LM 256 - Exercices corrigés

Feuille 2

Exercice 1. 1. Pour parvenir à l'identité demandée, on fait le calcul de $a \wedge (b \wedge c)$ (selon la « règle du gamma » comme je l'ai expliqué en TD) :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(et les calculs sont considérablement réduits si l'on remarque que dans tous les cas, pour passer d'une ligne à la suivante il suffit de permuter les indices dans le sens $1 \to 2 \to 3 \to 1$). On remarque alors qu'en ajoutant et en retranchant $a_1b_1c_1$ à la première ligne du résultat, on peut écrire celle-ci $b_1(a \cdot c) - c_1(a \cdot b)$. De même, la deuxième et la troisième lignes s'écrivent respectivement $b_2(a \cdot c) - c_2(a \cdot b)$ et $b_3(a \cdot c) - c_3(a \cdot b)$. Autrement dit, on a exactement les composantes du vecteur $(a \cdot c)b - (a \cdot b)c$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour la non-associativité de $\wedge$, on a en utilisant cette formule pour tous a, b, c : $a \wedge (b \wedge c) - (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) + c \wedge (a \wedge b)$ (d'après l'anti-commutativité de $\wedge$, $u \wedge v = -v \wedge u$), ce qui vaut donc $(a \cdot c)b - (a \cdot b)c + (c \cdot b)a - (c \cdot a)b = (a \cdot b)c + (c \cdot b)a$. Or pour prouver que $\wedge$ n'est pas associatif, on veut trouver a, b et c tels que cette différence soit non-nulle ; un rapide examen nous incite à prendre $a = b$, par exemple ${}^t(1, 0, 0)$, et c orthogonal à a et b, par exemple ${}^t(0, 1, 0)$. On obtient alors $a \wedge (b \wedge c) - (a \wedge b) \wedge c = c \neq 0$, et l'on en déduit que $\wedge$ n'est pas associatif. On prendra donc garde à ne pas écrire de choses du genre $a \wedge b \wedge c$, qui n'auraient pas un sens précis.

2. On peut pour cette question calculer le déterminant 3×3 $\det[a, b, c]$ selon la règle de Sarrus, mais il y a plus rapide ; si en effet on utilise le développement par rapport à la

première colonne, on a :

$$\begin{aligned}\det[a,b,c] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

en permutant les deux lignes du second déterminant 2×2. Or on remarque que le premier de ces déterminants, $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, n'est autre que la première composante de $b \wedge c = b_2c_3 - b_3c_2$; de même, le second est la seconde composante de $b\wedge c$ et le troisième est la troisième de ces composantes. Autrement dit, $\det[a,b,c] = a_1 \cdot (b \wedge c)_1 + a_2 \cdot (b \wedge c)_2 + a_3 \cdot (b \wedge c)_3$, ce qui est bien égal à $a \cdot (b \wedge c)$, quantité que l'on appelle *produit mixte de* a, b et c. Pour obtenir la seconde égalité, $\det[a,b,c] = (a \wedge b) \cdot c$, il suffit de permuter les colonnes a et c (et multiplier par -1) dans $\det[a,b,c]$ — ou tout simplement dévelloper par rapport à la colonne de droite — et l'on a donc $a \cdot (b \wedge c) = \det[a,b,c] = -\det[c,b,a] = -c\cdot(b\wedge a) = c\cdot(a\wedge b) = (a\wedge b)\cdot c$. Cette formule nous dit donc, étant donnés trois vecteurs, comment échanger produit scalaire et produit vectoriel (sans oublier le re-parenthésage). En somme, il suffit de garder l'ordre d'écriture a, b, c, et d'écrire les produits dans un ordre tel que l'expression obtenue ait un sens (produit vectoriel, puis produit scalaire).

3. La première question nous disait que pour tous u, v, w, on avait $u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$. En posant ici $u = a \wedge b$, $v = c$ et $w = d$, on a : $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = ((a\wedge b)\cdot d)c - ((a\wedge b)\cdot c)d$. Apparaissent donc deux produits mixtes (celui de (a,b,d) et celui de (a,b,c)), et en échangeant produit scalaire et produit vectoriel comme nous l'enseigne la question 2., il vient $(a\wedge b)\wedge(c\wedge d) = (a\cdot(b\wedge d))c - (a\cdot(b\wedge c))d$, ce qui est la première forme du résultat à démontrer. Pour la seconde, on part de $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = -(c \wedge d) \wedge (a \wedge b)$, et l'on procède de même.

Exercice 2. 1. Une des propriétés fondamentales du produit vectoriel de deux vecteurs est d'être orthogonal à ces deux vecteurs. Le plan passant par les points P, Q et R étant engendré par les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ (ou bien $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$, ou encore $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$), leur produit vectoriel sera bien perpendiculaire à ce plan. Or, un calcul direct donne $\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = 5 \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Si l'on note S le point $R + \overrightarrow{PQ}$ (c'est-à-dire le point obtenu en traçant $\overrightarrow{PQ}$ partant de R), on a que l'aire du parallélogramme $PQSR$ (attention à l'ordre des lettres) est le double de celle du triangle PQR. Or l'aire de ce parallélogramme est aussi (c'est une autre propriété du produit vectoriel) égale à la norme $\left\|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\right\|$, soit $5\big((-8)^2 + 3^2 + (-3^2)\big)^{1/2} = 5\sqrt{82}$. L'aire du triangle est donc de $\frac{5}{2}\sqrt{82}$.

3. Supposons, comme c'est le cas ici, que les trois vecteurs sont linéairement indépendants (sans quoi la question est réglée). Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si

leur déterminant est nul ; or d'après l'exercice 1, le déterminant d'un triplet de vecteurs est égal à leur produit mixte, et donc trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul. Une autre manière de l'expliquer est la suivante : le premier vecteur est dans le plan qu'engendrent les deux derniers si et seulement s'il est orthogonal à tout ce qui est orthogonal à ce plan, c'est-à-dire à ces deux derniers vecteurs ; or cet orthogonal est de dimension 1 (car on est dans l'espace à trois dimensions, et cet orthogonal est un supplémentaire du plan en question), et est donc engendré par le produit vectoriel des deux derniers vecteurs. Le premier vecteur est donc dans le plan qu'engendrent les deux derniers si et seulement s'il est orthogonal à leur produit vectoriel, *i.e.* si et seulement si son produit scalaire avec le produit vectoriel des deux autres est nul, ou encore si et seulement si le produit mixte des trois est nul.

