell \overset{\text{déf}}{=} K\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&\ell\end{smallmatrix}\right)K$ pour les premiers $\ell\neq p$ qui sont non ramifiés dans $K$. C'est une $\mathcal{O}_E$-algèbre commutative libre de type fini. Si $\Sigma$ est un ensemble fini de nombres premiers contenant $p$, on pose :

$$\mathbb{T}_\Sigma \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{K_\Sigma}\mathbb{T}\Big(K_\Sigma\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\Big)$$

où la limite projective est prise sur les sous-groupes ouverts compacts $K_\Sigma$ de $\prod_{\ell\in\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ (les applications de transition sont surjectives). On munit $\mathbb{T}_\Sigma$ de la topologie limite projective de la topologie $p$-adique sur chaque $\mathbb{T}(K_\Sigma\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell))$. La $\mathcal{O}_E$-algèbre topologique $\mathbb{T}_\Sigma$ est compacte, réduite, commutative et agit fidèlement sur :

$$\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma}\overset{\text{déf}}{=}\varinjlim_{K^p_\Sigma}\widehat{H}^1\Big(K^p_\Sigma\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\Big)_{\mathcal{O}_E} = (\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E})^{\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)}$$

en commutant avec l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\times\prod_{\ell\in\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ (la limite inductive est prise ici sur les sous-groupes ouverts compacts $K^p_\Sigma$ de $\prod_{\ell\in\Sigma\setminus\{p\}}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$).

On dit qu'un idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{T}_\Sigma[1/p]$ est *classique* si le système de valeurs propres de Hecke associé à $\mathbb{T}_\Sigma\to\mathbb{T}_\Sigma[1/p]/\mathfrak{p}$ provient d'une forme modulaire parabolique propre de poids $\geq 2$ (rappelons que $\mathbb{T}_\Sigma[1/p]/\mathfrak{p}$ est une extension finie de $E$). Tous les idéaux maximaux de $\mathbb{T}_\Sigma[1/p]$ ne sont pas classiques, ce qui motive la définition suivante de la promodularité pour une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (voir [18, Def. 7.3.11]) :

Définition 4.2. — *Soit $\rho$ une représentation $E$-linéaire continue impaire absolument irréductible de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui est non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers. On dit que $\rho$ est promodulaire s'il existe un ensemble fini de nombres premiers $\Sigma$ contenant $p$ et les places où $\rho$ est ramifiée tel que l'idéal de $\mathbb{T}_\Sigma[1/p]$ engendré par $T_\ell - \mathrm{trace}(\rho(\mathrm{Frob}_\ell))$ et $S_\ell - \ell^{-1}\det(\rho(\mathrm{Frob}_\ell))$ pour $\ell \notin \Sigma$ est un idéal maximal (ce qui revient à demander qu'il soit distinct de $\mathbb{T}_\Sigma[1/p]$).*

(Lorsque l'idéal engendré est maximal *et* classique, rappelons que $\rho$ est dite modulaire.)

Notons $\mathrm{c}-\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)}1$ l'induite lisse à support compact usuelle sur $E$ et rappelons que $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)}\big(\mathrm{c}-\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)}1\big) = E[T_\ell, S_\ell]$. De plus, si $\pi_\ell$ est une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ sur $E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in E$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)}\left(\frac{\mathrm{c}-\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)}1}{\big(T_\ell-\lambda_1, S_\ell-\lambda_2\big)}, \pi_\ell\right) = \pi_\ell^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)}[T_\ell-\lambda_1, S_\ell-\lambda_2] \tag{7}$$

où le membre de droite est le sous-espace vectoriel de $\pi_\ell^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)}$ sur lequel $T_\ell$ et $S_\ell$ agissent par la multiplication par $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

Soit maintenant $\rho$ comme dans le Théorème 2.1, $\Sigma$ un ensemble fini de nombres premiers contenant $p$ et les places où $\rho$ est ramifiée et $\lambda : \mathbb{T}_\Sigma \to E$ le caractère qui envoie $T_\ell$ sur $\mathrm{trace}(\rho(\mathrm{Frob}_\ell))$ et $S_\ell$ sur $\ell^{-1}\det(\rho(\mathrm{Frob}_\ell))$ pour $\ell \notin \Sigma$. Soit $\widehat{H}^1_{E,\Sigma}[\lambda]$ le sous-$E$-espace vectoriel de $\widehat{H}^1_{E,\Sigma} = \widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma} \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ sur lequel $\mathbb{T}_\Sigma$ agit par $\lambda$. On a pour $\ell \notin \Sigma$ par la correspondance locale classique :

$$\pi_\ell\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}\big) \simeq \frac{\mathrm{c}-\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)}1}{\big(T_\ell-\lambda(T_\ell), S_\ell-\lambda(S_\ell)\big)},$$

et on déduit de (7) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^\Sigma)}\Big(\rho\otimes_E B(\rho_p)\otimes_E \otimes'_{\ell\notin\Sigma}\pi_\ell\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}\big), \widehat{H}^1_E\Big) &\xrightarrow{\sim} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\rho\otimes_E B(\rho_p), \widehat{H}^1_{E,\Sigma}[\lambda]\big) &\xrightarrow{\sim} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\rho\otimes_E B(\rho_p), \widehat{H}^1_{E,\Sigma}\big)&\end{aligned} \tag{8}$$

où le dernier isomorphisme résulte des relations d'Eichler-Shimura entre action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et action de $\mathbb{T}_\Sigma$ sur $\widehat{H}^1_{E,\Sigma}$. De plus, un morphisme dans l'espace tout à gauche est une injection fermée si et seulement si le morphisme image dans l'espace tout à droite l'est. Ceci est non trivial seulement s'il y a des $\ell \notin \Sigma$ non génériques (car alors $\pi_\ell(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)})$ est réductible, cf. Remarque 2.3(ii)) et découle du fait que $\widehat{H}^1_{E,\Sigma}$ ne contient pas de sous-espace de dimension finie stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ (rappelons que dans ce cas $\pi_\ell(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)})$ a un unique quotient strict qui est de dimension 1). Ce dernier énoncé se déduit du lemme d'Ihara.

### 4.3. Déformations sur l'algèbre de Hecke

On fixe ici une représentation $k_E$-linéaire continue impaire absolument irréductible $\overline{\rho}$ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ telle que $\overline{\rho}_p = \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ vérifie l'hypothèse (3). On fixe un ensemble fini $\Sigma$ de nombres premiers contenant $p$ et les places où $\overline{\rho}$ est ramifiée. On *suppose* de plus que $\overline{\rho}$ est modulaire (sans utiliser la preuve de la conjecture de Serre).