Cela dit, le calcul donne $\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ -9 \end{pmatrix}$, puis $\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\cdot c = 0+(-18)\cdot(-9)+(-9)\cdot 18 = 0$.

4. L'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ (qui est une figure géométrique de dimension 3) est simplement la somme des aires des parallélogrammes que sont ses faces. Ces parallélogrammes (au nombre de 6, comme pour le cube qui est un parallélépipède particulier) sont engendrés deux à deux par $\vec{a}$ et $\vec{b}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ et $\vec{a}$ et $\vec{c}$. Leur aire est donc respectivement $\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|$, $\left\|\vec{b}\wedge\vec{c}\right\|$ et $\|\vec{a}\wedge\vec{c}\|$. Or $\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\wedge\vec{c} = \begin{pmatrix} -22 \\ -76 \\ -28 \end{pmatrix}$, et $\vec{a}\wedge\vec{c} = \begin{pmatrix} 30 \\ 42 \\ -5 \end{pmatrix}$, de normes carrées respectives 733, $2712 = 4\cdot(678)$ et 2689. L'aire recherchée est donc $2\left(\sqrt{733}+\sqrt{2712}+\sqrt{2689}\right)$, ce qui vaut environ 262.

5. On refait la même chose ; $\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PR} = {}^t(-6,0,3)$ (de norme $3\sqrt{5}$), $\overrightarrow{PR}\wedge\overrightarrow{PS} = {}^t(12,3,-6)$ (de norme $3\sqrt{21}$) et $\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PS} = {}^t(7,7,0)$ (de norme $7\sqrt{2}$). L'aire recherchée est donc $2\left(3\sqrt{5}+3\sqrt{21}+7\sqrt{2}\right)$, ce qui vaut dans les $60,7$.

Exercice 3. Si je trouve comment utiliser les logiciels de calcul formel que j'ai sous la main, je vous mettrai les dessins avec un petit commentaire...

Exercice 4. Tous les champs de vecteurs et fonctions de cet exercice étant C^∞ dans l'espace entier, on ne se posera plus la question de leur dérivabilité.

1. On applique la définition formelle de la divergence, $\operatorname{div}\vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u}$, à $\vec{r} = {}^t(x,y,z)$, et l'on trouve $\operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z} = 3$. De même pour le rotationnel, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{r} = \vec{\nabla}\wedge\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$.

2. On trouve ici $\operatorname{div}\vec{u} = y+z+x$, et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{u} = -{}^t(y,z,x)$.

3. En un point M de coordonnées (x,y,z), on a $\operatorname{div}\vec{w} = 2xy-6y^2x^2+xy^2$, ce qui

en $(1,-1,1)$ donne -7.

4. En un point M de coordonnées (x,y,z), on a $\overrightarrow{\text{grad}} f = {}^t(6xy, 3x^2-3y^2z^2, -2zy^3)$, ce qui lorsque $M=(1,-2,-1)$ donne ${}^t(-12,-9,16)$.

Exercice 5. Je rappelle qu'une matrice est dite symétrique si par définition deux de ses coefficients qui sont symétriques par rapport à la diagonale principale (celle qui va du haut à gauche au bas à droite) sont égaux. Un simple calcul donne $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u} = \begin{pmatrix} h-f \\ c-g \\ d-b \end{pmatrix}$, donc $\vec{u}$ est irrationnel *ssi* son rotationnel est nul, soit *ssi* $h=f$, $c=g$ et $b=d$, ce qui équivaut encore à dire que A est symétrique.

Supposons que ce soit le cas ; le cours nous dit alors, puisque l'on travaille sur l'espace tout entier qui est « sans trou », que $\vec{u}$ s'écrit $\overrightarrow{\text{grad}} f$ pour une fonction (régulière) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Ceci nous donne les trois équations $\frac{\partial f}{\partial x} = ax+by+cz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = bx+ey+fz$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = cx+fy+iz$. Résoudre la première comme on le ferait en une variable nous donnerait à une constante près $(x,y,z) \mapsto \frac{a}{2}x^2+bxy+cxz$. Ici, il faut être un peu plus prudent et voir que :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f-(\tfrac{a}{2}x^2+bxy+cxz)) = \frac{\partial f}{\partial x}-(ax+by+cz)=0.$$

Ainsi, $f-(\frac{a}{2}x^2+bxy+cxz)$ ne dépend pas de x, et s'écrit sous la forme $g(y,z)$ pour une fonction (régulière) de deux variables g. On récrit ceci sous la forme : $f(x,y,z) = \frac{a}{2}x^2+bxy+cxz+g(y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, et il s'agit de déterminer g en utilisant les deux équations qu'il nous reste. Dérivons la dernière relation par rapport à y ; il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = bx+\frac{\partial g}{\partial y}.$$

En comparant cette équation à l'équation $\frac{\partial f}{\partial y} = bx+ey+fz$, on obtient $\frac{\partial g}{\partial y} = ey+fz$, qui comme on doit s'y attendre ne dépend pas de x. Cette équation se résout en disant qu'il existe une fonction h de z telle que $g(y,z) = \frac{e}{2}y^2+fzy+h(z)$ (l'intégration naïve donne $\frac{e}{2}y^2+fzy$, et la dérivée partielle de $g-(\frac{e}{2}y^2+fzy)$ par rapport à y est nulle ; comme en outre $g-(\frac{e}{2}y^2+fzy)$ ne dépend pas de x, on a bien notre fonction h de z).

En résumé, on a $f(x,y,z) = \frac{a}{2}x^2+bxy+cxz+\frac{e}{2}y^2+fzy+h(z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Il ne nous reste plus qu'à dériver par rapport à z pour obtenir $\frac{\partial f}{\partial z} = cx+fy+h'(z)$, ce qui comparé à $\frac{\partial f}{\partial z} = cx+fy+iz$ donne $h'(z)=iz$ pour tout z, soit $h(z)=\frac{i}{2}z^2+k$, et $f(x,y,z) = \frac{a}{2}x^2+bxy+cxz+\frac{e}{2}y^2+fzy+\frac{i}{2}z^2+k$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, k étant une constante réelle arbitraire.

Exercice 6. 1. Il suffit d'appliquer la définition du gradient et de se souvenir que la règle pour la dérivée partielle d'un produit est la même que pour la dérivation à une variable (règle de Leibniz) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} fg = \begin{pmatrix} \frac{\partial(fg)}{\partial x} \\ \frac{\partial(fg)}{\partial y} \\ \frac{\partial(fg)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = (\overrightarrow{\text{grad}} f)g + f(\overrightarrow{\text{grad}} g).$$

On peut donc retenir que pour l'opérateur gradient, on a aussi une règle de Leibniz, car on fait agir l'opérateur sur un produit en sommant d'une part ce qu'on obtient en ne le faisant agir que sur l'un des facteurs $((\overrightarrow{\text{grad}} f)g)$ et d'autre part en ne le faisant agir que sur l'autre facteur $(f(\overrightarrow{\text{grad}} g))$.

2. Ici aussi il suffit d'appliquer la définition pour parvenir rapidement au résultat :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\vec{u}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} fu_1 \\ fu_2 \\ fu_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial(fu_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fu_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fu_3)}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3 \right) + f \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

et l'on reconnaît dans le premier terme le produit scalaire $\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{u}$, tandis que le second terme vaut clairement $f \operatorname{div}(\vec{u})$.

3. C'est le plus difficile. Pour commencer, on calcule $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$. Ensuite, on applique la définition de la divergence pour voir que :

$$\begin{aligned} dv(\vec{u} \wedge \vec{v}) =& \frac{\partial(u_2v_3 - u_3v_2)}{\partial x} + (\text{termes obtenus par permutations } 1 \to 2 \to 3 \to 1 \\ & \text{et } x \to y \to z \to x) \\ =& \frac{\partial u_2}{\partial x} v_3 + u_2 \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial x} v_2 - u_3 \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ & + \frac{\partial u_3}{\partial y} v_1 + u_3 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y} v_3 - u_1 \frac{\partial v_3}{\partial y} \\ & + \frac{\partial u_1}{\partial z} v_2 + u_1 \frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z} v_1 - u_2 \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ =& u_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) + u_2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + u_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \\ & - v_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) - v_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) - v_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que la différence $(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \cdot \vec{v} - \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \cdot \vec{u})$.

4. Celui-ci est plus facile ; il suffit d'écrire ce que l'on a avec la définition et ensuite de reconnaître la formule que l'on nous demande de démontrer.

Exercice 7. La fonction r, qui indique la distance d'un point à l'origine, est définie et continue dans le plan ou l'espace tout entiers (selon que l'on travaille en dimension 2 ou 3), mais dérivable (et en réalité C^∞) en dehors de l'origine seulement. Ceci provient du fait que $r = \sqrt{r^2}$, avec certes $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (ou $r^2 = x^2 + y^2$ en dimension 2), avec certes r^2 lisse y compris autour de l'origine, mais s'annulant en ce point ; il en résulte la singularité évoquée, $\sqrt{\ }$ n'étant pas dérivable en 0.

Cela dit, passons à l'exercice proprement dit. On le fait en dimension 3, les résultats étant analogues en dimension 2. Commençons par le cas de r^2 ; on a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x} \\ \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2\vec{r}.$$

D'après l'exercice 6, en dehors de l'origine, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r^2) = 2r\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r)$, d'où $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r) = \frac{\vec{r}}{r}$. De même (ou plutôt par dérivation des fonctions composées, voir exercice 13), toujours sur $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\ln r) = \frac{1}{r}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r) = \frac{\vec{r}}{r^2}$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r^k) = kr^{k-1}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r) = kr^{k-2}\vec{r}$ (ce qui est encore valable en 0 si $k \geq 2$), et en particulier $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\frac{1}{r}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Exercice 8. 1. Le champ de vecteurs $\vec{u}$ a pour composantes x/r^2, y/r^2 et z/r^2 et est donc un champ C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. La première composante de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{u}$ vaut donc $\frac{\partial(z/r^2)}{\partial y} - \frac{\partial(y/r^2)}{\partial z} = \frac{-2}{r^3}\left(z\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial z}\right)$. Or, $\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{t}{r}$ pour $t = x, y, z$, et donc la première composante de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{u}$ est nulle. Par isotropie, les deux autres le sont aussi.

Le cours (Théorème 3.2.8) nous dit alors que $\vec{u}$ peut s'écrire comme le gradient d'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ (qui est troué en l'origine, mais néanmoins simplement connexe, condition disant que l'on peut ramener continûment tout lacet à un seul point sans sortir du domaine) ; si l'on note f cette fonction, on a donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \vec{u}$, ce qui se traduit par les trois équations : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r^2}$. La fonction $\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2 + z^2) = \log r$ étant une primitive par rapport à x de $\frac{x}{r^2}$, la première de ces équations nous donne : $f(x,y,z) = \log r + g(y,z)$, avec g une fonction lisse de y et z sur le domaine. La méthode usuelle voudrait que l'on redérive cette ligne par rapport à y puis par rapport à z pour déterminer g ; nous aurons l'occasion de le faire dans le 2., car on remarque ici (toujours par isotropie) que $\log r$ est aussi une primitive respectivement par rapport à y et z de $\frac{y}{r^2}$ et $\frac{z}{r^2}$, et l'on en déduit immédiatement que la fonction recherchée est de la forme $\log r + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2. La première composante de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{u}$ vaut $\frac{\partial(2y^3z+4z^3)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2+3y^2z^2)}{\partial z} = 6y^2z - 6y^2z = 0$, la deuxième $\frac{\partial(2xy)}{\partial z} - \frac{\partial(2y^3z+4z^3)}{\partial x} = 0$ et la troisième $\frac{\partial(x^2+3y^2z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x - 2x = 0$, et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{u}$ est bien nul.