Pour $K_\Sigma$ sous-groupe ouvert compact de $\prod_{\ell\in\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$, on note :

$$\mathbb{T}\Big(K_\Sigma\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\Big)_{\overline{\rho}}$$

le complété de $\mathbb{T}\big(K_\Sigma\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\big)$ par rapport à l'idéal engendré par $\varpi_E$, $T_\ell - [\mathrm{trace}(\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_\ell))]$ et $S_\ell - \ell^{-1}[\det(\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_\ell))]$ pour $\ell\notin\Sigma$ où $[\cdot]$ désigne le représentant multiplicatif dans $\mathcal{O}_E$. On pose :

$$\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}} \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{K_\Sigma}\mathbb{T}\Big(K_\Sigma\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)\Big)_{\overline{\rho}}.$$

C'est une $\mathcal{O}_E$-algèbre plate locale noethérienne complète réduite de corps résiduel $k_E$ qui est un facteur direct de $\mathbb{T}_\Sigma$. On déduit de la modularité de $\overline{\rho}$ que $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}\neq 0$.

Comme $\overline{\rho}$ est absolument irréductible, pour chaque sous-groupe ouvert compact $K_\Sigma$ de $\prod_{\ell\in\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ tel que $\mathbb{T}\big(K_\Sigma\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\big)_{\overline{\rho}}\neq 0$ il existe par un résultat de Carayol ([11, Th. 3]) une unique représentation continue linéaire $\rho(K_\Sigma)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur un $\mathbb{T}\big(K_\Sigma\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\big)_{\overline{\rho}}$-module libre de rang 2 non ramifiée en dehors de $\Sigma$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\mathrm{trace}\big(\rho(K_\Sigma)(\mathrm{Frob}_\ell)\big) & = & T_\ell\\ \det\big(\rho(K_\Sigma)(\mathrm{Frob}_\ell)\big) & = & \ell S_\ell\end{array}\right. \qquad \text{pour } \ell\notin\Sigma.$$

On pose $\rho_\Sigma \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{K_\Sigma}\rho(K_\Sigma)$ : c'est une déformation de $\overline{\rho}$ sur la $\mathcal{O}_E$-algèbre locale noethérienne complète $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$ de corps résiduel $k_E$.

*Remarque 4.3.* — En utilisant que tout système de valeurs propres de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ correspond (par spécialisation de $\rho_\Sigma$) à une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ non ramifiée en dehors de $\Sigma$ dont le conducteur aux places de $\Sigma\backslash\{p\}$ est *majoré* (par une borne ne dépendant que de $\overline{\rho}$ et $\Sigma$), on voit qu'il existe un sous-groupe ouvert compact $K_\Sigma^p$ (suffisamment petit) de $\prod_{\ell\in\Sigma\backslash\{p\}}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ tel que $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{K_p}\mathbb{T}\big(K_\Sigma^p K_p\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\big)_{\overline{\rho}}$, la limite projective étant prise sur les sous-groupes ouverts compacts $K_p$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

En restreignant $\rho_\Sigma$ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, on déduit de la propriété universelle de $R(\overline{\rho}_p)$ (cf. §3.2) un morphisme canonique de $\mathcal{O}_E$-algèbres $R(\overline{\rho}_p)\to\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$. On va associer à $\rho_\Sigma$ une déformation de $\overline{\pi}_p$ sur $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$ en utilisant le Corollaire 3.5. Mais pour cela, il faut savoir que le morphisme $R(\overline{\rho}_p)\to\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$ se factorise par le quotient $R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}}$ de $R(\overline{\rho}_p)$ (cf. (4)), ce qui fait l'objet du reste de cette partie.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal classique de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ (cf. §4.2), les théorèmes de comparaison ([20], [36], [42]) entraînent alors que la représentation :

$$\rho_\Sigma|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \otimes_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}} \big(\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]/\mathfrak{p}\big) \tag{9}$$

est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate distincts. On dit qu'un idéal maximal $\mathfrak{p}$ est classique *cristallin* s'il est classique et si de plus la représentation en (9) est cristalline. De manière équivalente le système de valeurs propres $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}} \to \mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]/\mathfrak{p}$ provient d'une forme modulaire parabolique propre de poids $\geq 2$ et de niveau premier à $p$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des idéaux maximaux classiques cristallins de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$.

On note dans la suite $\mathfrak{p}$ quand on devrait noter $\mathfrak{p} \cap \mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$. Si $M$ est un $\mathbb{T}_\Sigma$-module, on note $M_{\overline{\rho}} \overset{\text{déf}}{=} M \otimes_{\mathbb{T}_\Sigma} \mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$ qui est un facteur direct de $M$. Si $M$ est un $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$-module, on note $M[\mathfrak{p}] \subseteq M$ le noyau de tous les opérateurs dans $\mathfrak{p}$. Le théorème qui suit est essentiellement dû à Katz :

Théorème 4.4 ([19]). — *On a $\cap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}}\mathfrak{p} = 0$, autrement dit l'ensemble des idéaux maximaux classiques cristallins est dense dans $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$ pour la topologie de Zariski.*

*Démonstration.* — Donnons les grandes lignes de la preuve en suivant [19, §5.4]. Le $\mathcal{O}_E$-module $\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma,\overline{\rho}}$ est un facteur direct de $\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma}$ sur lequel $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$ agit fidèlement (car $\mathbb{T}_\Sigma$ agit fidèlement sur $\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma}$). Il suffit donc de montrer que tout élément $t \in \cap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}}\mathfrak{p}$ agit par 0 sur $\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}} = \widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma,\overline{\rho}} \otimes_{\mathcal{O}_E} E$.