Soit donc f une fonction (lisse) sur l'espace entier telle que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \vec{u}$, *i.e.* $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2z^2$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = 2y^3z + 4z^3$. En intégrant (par rapport à x) la première égalité il vient $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z)$, g lisse sur $\mathbb{R}^2$ — comme je l'ai expliqué pendant le TD, cela vient de ce qu'une fois que l'on a x^2y comme primitive par rapport à x de $2xy$,

$\frac{\partial}{\partial x}(f - x^2y) = 2xy - 2xy = 0$, soit : $f - x^2y$, qui est lisse, ne dépend pas de x, et s'écrit donc $g(y, z)$.

La méthode consiste alors à dériver $f(x, y, z) = x^2y + g(y, z)$ par rapport à y ; on obtient $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y}$. Or, la seconde de nos trois équations de départ était : $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2z^2$; en comparant ces deux égalités il vient $\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2z^2$, soit $g(y, z) = y^3z^2 + h(z)$, où h est lisse sur $\mathbb{R}$, et apparaît pour la même raison que g ci-dessus. On a donc $f(x, y, z) = x^2y + y^3z^2 + h(z)$, ce que l'on dérive par rapport à z et qui nous donne $\frac{\partial f}{\partial z} = 2y^3z + \frac{dh}{dz}$; or, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2y^3z + 4z^3$, donc $\frac{dh}{dz} = 4z^3$, soit $h(z) = z^4 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. En conclusion, f est de la forme $f(x, y, z) = x^2y + y^3z^2 + z^4 + c$.

3. Je laisse le calcul du rotationnel, qui est bien nul. Remarquons toutefois que l'ouvert de définition est $(\mathbb{R}^*)^3$, n'est pas simplement connexe, mais est la réunion disjointe des huit ouverts simplement connexes que sont les $U_\varepsilon := \mathbb{R}^{\varepsilon_1 *} \times \mathbb{R}^{\varepsilon_2 *} \times \mathbb{R}^{\varepsilon_3 *}$, $\varepsilon := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-, +\}^3$; par exemple, $U_{+,+,+} = (\mathbb{R}^{+*})^3$, c'est-à-dire le premier octant strict. On aurait donc à calculer un potentiel scalaire pour $\vec{u}$ sur chacun de ces U_ε ; toutefois, comme on va le voir, $\vec{u}$ étant donné par une même formule de calcul sur ces différents domaines, il en ira de même pour les différents potentiels, à la constante additive c près, qui dépendra du domaine sur lequel on se place (c'est une subtilité, mais qui en toute rigueur se doit d'être remarquée).

Cela dit, si l'on se donne $\varepsilon \in \{-, +\}^3$ et que l'on cherche un potentiel f_ε de $\vec{u}$ sur U_ε, on a : $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{x} + y\cos(xy)$, d'où $f_\varepsilon(x, y, z) = \log|x| + \sin(xy) + g_\varepsilon(y, z)$. Dériver ceci par rapport à y donne : $x\cos(xy) + \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{y} + x\cos(xy)$, *i.e.* $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{y}$, donc $g_\varepsilon(x, y) = \log|y| + h_\varepsilon(z)$, et $f_\varepsilon(x, y, z) = \log|x| + \log|y| + \sin(xy) + h_\varepsilon(z)$. Finalement, la dérivation par rapport à z donne $\frac{dh_\varepsilon}{dz} = \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} = \frac{1}{z}$, donc $h_\varepsilon(z) = \log|z| + c_\varepsilon$, $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$. Sur chacun des huit U_ε, on a donc un potentiel $f_\varepsilon(x, y, z) = \log|xyz| + \sin(xy) + c_\varepsilon$.

Exercice 9. 1. On suppose $a \in \mathbb{N}$, de sorte que $\vec{w}$ soit C^2 sur $\mathbb{R}^3$. Un calcul immédiat donne

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} a(z + x) \\ 0 \\ -az - x^a \end{pmatrix}$$

puis

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{w})\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ a(1 + x^{a-1}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Il est clair que l'on doit prendre $a = 2$, et donc $k = 1$.

Exercice 10. On est sur $\mathbb{R}^3$, qui est « sans trou ». Il existe donc $\vec{V}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = \vec{r}$ (*resp.* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = (2, 1, 3)$) *ssi* $\mathrm{div}(\vec{r}) = 0$ (*resp.* $\mathrm{div}\,\big((2, 1, 3)\big) = 0$), d'après le théorème 3.2.10, et surtout le théorème 3.2.11 . Or $\mathrm{div}(\vec{r}) = 3 \neq 0$, tandis que $\mathrm{div}\,\big((2, 1, 3)\big) = 0$, puisque $(2, 1, 3)$ est constant en tant que champ de vecteurs.

On doit donc chercher $\vec{V}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = (2, 1, 3)$; on vérifie que $\vec{V} = (z, 2x, 3y)$ convient, et en réalité, un tel champ de vecteurs est unique à l'addition d'un champ gradient près (exercice).

Exercice 11. 1. On utilise la seconde condition pour obtenir une équation différentielle ordinaire (portant sur une variable) sur φ. Supposons donc que $\varphi(z)\overrightarrow{V}$ soit un rotationnel, avec φ au moins C^1, ce qui équivaut, puisque l'on est sur $\mathbb{R}^3$ qui est sans trou, à l'équation $\operatorname{div}\big(\varphi(z)\overrightarrow{V}\big) = 0$. D'après l'exercice 6, question 2, cette équation est encore équivalente à $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\varphi) \cdot \overrightarrow{V} + \varphi(z) \operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$, soit aussi $\varphi'(z)V_z + \varphi(z) \operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$, puisque $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\varphi)$ est de la forme $\big(0, 0, \varphi'(z)\big)$, φ ne dépendant que de z. Or $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = -2x$ et $V_z = -xz$, d'où (en dehors de $x = 0$ puis sur tout $\mathbb{R}^3$ par continuité) : $z\varphi'(z)+2\varphi(z) = 0$. La solution à cette équation sur $\{z > 0\}$ vérifiant $\varphi(1) = 1$ est donnée par $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$; on se contentera donc de travailler sur $D := \mathbb{R}^2 \times \{z > 0\}$, qui est encore sans trou, dans la suite.

2. Pour $\overrightarrow{U_0}$ de la forme de l'énoncé, on a

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{U_0}) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} ;$$

si ce champ de vecteurs est un potentiel pour $\varphi(z)\overrightarrow{V}$, on a donc les équations :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{y^2}{z^2} + 1 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{xy}{z^2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{x}{z}. \end{cases}$$

La première équation donne $Q(x, y, z) = \frac{y^2}{z} - z + q(x, y)$, la seconde $P(x, y, z) = -\frac{xy}{z} + p(x, y)$, avec p et q des fonctions (que l'on peut prendre lisses, ou seulement C^1) sur $\mathbb{R}^2$. On réinjecte ces identités dans la troisième équation ; il vient

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{x}{z} - \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{x}{z},$$

soit $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, de sorte (Corollaire 3.2.6) qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lisse (ou seulement C^2) telle que $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Puisque l'on peut raisonner par équivalence et se contenter d'un exemple pour $\overrightarrow{U_0}$, on prend $f = 0$ (et donc $p = q = 0$), et ainsi $\overrightarrow{U_0}(x, y, z) = \big(-\frac{xy}{z}, \frac{y^2}{z} - z, 0\big)$ sur D.

Pour conclure, on sait qu'un potentiel vecteur est unique à l'addition d'un champ gradient près ; les potentiels vecteurs (lisses, disons) de $\varphi(z)\overrightarrow{V}$ sur D sont donc les $\big(-\frac{xy}{z}, \frac{y^2}{z} - z, 0\big) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(g)$ avec $g : D \to \mathbb{R}$ lisse.

Exercice 12. 1. Une fois de plus, c'est de la dérivation de fonction composées ; sur $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ (r n'étant pas différentiable en $(0, 0, 0)$), on a : $\frac{\partial(\varphi \circ r)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d\varphi}{dr} \circ r = \frac{x}{r} \cdot \varphi' \circ r$

(*cf.* exercice 7 de la feuille pour le calcul de $\frac{\partial r}{\partial x}$). De même, $\frac{\partial(\varphi\circ r)}{\partial y} = \frac{y}{r}\cdot\varphi'\circ r$ et $\frac{\partial(\varphi\circ r)}{\partial z} = \frac{z}{r}\cdot\varphi'\circ r$, soit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi\circ r) = \frac{\varphi'\circ r}{r}\vec{r},$$

ce qui se prolonge en $(0,0,0)$ *ssi* $\varphi'(0) = 0$. Pour le laplacien (qui est la somme des dérivées partielles d'ordre deux non mixtes en coordonnées cartésiennes), on a en dehors de l'origine :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\varphi\circ r)}{\partial x^2} =& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\varphi\circ r)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\cdot\varphi'\circ r\right)\\ =& \frac{\partial(x/r)}{\partial x}\varphi'\circ r + \frac{x}{r}\frac{\partial(\varphi'\circ r)}{\partial x} = \frac{r^2-x^2}{r^3}\varphi'\circ r + \frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r}\cdot\varphi''\circ r\\ =& \frac{r^2-x^2}{r^3}\varphi'\circ r + \frac{x^2}{r^2}\cdot\varphi''\circ r,\end{aligned}$$

et de même $\frac{\partial^2(\varphi\circ r)}{\partial y^2} = \frac{r^2-y^2}{r^3}\varphi'\circ r + \frac{y^2}{r^2}\cdot\varphi''\circ r$ et $\frac{\partial^2(\varphi\circ r)}{\partial z^2} = \frac{r^2-z^2}{r^3}\varphi'\circ r + \frac{z^2}{r^2}\cdot\varphi''\circ r$. En sommant ces trois termes il vient hors de $(0,0,0)$

$$\Delta(\varphi\circ r) = \frac{2}{r}\varphi'\circ r + \varphi''\circ r = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

ce qui si $\varphi'(0) = 0$ et si φ'' est continue en 0 se prolonge en $(0,0,0)$ par $3\varphi''(0)$.

2. Faisons toujours les calculs en dehors de l'origine ; en posant $f = \varphi\circ r$ et d'après l'exercice 6 de la feuille,

$$\mathrm{div}\,(f\vec{r}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f\cdot\vec{r} + f\,\mathrm{div}\,(\vec{r})$$

et comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \frac{\varphi'\circ r}{r}\vec{r}$ d'après 1. et que $\mathrm{div}(\vec{r}) = 3$, il vient $\mathrm{div}(\vec{u}) = r\varphi'\circ r + 3\varphi\circ r$.

De même, les « règles de Leibniz » de l'exercice 6 pour le rotationnel d'un produit (fonction)·(vecteur) donnent :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{r}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f\wedge\vec{r} + f\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{r}).$$

Or on a vu que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{r}) = \vec{0}$ (exercice 4), et comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$ est radial (*i.e.* proportionnel en tout point sauf l'origine à $\vec{r}$, même si le coefficient de proportionnalité dépend du point), $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\wedge\vec{r} = \vec{0}$. En conclusion, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{u}) = \vec{0}$. Attention, ceci est vrai car on a un champ radial, dont de plus la norme ne dépend que de r ; c'est donc un champ sans composante angulaire, et dont la composante radiale ne dépend que de la distance à l'origine du point où on le regarde, ce qui en fait un champ très particulier, et ce calcul est donc bien loin de rester vrai dans le cas général.