(i) Montrons d'abord que, pour $K^p_\Sigma$ sous-groupe ouvert compact suffisamment petit de $\prod_{\ell\in\Sigma\setminus\{p\}}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$, la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $\widehat{H}^1\big(K^p_\Sigma\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\big)_{E,\overline{\rho}}|_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}$ est un facteur direct topologique de $\mathcal{C}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p),E)^r$ (pour un certain entier $r \geq 0$ dépendant de $K^p_\Sigma$) où $\mathcal{C}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p),E)$ est la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation des fonctions continues de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ dans $E$. Pour alléger les notations, on n'écrit plus le facteur $\prod_{\ell\notin\Sigma}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ dans la suite de cette preuve. Pour tout $n \geq 1$, $\widehat{H}^1(K^p_\Sigma)_{\mathcal{O}_E,\overline{\rho}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/\varpi_E^n$ est une représentation lisse admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dont la restriction à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ est *injective* dans la catégorie abélienne des représentations lisses admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur des $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n$-modules (pour $K^p_\Sigma$ suffisamment petit). Cela vient du fait que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big(\cdot,\widehat{H}^1(K^p_\Sigma)_{\mathcal{O}_E,\overline{\rho}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/\varpi_E^n\big)$ est *exact* car la localisation en $\overline{\rho}$ et l'irréductibilité de $\overline{\rho}$ concentrent la cohomologie sur sa partie « non Eisenstein » et tuent les éventuels défauts d'exactitude de ce foncteur (voir [19, Prop. 5.3.15] pour des détails). Le dual $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big(\widehat{H}^1(K^p_\Sigma)_{\mathcal{O}_E,\overline{\rho}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/\varpi_E^n, \mathcal{O}_E/\varpi_E^n\big)$ est donc un objet *projectif* dans la catégorie des modules à gauche de type fini sur l'algèbre d'Iwasawa (non commutative) $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]$ (duale des fonctions continues de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ dans $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n$). En passant à la limite projective sur $n$, on en déduit que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big(\widehat{H}^1(K^p_\Sigma)_{\mathcal{O}_E,\overline{\rho}},\mathcal{O}_E\big)$ est aussi (pour $K^p_\Sigma$ suffisamment petit) un objet projectif dans la catégorie des modules à gauche de type fini sur $\mathcal{O}_E[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]$. C'est donc un facteur direct d'un module libre de type fini et on en déduit le résultat en redualisant et en inversant $p$.

(ii) La théorie de Mahler nous dit que les fonctions *polynomiales* de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ dans $E$ sont denses dans les fonctions continues $\mathcal{C}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p), E)$. On en déduit que les vecteurs de $\mathcal{C}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p), E)^r$ sur lesquels $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ agit par une représentation *algébrique* de $\mathrm{GL}_2$ sont denses dans $\mathcal{C}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p), E)^r$. Comme $\widehat{H}^1(K^p_\Sigma)_{E,\overline{\rho}}$ est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-facteur direct topologique de $\mathcal{C}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p), E)^r$ (pour $K^p_\Sigma$ suffisamment petit), on en déduit la même assertion pour $\widehat{H}^1(K^p_\Sigma)_{E,\overline{\rho}}$. En passant à la limite inductive sur $K^p_\Sigma$, on obtient que les vecteurs de $\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}$ sur lesquels $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ agit par une représentation algébrique de $\mathrm{GL}_2$ sont denses dans $\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}$.

(iii) L'isomorphisme (6) entraîne que la sous-représentation $(\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}})^{\mathrm{alg}}$ des vecteurs localement algébriques de $\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}$ est contenue dans $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}]$ où la somme directe est prise sur les idéaux maximaux classiques de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$. La sous-représentation de $(\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}})^{\mathrm{alg}}$ (ou de $\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}$) engendrée par les vecteurs sur lesquels $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *tout entier* agit par une représentation algébrique est alors contenue dans $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}} \widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}]$. Cela résulte de (6) et du fait que, pour toute forme modulaire parabolique propre $f$ de poids $k \geq 2$, la représentation lisse $\pi_p(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)})$ contient un vecteur *fixe* sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ si et seulement si $\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est cristalline (voir §5.1 pour $\pi_p(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)})$). Comme $t \in \cap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}}\mathfrak{p}$, $t$ annule $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}} \widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}]$ et donc aussi cette sous-représentation. Or par (ii) elle contient un sous-espace dense dans $\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}$. Par continuité, $t$ agit donc par 0 sur $\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}$, d'où le résultat. □

On en déduit immédiatement avec (4) :

Corollaire 4.5. — *Le morphisme $R(\overline{\rho}_p) \to \mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$ se factorise en un morphisme $R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}} \to \mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$.*

En particulier, par le Corollaire 3.5 appliqué à $T = \mathrm{Image}(R(\overline{\rho}_p)^{\mathrm{cris}} \to \mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}})$ puis extension des scalaires, il correspond à $\rho_\Sigma|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ une déformation $\pi_\Sigma$ de $\overline{\pi}_p$ sur $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$.

### 4.4. Un argument de densité

On garde les notations du §4.3 et on définit le $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$-module :

$$X_{\mathcal{O}_E} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}\big(\rho_\Sigma \otimes_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}} \pi_\Sigma, \widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma,\overline{\rho}}\big)$$

des homomorphismes $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$-linéaires, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariants et *continus*, où $\rho_\Sigma \otimes_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}} \pi_\Sigma$ est muni de la topologie $\mathfrak{m}$-adique ($\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$) et où $\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma,\overline{\rho}}$ est muni de la topologie induite par celle de $\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E}$ (avec les notations du §4.1(iii), on a $X_E = X_{\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} E$). La condition de continuité s'explicite comme suit :

$$\text{(10)} \quad \forall\ f \in X_{\mathcal{O}_E},\ \forall\ x \in \rho_\Sigma \otimes_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}} \pi_\Sigma \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \exists\ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$
$$\text{tq } f(\lambda x) \in \varpi_E^n \widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma,\overline{\rho}}\ \forall\ \lambda \in \mathfrak{m}^m.$$

Le lemme suivant rassemble quelques propriétés de $X_{\mathcal{O}_E}$ (voir [19, Th. 6.3.12]).

Lemme 4.6. — *(i) On a* $X_{\mathcal{O}_E} = \varinjlim_{K_\Sigma^p} X_{\mathcal{O}_E}^{K_\Sigma^p}$ *où la limite inductive est prise sur les sous-groupes ouverts compacts* $K_\Sigma^p$ *de* $\prod_{\ell\in\Sigma\setminus\{p\}} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$*. En particulier, l'action de* $\prod_{\ell\in\Sigma\setminus\{p\}} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ *sur* $X_{\mathcal{O}_E}$ *est lisse.*
*(ii) Le* $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$*-module* $X_{\mathcal{O}_E}^{K_\Sigma^p}$ *est un* $\mathcal{O}_E$*-module sans torsion séparé complet pour la topologie* $\varpi_E$*-adique tel que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big(X_{\mathcal{O}_E}^{K_\Sigma^p}, \mathcal{O}_E\big)$ *est un* $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}$*-module de type fini.*
*(iii) Il existe* $K_\Sigma^p$ *suffisamment petit tel que, si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal maximal de* $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$*, on a* $X_{\mathcal{O}_E}[\mathfrak{p}] \neq 0$ *si et seulement si* $X_{\mathcal{O}_E}^{K_\Sigma^p}[\mathfrak{p}] \neq 0$*.*

La preuve de (i) découle essentiellement de la condition de continuité (10), celle de (ii) du simple fait que l'on y a borné le niveau hors $p$ et celle de (iii) découle essentiellement de la Remarque 4.3.

La proposition qui suit, basée sur un argument de densité, est au coeur de la preuve du Théorème 2.1 :

Proposition 4.7. — *Supposons que l'on a* $X_{\mathcal{O}_E}[\mathfrak{p}] \neq 0$ *pour un sous-ensemble d'idéaux maximaux* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ *qui est dense pour la topologie de Zariski, alors on a* $X_{\mathcal{O}_E}[\mathfrak{p}] \neq 0$ *pour tous les idéaux maximaux* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$*.*

*Démonstration.* — En prenant $K_\Sigma^p$ comme dans le Lemme 4.6(iii), il suffit de montrer que $X_{\mathcal{O}_E}^{K_\Sigma^p}[\mathfrak{p}] \otimes_{\mathcal{O}_E} E \neq 0$ pour tous les idéaux maximaux $\mathfrak{p}$ si et seulement si $X_{\mathcal{O}_E}^{K_\Sigma^p}[\mathfrak{p}] \otimes_{\mathcal{O}_E} E \neq 0$ pour un sous-ensemble $\mathcal{E}$ d'idéaux maximaux dense pour la topologie de Zariski. Un peu d'algèbre commutative donne :

$$\big(\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}/\mathfrak{p}\big) \otimes_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big(X_{\mathcal{O}_E}^{K_\Sigma^p}, \mathcal{O}_E\big) \otimes_{\mathcal{O}_E} E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big(X_{\mathcal{O}_E}^{K_\Sigma^p}[\mathfrak{p}], \mathcal{O}_E\big) \otimes_{\mathcal{O}_E} E$$

(voir [19, Lem. C.14]), et il suffit de montrer que le membre de gauche est non nul pour tout $\mathfrak{p}$ si et seulement s'il est non nul pour tout $\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{E}$. Soit $M$ un $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$-module de type fini tel que $M/\mathfrak{p}M \neq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{E}$. Comme $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]/\mathfrak{p}$ est un corps, $M/\mathfrak{p}M$ est en particulier un $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]/\mathfrak{p}$-module fidèle. Si $t \in \mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ agit par 0 sur $M$, il agit aussi par 0 sur $M/\mathfrak{p}M$ pour tout $\mathfrak{p}$, et comme $M/\mathfrak{p}M \neq 0$ si $\mathfrak{p} \in \mathcal{E}$ on a donc $t \in \mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{E}$, i.e. $t \in \cap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{E}}\mathfrak{p} = 0$. Donc $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ agit fidèlement sur $M$. Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un idéal maximal quelconque de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ et supposons $M/\mathfrak{p}M = 0$, i.e. $M = \mathfrak{p}M$. Comme $M$ est de type fini sur l'anneau $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$, le lemme de Nakayama ([34, Th. 2.2]) donne un $t \in \mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ non nul tel que $tM = 0$, ce qui est impossible par ce qui précède. On en déduit $M/\mathfrak{p}M \neq 0$ pour tout $\mathfrak{p}$. En appliquant ce résultat à $M = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}\big(X_{\mathcal{O}_E}^{K_\Sigma^p}, \mathcal{O}_E\big) \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ qui est de type fini par le Lemme 4.6(ii), on en déduit l'énoncé. □

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal quelconque de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$, on note :

$$\begin{aligned}\rho(\mathfrak{p}) &\stackrel{\text{déf}}{=} \rho_\Sigma \otimes_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}} \big(\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]/\mathfrak{p}\big)\\ B\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big) &\stackrel{\text{déf}}{=} \pi_\Sigma \otimes_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}} \big(\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]/\mathfrak{p}\big)\end{aligned}$$

et $B\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big)$ est le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire correspondant à $\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ par la correspondance locale $p$-adique.

Proposition 4.8. — *On a $X_{\mathcal{O}_E}[\mathfrak{p}] \neq 0$ pour tout idéal maximal classique cristallin $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$.*

*Démonstration.* — Nous donnons la preuve pour $p > 2$ (un argument supplémentaire de densité permet de se passer de cette hypothèse, voir [19, Lem. 5.4.9]). Soit $\mathfrak{p}$ un tel idéal maximal et $E'$ une extension finie de $E$ telle que $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]/\mathfrak{p} \subseteq E'$. L'isomorphisme (6) (appliqué sur $E'$) entraîne que $\widehat{H}^1_{E',\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}]$ contient le produit tensoriel de $\rho(\mathfrak{p})$ par une représentation localement algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Comme $\rho(\mathfrak{p})$ est cristalline, un résultat purement local nous dit que cette représentation localement algébrique possède au plus une *unique* classe d'équivalence de normes invariantes (voir [1, §2.3]), qui est donc forcément celle de la norme induite par $\widehat{H}^1_{\mathcal{O}'_E,\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}]$ dans $\widehat{H}^1_{E',\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}]$ (i.e. la norme pour laquelle l'intersection avec $\widehat{H}^1_{\mathcal{O}'_E,\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}]$ est la boule unité). De plus, le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire obtenu par complétion est soit $B\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big)$ si $\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est absolument irréductible ([2], [37], on utilise ici $p > 2$), soit une sous-représentation fermée (stricte) de $B\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big)$ si $\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est réductible sur $E'$ ([6, §2.2]). Dans le cas irréductible, il est déjà clair que l'on a un morphisme non nul équivariant $\rho(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}/\mathfrak{p}} B\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big) \to \widehat{H}^1_{E',\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}]$, qui est même une injection fermée. Dans le cas réductible, c'est encore vrai mais c'est plus subtil ([6, Th. 1.1.2]). Il suit de la définition de $X_{\mathcal{O}_E}$ que :

$$(11)\quad X_{\mathcal{O}_E}[\mathfrak{p}] \otimes_{\mathcal{O}_E} E' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}/\mathfrak{p}[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}\Big(\rho(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}/\mathfrak{p}} B\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big), \widehat{H}^1_{E',\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}]\Big),$$

et comme le membre de droite est non nul par ce qui précède, on a $X_{\mathcal{O}_E}[\mathfrak{p}] \otimes_{\mathcal{O}_E} E \neq 0$ pour tout $\mathfrak{p}$ classique cristallin. $\square$

*Remarque 4.9.* — Rappelons que c'est précisément l'unicité de la classe d'équivalence des normes invariantes sur les représentations localement algébriques "cristallines" de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui a permis de construire les premiers exemples de $B(\rho_p)$ par complétion (cf. [4, Ex. 1.3.2]). Par ailleurs, cette unicité, qui est un ingrédient crucial dans la preuve de la Proposition 4.8, *n'est plus vraie* lorsque $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est remplacé par $\mathrm{GL}_2$ d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Cela rend pour l'instant très délicate une éventuelle adaptation de la preuve actuelle du Théorème 2.1 à un autre cadre que $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$, par exemple celui des formes modulaires de Hilbert (lorsque $p$ n'est pas totalement décomposé dans le corps totalement réel).