Exercice 13. *Cet exercice est tout à fait similaire à l'exercice 6, à ceci près qu'après être revenu aux définitions, il s'agit d'utiliser les résultats sur la dérivation des fonctions* *composées plutôt que sur les produits de fonctions. D'autre part, on se placera par défaut en dehors de l'origine, la fonction r n'étant dérivable qu'en dehors de ce point*

a) Par définition, si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, on a $\operatorname{div}(u \circ r) = \frac{\partial(u_1 \circ r)}{\partial x} + \frac{\partial(u_2 \circ r)}{\partial y} + \frac{\partial(u_3 \circ r)}{\partial z}$. Or $\frac{\partial(u_1 \circ r)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} u_1' \circ r = \frac{x}{r} u_1' \circ r$ d'après l'exercice 7 ; de même, $\frac{\partial(u_2 \circ r)}{\partial y} = \frac{y}{r} u_2' \circ r$ et $\frac{\partial(u_3 \circ r)}{\partial z} = \frac{z}{r} u_3' \circ r$. Ainsi $\operatorname{div}(\vec{u} \circ r) = \frac{1}{r}(x u_1' \circ r + y u_2' \circ r + z u_3' \circ r) = \frac{1}{r}(\vec{r} \cdot \vec{u}' \circ r)$, ce qu'il fallait démontrer.

b) On procède exactement de la même manière, sauf pour la fin où il n'est pas tout à fait évident de reconnaître le produit vectoriel (il y a d'ailleurs une faute dans l'énoncé, les facteurs du produit vectoriel devant être permutés). Le calcul donne

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{u} \circ r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} y u_3' \circ r - z u_2' \circ r \\ z u_1' \circ r - x u_3' \circ r \\ x u_2' \circ r - y u_1' \circ r \end{pmatrix},$$

et on conclut en développant l'expression $\frac{\vec{r}}{r} \wedge (\vec{u}' \circ r)$.

Exercice 14. 1. Pour que w soit exacte sur $\mathbb{R}^3$ (coquille dans l'énoncé), il faut et il suffit qu'elle soit fermée (remarque 2.6.6), c'est-à-dire que $dw = 0$. Or

$$\begin{aligned} dw = & \frac{\partial(yz + x^2y^3)}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial(yz + x^2y^3)}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial(xz + x^3y^2)}{\partial x} dx \wedge dy \\ & + \frac{\partial(xz + x^3y^2)}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \wedge dz \\ & 0 dx \wedge dy + \Big(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y\Big) dx \wedge dz + \Big(\frac{\partial \phi}{\partial y} - x\Big) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Ainsi, w est exacte *ssi* $\frac{\partial \phi}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x$, ce qui équivaut clairement à $\phi(x, y) = xy + c$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $c \in \mathbb{R}$.

2. Soit f une primitive de w, c'est-à-dire une fonction (lisse) de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ telle que $df = w$, soit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz + x^2y^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz + x^3y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \phi(x, y) = xy + c. \end{cases}$$

La dernière de ces équations nous donne $f(x, y, z) = xyz + cz + g(x, y)$ sur $\mathbb{R}^3$, avec $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lisse. En réinjectant dans la première il vient $yz + \frac{\partial g}{\partial x} = x^2y^3$, donc $g(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^3 + h(y)$ avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse. En réinjectant dans l'équation restante, on voit que h est constante ; on note $k \in \mathbb{R}$ sa valeur. En conclusion, les primitives f de w sont de la forme $f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3y^3 + xyz + cz + k$ sur $\mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. 1. L'équation d'un cône de révolution d'axe Oz est $\{z = \alpha r\}$, où α est un constante réelle (paramétrant l'angle que fait le cône avec le plan Oxy ; c'est la tangente de cet angle), et $r = \sqrt{x^2+y^2}$ est la distance à l'axe Oz. Or ici, pour un point de $\mathcal{C}$ de paramètre t, on a $r(t) = \sqrt{e^{4t}\cos^2 t + e^{4t}\sin^2 t} = \sqrt{e^{4t}} = e^{2t} = \alpha z(t)$, avec $\alpha = \frac{1}{k}$. La courbe $\mathcal{C}$ est donc tracée sur le cône de révolution d'équation $\{z = \frac{r}{k}\}$ (et même sur la partie supérieure de ce cône, puisque, pour tout t, $z(t) > 0$).

2. L'angle que fait une tangente à $\mathcal{C}$ en un point M avec le plan horizontal Oxy est aussi l'angle que fait le vecteur vitesse de la trajectoire en M avec le plan horizontal passant par M, puisque ce vecteur est le vecteur directeur de la tangente en question. Or si t est le paramètre de M, cet angle a pour tangente (c'est de la trigonométrie) le rapport de sa coordonnées verticale $z'(t)$ par la longueur de sa composante horizontale $\vec{r}(t) = {}^t\big(x'(t), y'(t)\big)$, qui vaut donc $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. À présent $z'(t) = 2ke^{2t}$, et $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2} = \sqrt{e^{4t}(2\cos t - \sin t)^2 + e^{4t}(2\sin t + \cos t)^2} = \sqrt{5e^{4t}} = \sqrt{5}e^{2t} = \frac{\sqrt{5}}{2k}z'(t)$. La tangente de l'angle considéré est donc constante égale à $\frac{\sqrt{5}}{2k}$, donc cet angle est constant (puisqu'il est défini dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et que tan est strictement croissante sur cet intervalle, si l'on pose $\tan\frac{\pm\pi}{2} = \pm\infty$).

Exercice 16. Rappelons (c'est du cours) que lorsque l'on a une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par ${}^t\big(x(t), y(t), z(t)\big)$, alors la tangente à la courbe au point de paramètre t_0 est, pour peu que le vecteur ${}^t\big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big) \neq \vec{0}$, la droite paramétrée par ${}^t\big(x'(t_0)t + x(t_0), y'(t_0)t + y(t_0), z'(t_0)t + z(t_0)\big)$, ou plutôt ${}^t\big(x'(t_0)(t-t_0) + x(t_0), y'(t_0)(t-t_0) + y(t_0), z'(t_0)(t-t_0) + z(t_0)\big)$ si on se réfère à l'interprétation mécanique de la tangente, à savoir la (demie-)droite que parcourrait un point décrivant $\mathcal{C}$ suivant sa paramétrisation et qui à partir de t_0 ne serait plus soumis à aucune force. Dans le premier cas, on a $\big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big) = (-e^{-\pi}, 0, -6) \neq \vec{0}$, et l'on obtient donc la droite paramétrée par ${}^t\big(-e^{-\pi}t + e^{-\pi}, -2, -6t\big)$. Dans le second cas, $\big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big) = (5,4,2) \neq \vec{0}$, et l'on obtient la droite paramétrée par ${}^t\big(5t+5, 4t+5, 2t-4\big)$. Enfin, dans le troisième cas, $\big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big) = (0,1,2) \neq \vec{0}$, et l'on obtient la droite paramétrée par ${}^t\big(0, t, 2t+1\big)$.