Corollaire 4.10. — *Soit $\rho$ promodulaire comme dans le Théorème 2.1 et $\Sigma$ comme dans la définition 4.2. Alors il existe un morphisme non nul continu* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariant* $\rho \otimes_E B(\rho_p) \longrightarrow \widehat{H}^1_{E,\Sigma}$.

*Démonstration.* — Par hypothèse, l'idéal de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ engendré par $T_\ell - \mathrm{trace}(\rho(\mathrm{Frob}_\ell))$ et $S_\ell - \ell^{-1}\det(\rho(\mathrm{Frob}_\ell))$ pour $\ell \notin \Sigma$ est un idéal maximal $\mathfrak{p}_\rho$. Comme les $\mathfrak{p}$ classiques cristallins forment un sous-ensemble dense pour la topologie de Zariski par le Théorème 4.4, la Proposition 4.7 avec la Proposition 4.8 montrent en particulier que l'on a $X_{\mathcal{O}_E}[\mathfrak{p}_\rho] \neq 0$ et le résultat découle de (11) (avec $E' = E$). □

Par (8), cela donne la première assertion du Théorème 2.1. Il reste à vérifier que tout morphisme non nul continu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant $\rho \otimes_E B(\rho_p) \longrightarrow \widehat{H}^1_{E,\Sigma}$ est une injection fermée, au moins sous les conditions du Théorème 2.1. Lorsque $\rho_p$ est absolument irréductible, alors la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $B(\rho_p)$ est (topologiquement) irréductible et admissible, et le résultat est automatique. Lorsque $\rho_p$ est réductible indécomposable, alors $B(\rho_p)$ est aussi réductible indécomposable, et il faut montrer qu'un morphisme non nul ne peut se factoriser par un quotient strict de $B(\rho_p)$. Le cas $\rho_p$ cristallin à poids de Hodge-Tate distincts est déjà dans [6, Th. 5.7.2], voir [19, Prop. 6.2.2] pour le cas général.

## 5. PREUVE DES THÉORÈMES 2.9, 2.11 ET 2.12

### 5.1. Compatibilité Langlands $p$-adique/Langlands classique

On commence par préciser ce que l'on entend par compatibilité $p$-adique/classique.

Soit $\rho_p$ une représentation $E$-linéaire continue de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Lorsque $\rho_p$ est potentiellement semi-stable, on peut lui associer une représentation de Weil-Deligne qui consiste essentiellement à combiner l'action du Frobenius et l'action restante de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur le $(\varphi, N)$-module filtré de Fontaine associé à $\rho_p$ en une action du groupe de Weil-Deligne (voir [22]). À cette représentation de Weil-Deligne (une fois $F$-semi-simplifiée), on peut à son tour lui associer par la correspondance de Langlands locale classique normalisée comme dans la Remarque 2.3(i),(ii) une représentation lisse admissible $\pi_p(\rho_p)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $E$ qui est irréductible sauf dans les cas non génériques où elle est, par définition, de longueur 2 avec un quotient de dimension 1.

Se pose alors la question (lorsque $\rho_p$ est potentiellement semi-stable) de relier la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation lisse $\pi_p(\rho_p)$ au $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(\rho_p)$ du §3. Cette question est au coeur du programme de Langlands $p$-adique (et en est même à l'origine, voir [4, §1.3]). La réponse est donnée par l'énoncé ci-dessous, version “explicite” du Théorème 2.9 :

Théorème 5.1. — *Supposons $\rho_p$ potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate distincts $a < b$. On a un isomorphisme de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-représentations :*

$$\det{}^{a+1} \otimes_E \mathrm{Sym}^{b-a-1} E^2 \otimes_E \pi_p(\rho_p) \xrightarrow{\sim} B(\rho_p)^{\mathrm{alg}} \tag{12}$$

*où* $B(\rho_p)^{\mathrm{alg}}$ *est la sous-*$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-représentation de* $B(\rho_p)$ *formée des vecteurs localement algébriques (voir §4.1).*

*Démonstration.* — Donnons les grandes lignes de la preuve en suivant [19, §7.4]. Lorsque $\rho_p$ devient semi-stable en restriction au groupe de Galois d'une extension abélienne de $\mathbb{Q}_p$, la preuve de ce résultat est purement locale (en particulier n'utilise pas le Théorème 2.1) et est due à Colmez ([15, Th. VI.6.50], attention à la normalisation ici, cf. Remarque 3.1). On peut donc supposer que $\rho_p$ est potentiellement cristalline et que sa représentation de Weil-Deligne est irréductible, ou, ce qui revient au même, que $\pi_p(\rho_p)$ est supercuspidale. Un autre résultat de Colmez ([15, Th. VI.6.42]) assure alors que la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $B(\rho_p)^{\mathrm{alg}}$ ne dépend pas de la filtration de Hodge sur le $(\varphi, N)$-module filtré de Fontaine, i.e. dépend *seulement* de $\pi_p(\rho_p)$ et des poids de Hodge-Tate $(a, b)$. Il suffit donc de trouver *une* représentation potentiellement cristalline $\rho'_p$ à poids de Hodge-Tate $(a, b)$ telle que $\pi_p(\rho'_p) \simeq \pi_p(\rho_p)$ pour laquelle on sache démontrer l'isomorphisme (12) (puisque $B(\rho'_p)^{\mathrm{alg}} = B(\rho_p)^{\mathrm{alg}}$). En fait, on va avoir besoin d'autoriser $\pi_p(\rho'_p) \simeq \pi_p(\rho_p) \otimes \eta \circ \det$ où $\eta : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ est un caractère non ramifié, ce qui est inoffensif car cela revient juste à tensoriser (12) par le caractère $\eta$. On donne ci-dessous les étapes pour trouver une telle représentation $\rho'_p$ par voie globale.

(i) Par un résultat de Henniart ([25]) il existe une unique représentation lisse irréductible (de dimension finie) $\sigma$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur $E$ qui apparaît dans les supercuspidales $\pi_p(\rho_p) \otimes \eta \circ \det$ pour tous les $\eta$ non ramifiés (et qui y apparaît alors avec multiplicité 1) et n'apparaît dans aucune autre représentation lisse admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\sigma^{\mathrm{alg}} \overset{\text{déf}}{=} \det^{a+1} \otimes_E \mathrm{Sym}^{b-a-1} E^2 \otimes_E \sigma$ : c'est une représentation localement algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Il n'est pas difficile (en induisant un Grössencharacter convenable par exemple) de trouver une représentation $k_E$-linéaire continue absolument irréductible modulaire $\overline{\rho}$ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ telle que $\overline{\rho}_p = \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est absolument irréductible (donc vérifie en particulier l'hypothèse (3)) et telle qu'un (au moins) des facteurs de Jordan-Hölder de $\overline{\sigma^{\mathrm{alg}}}$ est un *poids de Serre* de $\overline{\rho}_p|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})}$, i.e. apparaît dans le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-socle de la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation irréductible $\overline{\pi}_p$ correspondant à $\overline{\rho}_p$. On note $\sigma_0$ un tel facteur de Jordan-Hölder.

(ii) Soit $\Sigma$ un ensemble fini de nombres premiers contenant $p$ et les places où $\overline{\rho}$ est ramifiée. En réduisant modulo $\varpi_E$ une injection fermée comme dans le Corollaire 4.10 pour une représentation $\rho$ associée à un idéal maximal quelconque de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p] \neq 0$, on en déduit en particulier $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\overline{\pi}_p, \widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma,\overline{\rho}} \otimes_{\mathcal{O}_E} k_E) \neq 0$ et donc *a fortiori* :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big(\sigma_0, \widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma,\overline{\rho}} \otimes_{\mathcal{O}_E} k_E|_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big) \neq 0.$$

En utilisant l'exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big(\cdot, \widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E,\Sigma,\overline{\rho}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/\varpi_E^n\big)$ pour $n \geq 1$ (voir (i) dans la preuve du Théorème 4.4), on en déduit après passage à la limite projective sur $n$ :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big(\sigma^{\mathrm{alg}}, \widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}|_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big) \neq 0.$$

Notons que, $\sigma^{\mathrm{alg}}$ étant localement algébrique, on a donc :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big(\sigma^{\mathrm{alg}}, \widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}\big) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big(\sigma^{\mathrm{alg}}, (\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}})^{\mathrm{alg}}\big) \neq 0 \tag{13}$$

et que, $\sigma^{\mathrm{alg}}$ étant irréductible, tout morphisme non nul de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}(\sigma^{\mathrm{alg}}, (\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}})^{\mathrm{alg}})$ est une injection.

(iii) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal classique de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ tel que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big(\sigma^{\mathrm{alg}}, (\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}})^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{p}]\big) \neq 0$$

(il en existe par (13) et (6)). En se souvenant que $\sigma^{\mathrm{alg}} = \det^{a+1} \otimes_E \mathrm{Sym}^{b-a-1}E^2 \otimes_E \sigma$, on a donc par (6) :

$$(\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}})^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{p}] \simeq \rho(\mathfrak{p}) \otimes_E \det{}^{a+1} \otimes_E \mathrm{Sym}^{b-a-1}E^2 \otimes_E \pi_p\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big) \otimes_E \otimes'_{\ell\in\Sigma\backslash\{p\}}\pi_\ell\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}\big) \tag{14}$$

où $\rho(\mathfrak{p})$ (cf. §4.4) est à poids de Hodge-Tate $(a,b)$ et où $\pi_p\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big)$ est irréductible et doit contenir $\sigma$. Par la propriété de $\sigma$ rappelée en (i), on en déduit $\pi_p\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big) \simeq \pi_p(\rho_p) \otimes \eta \circ \det$ pour un caractère $\eta$ non ramifié.

(iv) Par le Corollaire 4.10 appliqué à $\rho = \rho(\mathfrak{p})$, on a une injection $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\rho(\mathfrak{p}) \otimes_E B\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big)^{\mathrm{alg}} \hookrightarrow (\widehat{H}^1_{E,\Sigma}[\mathfrak{p}])^{\mathrm{alg}} = (\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}})^{\mathrm{alg}}[\mathfrak{p}].$$

Par [15, Th. VI.6.18] et [15, Th. VI.5.7], la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation localement algébrique $B\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big)^{\mathrm{alg}}$ est non nulle et irréductible. En utilisant (14), on voit qu'elle doit coïncider avec $\det^{a+1} \otimes_E \mathrm{Sym}^{b-a-1}E^2 \otimes_E \pi_p\big(\rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big)$. On a bien obtenu (par voie globale) l'isomorphisme (12) pour $\rho'_p = \rho(\mathfrak{p})|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ satisfaisant les conditions demandées, ce qui achève la preuve. □

### 5.2. Conjectures de Fontaine-Mazur et de Kisin

Bien que différentes dans les détails, les preuves de ces deux conjectures sont basées sur le même principe. Soit $\rho$ comme dans le Théorème 2.4, alors on sait que $\rho$ est promodulaire et, par le Théorème 2.1, on sait aussi que $\widehat{H}^1_E$ contient alors $B(\rho_p)$. Pour montrer que "$\rho_p$ est potentiellement semi-stable" est équivalent à "$\rho$ provient d'une forme modulaire propre classique", il suffit de trouver une même façon de caractériser ces deux propriétés de $\rho$. De même pour montrer que "$\rho_p$ est trianguline" est équivalent à "$\rho$ provient d'une forme modulaire propre surconvergente". Cette caractérisation est dans chaque cas la présence dans $B(\rho_p)$ d'un certain sous-espace non nul : les vecteurs localement algébriques $B(\rho_p)^{\mathrm{alg}}$ dans le cas classique, les vecteurs localement analytiques de pente finie $B(\rho_p)^{\mathrm{an,pf}}$ dans le cas surconvergent. Un premier résultat purement local de théorie des représentations (indépendant de la cohomologie) assure d'abord que la non nullité de ce sous-espace $B(\rho_p)^{\mathrm{alg}}$ (resp. $B(\rho_p)^{\mathrm{an,pf}}$) est *équivalente* à ce que $\rho_p$ soit potentiellement semi-stable (resp. trianguline) (en fait, une implication est suffisante, cf. ci-dessous). Un deuxième résultat, purement global lui, assure que l'existence de vecteurs localement algébriques (resp. localement analytiques de pente finie) dans $\widehat{H}^1_E$ *vient* précisément de celle des formes modulaires propres classiques (resp. surconvergentes). Ces deux résultats mis bout à bout donnent dans chaque cas la conjecture.