Exercice 17. 1. On peut réécrire la première ligne comme suit : $\cos t = \frac{1}{3}\big(x(t)+1\big)$, ce qui donne avec la deuxième ligne $y(t) = \frac{-2}{3}x(t) + \frac{1}{3}$; n'oublions toutefois pas que $\cos t$ ne parcourt que $[-1,1]$, et donc $x(t)$ ne parcourt que $[-4,2]$, tandis que $y(t)$ ne parcourt que $[-1,3]$. Finalement, la trajectoire de M est le segment de la droite d'équation $y = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$, délimité par $x \in [-4,2]$ et $y \in [-1,3]$ (et cette condition sur y est d'ailleurs redondante) ; c'est aussi le segment joignant ${}^t(-4,3)$ à ${}^t(2,-1)$.

2. D'après ce qui précède, il s'agit du vecteur unitaire de pente $\frac{-2}{3}$; c'est donc $\pm\frac{1}{\sqrt{13}}(3,-2)$, avec le signe $+$ lorsque M « descend » la pente (*i.e.* $t \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$), et avec le signe $-$ lorsqu'il la « monte » *i.e.* $t \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$. Et quand t est un multiple de π, les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ sont nulles, donc il n'y a pas de vecteur unitaire tangent.

Exercice 18. Puisque $1 = \cos^2 + \sin^2$, *i.e.* $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on a, pour tout t, $x(t) = 1 - y(t)^2$, avec $y(t) \in [-1,1]$. La courbe est donc un arc de parabole d'axe Ox, d'extrémités ${}^t(0,1)$ et ${}^t(0,-1)$, et de flèche ${}^t(1,0)$. Puisque $x'(t) = -2\cos t \sin t$ et $y'(t) = \cos t$, le vecteur unitaire tangent est défini quand $\cos t \neq 0$, soit $t \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, et est le normalisé de ${}^t(x'(t), y'(t))$, soit : $\frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{4\sin^2 t+1}}{}^t(-2\sin t, 1)$, avec $\varepsilon(t) = \text{signe}(\cos t)$, ce qui vaut 1 pour $t \in](2k-1/2)\pi, (2k+1/2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$, et -1 pour $t \in](2k+1/2)\pi, (2k+3/2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 19. Écrivons $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$, de sorte que les vecteurs recherchés soient

$$\overrightarrow{T} := \frac{1}{\sqrt{u_1'(\pi/4)^2 + u_2'(\pi/4)^2}}(u_1'(\pi/4), u_2'(\pi/4))$$

(vecteur unitaire tangent) et

$$\overrightarrow{N_\pm} := \pm\frac{1}{\sqrt{u_1'(\pi/4)^2 + u_2'(\pi/4)^2}}(u_2'(\pi/4), -u_1'(\pi/4))$$

(vecteurs unitaires normaux), sous réserve que $(u_1'(\pi/4), u_2'(\pi/4)) \neq (0,0)$. Vérifions ce point ; on a $u_1'(\pi/4) = 2 + 2\cos(2\pi/4) = 2$, ce qui est suffisant. Par ailleurs, $u_2'(\pi/4) = 2\sin(2\pi/4) = 2$; ainsi, $\overrightarrow{T} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $\overrightarrow{N_\pm} = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Pour être tout à fait complets, ajoutons que ces vecteurs sont basés au point de paramètre $\frac{\pi}{4}$, soit $(\frac{\pi}{2}+1, 1)$.

Exercice 20. 1 1. Pour $k=1$, puisque l'on a affaire à une ligne brisée, on va d'abord intégrer $\omega := (y^2-y)dx - 2(x^2-x)dy$ sur le segment $[O,A]$ (où dy est nulle), puis sur le segment $[A,C]$ (où $dx = 0$). Ainsi, $I_1 = \int_{[O,A]}\omega + \int_{[A,C]}\omega = \int_{[O,A]}(y^2-y)dx - 2\int_{[A,C]}(x^2-x)dy$. Or sur $[O,A]$, $y=0$ donc le premier terme de cette somme est nul ; et sur $[A,C]$, $x=1$ donc le deuxième terme de cette somme est nul également. Finalement, l'intégrale I_1 de ω le long de OAC est nulle.

Pour $k=2$, c'est la même chose sauf que l'on passe par B, en remarquant que sur $[O,B]$, dx est nulle, tandis que sur $[B,C]$, dy est nulle. D'où : $I_1 = \int_{[O,B]}\omega + \int_{[B,C]}\omega = -2\int_{[O,B]}(x^2-x)dy + \int_{[B,C]}(y^2-y)dx$. Or sur $[O,B]$, $x=0$, et sur $[B,C]$, $y=1$, donc les deux termes de cette somme sont nuls. L'intégrale I_2 de ω le long de OBC est encore nulle.

Pour $k=3$ enfin, on va directement de O à C ; on va donc paramétrer ce segment $[O,C]$ par ${}^t(x(t), y(t)) = {}^t(t,t) = t \cdot {}^t(1,1)$, $t \in [0,1]$. Le long de ce segment, on a donc $dx = dy = dt$, d'où :

$$I_3 = \int_{t=0}^{t=1}((t^2-t)dt - 2(t^2-t)dt) = -\int_0^1 (t^2-t)\ dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}.$$

2. Le résultat n'est manifestement pas indépendant du chemin suivi ; ceci nous dit que ω n'est pas exacte, *i.e.* qu'elle ne s'écrit pas df avec f une fonction de x et y. Puisque exactitude ($\omega = df$) implique fermeture ($d\omega = 0$) [1], on aurait pu le voir directement en calculant $d\omega$, qui vaut $(2y-1)dy \wedge dx - 2(2x-1)dx \wedge dy = (1-4x-2y)dx \wedge dy \neq 0$.