Rentrons un peu plus dans les détails en commençant par la conjecture de Fontaine-Mazur (Conjecture 2.5).

Supposons $p > 2$ et soit $\rho$ une représentation $E$-linéaire continue impaire de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui est non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places, potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate distincts en $p$, et qui vérifie les hypothèses additionnelles :
(i) $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1}))}$ est absolument irréductible
(ii) $\rho_p$ n'est pas scindée
(iii) $\overline{\rho}_p \ncong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère ($*$ nul ou non)
(iv) $\overline{\rho}_p \ncong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \overline{\varepsilon} \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère ($*$ nul ou non).

Par le Théorème 2.4 et le Théorème 2.1, $\rho$ est promodulaire et on a une injection fermée $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $B(\rho_p) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\rho, \widehat{H}^1_E)$. Comme $\rho_p$ est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate distincts, on a $B(\rho_p)^{\mathrm{alg}} \neq 0$ (c'est le résultat local de théorie des représentations mentionné ci-dessus). Notons que l'on n'utilise pas ici le Théorème 5.1 mais seulement [15, Th. VI.6.18]. On a donc $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\rho, (\widehat{H}^1_E)^{\mathrm{alg}}) \neq 0$. Par le Théorème 4.1 (le résultat global mentionné ci-dessus), on voit finalement que $\rho$ provient à torsion près par un caractère (que l'on peut prendre une puissance entière de $\varepsilon$) d'une représentation $\rho_f$ attachée à une forme modulaire parabolique propre $f$ de poids $\geq 2$.

Kisin, en utilisant les Théorèmes 5.1 et 2.10, a donné dans [30] une autre preuve de la modularité de $\rho$ lorsque l'on remplace les hypothèses (ii), (iii) et (iv) ci-dessus par seulement l'hypothèse :
(ii)' $\overline{\rho}_p \ncong \left(\begin{smallmatrix} \overline{\varepsilon} & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère ($*$ nul ou non).

La preuve de Kisin est indépendante du Théorème 2.1, en particulier les cas connus du Théorème 5.1 avant que le Théorème 2.1 soit disponible (c'est-à-dire les cas où $\pi_p(\rho_p)$ est une série principale ou spéciale, cf. le début de la preuve du Théorème 5.1) lui avaient permis de démontrer les cas correspondants de la conjecture de Fontaine-Mazur (cf. *loc. cit.*). En rassemblant les cas démontrés par Emerton et Kisin, on obtient le Théorème 2.11 (en notant que, pour $p = 3$, les hypothèses (iv) et (ii)' sont les mêmes puisque $\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}^{-1}$).

Indiquons maintenant les grandes lignes de la preuve de (nombreux cas de) la conjecture de Kisin (Conjecture 2.6).

D'abord, une définition préliminaire. Soit $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ le tore diagonal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p) \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on pose :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ &\overset{\text{déf}}{=} \left\{t \in \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p) \ \mid \ t\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)t^{-1} \subseteq \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \ a, d \in \mathbb{Q}_p^\times, \ ad^{-1} \in \mathbb{Z}_p\right\}. \end{aligned}$$

Si $V$ est un $E$-espace vectoriel muni d'une action linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on définit un opérateur de Hecke $\pi_t : V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)} \to V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$ pour chaque $t \in \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$ comme suit :

$$\pi_t v \overset{\text{déf}}{=} |\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)/t\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)t^{-1}|^{-1} \sum_{n \in \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)/t\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)t^{-1}} (nt)v \tag{15}$$

(en particulier si $t \in \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)$, on a $\pi_t v = tv$). Si $t_1, t_2 \in \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$, on vérifie que $\pi_{t_1 t_2} v = \pi_{t_1}\pi_{t_2} v$. Si $v \in V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$ est un vecteur non nul sur lequel l'action de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$ en (15) est la multiplication par un caractère de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$ à valeurs dans $E^\times$, ce caractère s'étend de manière unique et évidente à $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$. On note $V^{\mathrm{pf}}$ le sous-$E$-espace vectoriel de $V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$ engendré $E$-linéairement par les vecteurs non nuls sur lesquels $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$ agit par un caractère à valeurs dans $E^\times$, c'est donc une représentation de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$. Lorsque $V$ est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Casselman a montré que la représentation $V^{\mathrm{pf}}$ de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à celle donnée par le foncteur de Jacquet usuel de $V$ relativement au sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures ([12, §4]).

Supposons $p > 2$ et soit $\rho$ une représentation $E$-linéaire continue impaire de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui est non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places, trianguline en $p$, et qui vérifie les hypothèses additionnelles :
(i) $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1}))}$ est absolument irréductible
(ii) $\overline{\rho}_p \not\cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère ($*$ nul ou non)
(iii) $\overline{\rho}_p \not\cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \overline{\varepsilon} \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère ($*$ nul ou non).

Par le Théorème 2.4 et le Théorème 2.1(i), $\rho$ est promodulaire et on a un morphisme non nul $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant $B(\rho_p) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\rho, \widehat{H}^1_E)$. Notons $B(\rho_p)^{\mathrm{an}} \subset B(\rho_p)$ le sous-$E$-espace vectoriel des vecteurs localement analytiques, i.e. des vecteurs $v$ tels que l'application "orbite" : $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to B(\rho_p)$, $g \mapsto gv$ est localement analytique.

Comme $\rho_p$ est trianguline, la représentation $B(\rho_p)$ contient des séries principales localement analytiques qui possèdent toujours des vecteurs de pente finie ([18, §6]). On a donc $B(\rho_p)^{\mathrm{an,pf}} \neq 0$ (c'est le résultat local, cf. plus haut) et même un peu plus : lorsque $B(\rho_p)$ est réductible, *chaque* constituant de $B(\rho_p)$ possède des vecteurs localement analytiques de pente finie (ce qui n'est pas le cas avec les vecteurs localement algébriques). On en déduit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\rho, (\widehat{H}^1_E)^{\mathrm{an,pf}}\big) \neq 0$ (avec des notations évidentes) ou encore $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\rho, (\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}_\rho])^{\mathrm{an,pf}}\big) \neq 0$ où $\Sigma$ est comme dans la définition 4.2 et où $\mathfrak{p}_\rho$ est l'idéal maximal de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ associé à $\rho$. Cela implique en particulier $(\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}_\rho])^{\mathrm{an,pf}} \neq 0$. Mais un autre résultat d'Emerton (c'est le résultat global : voir [18, §7.5]) montre que chaque caractère de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ apparaissant dans un espace non nul $(\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}])^{\mathrm{an,pf}}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $\mathbb{T}_{\Sigma,\overline{\rho}}[1/p]$ correspond à un point de la "surface de Hecke" de Coleman-Mazur, c'est-à-dire à une forme modulaire $p$-adique surconvergente parabolique propre de pente finie et de niveau hors $p$ divisible uniquement par les premiers dans $\Sigma\backslash\{p\}$, éventuellement "tordue" par un caractère continu de $\mathbb{Z}_p^\times$. On en déduit le Théorème 2.12 en appliquant ce résultat à un caractère de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ apparaissant dans l'espace non nul $(\widehat{H}^1_{E,\Sigma,\overline{\rho}}[\mathfrak{p}_\rho])^{\mathrm{an,pf}}$.

## RÉFÉRENCES


[1] L. Berger – « La correspondance de Langlands locale $p$-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ », *Séminaire Bourbaki* **1017** (2010).

[2] L. Berger & C. Breuil – « Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ », *Astérisque* **330** (2010), p. 155–211.

[3] G. Boeckle – « Deformation rings for some mod 3 Galois representations of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_3$ », *Astérisque* **330** (2010), p. 529–542.

[4] C. Breuil – « Invariant $\mathcal{L}$ et série spéciale $p$-adique », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.

[5] ______, « Série spéciale $p$-adique et cohomologie étale complétée », *Astérisque* **331** (2010), p. 65–115.

[6] C. Breuil & M. Emerton – « Représentations $p$-adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global », *Astérisque* **331** (2010), p. 255–315.

[7] C. Breuil & A. Mézard – « Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ en $\ell = p$ », *Duke Math. J.* **115** (2002), p. 205–298.

[8] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond & R. Taylor – « On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$ : wild 3-adic exercises », *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 843–939.

[9] F. Calegari – « Even Galois representations and the Fontaine-Mazur conjecture », prépublication (2009).

[10] H. Carayol – « Sur les représentations $\ell$-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **19** (1986), p. 409–468.

[11] ———, « Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet », *Contemp. Math.* **165** (1994), p. 213-235.

[12] W. Casselman – « Introduction to the theory of admissible representations of $p$-adic reductive groups », *disponible à* http ://www.math.ubc.ca/ cass/research/pdf/p-adic-book.pdf (1995).

[13] P. Colmez – « Représentations triangulines de dimension 2 », *Astérisque* **319** (2008), p. 213–258.

[14] ———, « La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ », *Astérisque* **330** (2010), p. 213–262.

[15] ———, « Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $(\varphi, \Gamma)$-modules », *Astérisque* **330** (2010), p. 281–509.

[16] P. Deligne, lettre à Piatetski-Shapiro (1973).

[17] M. Emerton – « On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic eigenforms », *Invent. Math.* **164** (2006), p. 1–84.

[18] ———, « A local-global compatibility conjecture in the $p$-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$ », *Pure and Appl. Math. Quaterly* **2** (2006), p. 1–115.

[19] ———, « Local-global compatibility in the $p$-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$ », prépublication (2010).

[20] G. Faltings – « Almost étale extensions », *Astérisque* **279** (2002), p. 185–270.

[21] J.-M. Fontaine – « Représentations $p$-adiques semi-stables », *Astérisque* **223** (1994), p. 113–184.

[22] ———, « Représentations $\ell$-adiques potentiellement semi-stables », *Astérisque* **223** (1994), p. 321–347.

[23] ———, « Représentations $p$-adiques des corps locaux I », *Progr. Math.* **87** (1990), Birkhäuser Boston, p. 249–309.

[24] J.-M. Fontaine & B. Mazur – « Geometric Galois representations », *Elliptic curves, modular forms & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)* (1995), Int. Press Cambridge, p. 41–78.

[25] G. Henniart – « Sur l'unicité des types pour $\mathrm{GL}_2$ » (appendice à [7]), *Duke Math. J.* **115** (2002), p. 298–305.

[26] C. Khare & J.-P. Wintenberger – « Serre's modularity conjecture I », *Invent. Math.* **178** (2009), p. 485–504.

[27] ———, « Serre's modularity conjecture II », *Invent. Math.* **178** (2009), p. 505–586.

[28] M. Kisin – « Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture », *Invent. Math.* **153** (2003), p. 373–454.

[29] ______, « Potentially semi-stable deformation rings », *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), p. 513–548.

[30] ______, « The Fontaine-Mazur conjecture for $\mathrm{GL}_2$ », *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), p. 641–690.

[31] ______, « Modularity of 2-adic Barsotti-Tate representations », *Invent. Math.* **178** (2009), p. 587–634.

[32] ______, « Deformations of $G_{\mathbb{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ representations », *Astérisque* **330** (2010), p. 513–529.

[33] R. Langlands – « Modular forms and $\ell$-adic representations », *Lecture Notes in Maths* **349** (1973), 361–500.

[34] H. Matsumura – « Commutative ring theory », *Cambridge Studies in Pure Maths* **8** (1989), Cambridge Univ. Press.

[35] B. Mazur – « Deforming Galois representations », *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **16** (1989), Springer New York, p. 385–437.

[36] W. Niziol – « Semi-stable conjecture via K-theory », *Duke Math. J.* **141** (2008), p. 151–178.

[37] V. Paškūnas – « On some crystalline representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ », *Algebra Number Theory* **3** (2009), p. 411–421.

[38] ______, « The image of Colmez's Montréal functor », prépublication (2010).

[39] J.-P. Serre – « Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ », *Duke Math. J.* **54** (1987), p. 179–230.

[40] C. Skinner & A. Wiles – « Nearly ordinary deformations of residually irreducible representations », *Ann. Sci. Fac. Toulouse Math.* **10** (2001), p. 185–215.

[41] R. Taylor & A. Wiles – « Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras », *Ann. of Math.* **141** (1995), p. 453–572.

[42] T. Tsuji – « $p$-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case », *Invent. Math.* **137** (1999), p. 233–411.

[43] A. Wiles – « Modular elliptic curves and Fermat's last theorem », *Ann. of Math.* **141** (1995), p. 443–551.

Christophe BREUIL

Université Paris-Sud et CNRS
Laboratoire de Mathématiques
UMR 8628
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex
*Web* : `www.math.u-psud.fr/~breuil/`