1. et sur un domaine simplement connexe comme ici le plan, ces notions sont équivalentes ; c'est le très fondamental *lemme de Poincaré*

Exercice 21. Cet exercice se décompose en deux temps. D'abord, il s'agit de calculer la paramétrisation du chemin dont le vecteur vitesse nous est donné ; ensuite, une fois calculée la paramétrisation, on calcule l'intégrale grâce à la formule de définition (selon laquelle on a bien besoin de la paramétrisation, et pas seulement de la donnée du vecteur vitesse), donnée dans le poly en ? ? ? .

Soit donc ${}^t\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ la paramétrisation recherchée, dont on suppose qu'elle est dérivable — mais c'est sous-entendu par l'énoncé, puisque le vecteur vitesse existe. Alors son vecteur vitesse au temps t est ${}^t\big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$, d'où, en comparant avec $\vec{v}(t)$ tel qu'il est donné dans l'énoncé, le système d'équations différentielles ordinaires pour $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \\ z'(t) = 1, \end{cases}$$

qui s'intègre en ${}^t\big(x(t), y(t), z(t)\big) ={}^t (\cos t + c_1, \sin t + c_2, t + c_3)$, où les $c_j \in \mathbb{R}$. Puisqu'en particulier, on va vers les z croissants en suivant ce chemin avec cette paramétrisation, on part nécessairement de A pour aller vers B (comme $z_A = 0 < 2\pi = z_B$), ce qui nous donne $(1 + c_1, c_2, c_3) ={}^t \big(x(0), y(0), z(0)\big) = A = (1, 0, 2\pi)$, d'où $c_j = 0$ pour $j = 1, 2, 3$. En vérifiant que l'on récupère bien (les coordonnées de) B en $t = 2\pi$, on conclut que l'on a bien obtenu la paramétrisation recherchée.

Passons au calcul de l'intégrale proprement dit. Une bonne idée est de calculer rapidement au brouillon la différentielle de la 1-forme dont on doit calculer l'intégrale avant de se lancer dans des considérations compliquées ; si en effet la forme est fermée, et pour peu que l'on travaille sur un domaine simplement connexe, l'intégrale ne dépend que des bornes, et l'on peut soit calculer une primitive f de la 1-forme (et alors l'intégrale est la différence de f prise sur les bornes) — auquel cas on est ramené à un système d'EDP identiques à celui que l'on a lorsque l'on calcule un potentiel à partir d'un champ de vecteurs à rotationnel nul —, soit calculer l'intégrale sur un chemin plus simple, typiquement le segment joignant les extrémités du chemin d'origine. Cela dit, notre 1-forme n'est pas ici fermée, et la formule (de définition) donne pour I

$$\int_0^{2\pi} (-4\sin^2 t\cos t + 3\sin^2 t\cos t + 5t)\, dt = \left[-\frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{5}{2}t^2\right]_0^{2\pi} = 10\pi^2.$$

Exercice 22. Commençons par paramétrer les différents arcs C^1 de la courbe $ABCDA$. Pour le premier morceau, disons Γ_1, qui est un arc du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, et dont le rayon fait avec l'axe des abcisses un angle allant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, on prend naturellement la paramétrisation $x(t) = 1 + \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui donne $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$ pour tout t.

Pour le second morceau, que nous appelons Γ_2, qui est un segment allant du point $(1, 1)$ au point $(-1, -1)$ (sous-entendu, *dans ce sens*), on prend simplement la paramétrisation $x(t) = y(t) = t$, pour t *allant de* 1 *à* -1 (l'intégrale à calculer sur ce chemin s'écrira donc $\int_1^{-1}$), et $x'(t) = y'(t) = 1$ — ce qui revient au même que de pendre

$x(t) = y(t) = -t$, t allant de -1 à 1, car alors le signe $-$ se retrouve dans x' et y', ce qui change bien $\int_{-1}^{1}$ en $\int_{1}^{-1}$.

Le troisième morceau, Γ_3, est similaire au premier avec un angle allant de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, d'où la paramétrisation $\tilde{x}(u) = -1 + \cos u$, $\tilde{y}(u) = \sin u$, u allant de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, ce qui revient à prendre $x(t) = -1 - \cos t$, $y(t) = -\sin t$, t allant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, en effectuant le changement de paramètre $t = \pi - u$, d'où un vecteur vitesse de composantes $x'(t) = \sin t$ et $y'(t) = -\cos t$.

Finalement, la quatrième morceau Γ_4 qui est le segment joignant $(-1, 1)$ à $(1, -1)$ peut être paramétré par $x(t) = t$, $y(t) = -t$, $t \in [-1, 1]$, de sorte que $x'(t) = 1$, $y'(t) = -1$ sur ce segment.

En résumé, si ω désigne la 1-forme $(x^2 + y^2)dx + 2x^2ydy$ et Γ la courbe $ABCDA$ décrite comme indiqué, on a à calculer la quantité

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \omega &= \sum_{j=1}^{4} \int_{\Gamma_j} \omega \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[((1+\cos t)^2 + \sin^2 t)(-\sin t) + 2(1+\cos t)^2 \sin t \cos t\Big]\, dt \\
&+ \int_{1}^{-1} [(t^2+t^2)(-1) + 2t^2 \cdot t(-1)] dt \\
&+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[((-1-\cos t)^2 + (-\sin t)^2)(\sin t) + 2(-1-\cos t)^2(-\sin t)(-\cos t)\Big]\, dt \\
&+ \int_{-1}^{1} \Big[(t^2 + (-t)^2) \cdot 1 + 2t^2(-t)(-1)\Big]\, dt.
\end{aligned}$$

Cependant, le calcul est plus simple qu'il n'y paraît, car dans la première et la troisième intégrales, on intègre des fonctions impaires sur un segment symétrique par rapport à 0, et ces intégrales sont donc nulles. En outre, on peut s'affranchir du terme en t^3 des seconde et quatrième intégrales pour la même raison, et il reste donc finalement $2\left(\int_1^{-1} + \int_{-1}^{1}\right)(t^2\ dt)$, qui est nul. L'intégrale curviligne demandée est donc nulle.

Exercice 23. 1. Ici aussi il s'agit d'abord de trouver une paramétrisation, mais cette fois en ne connaissant que la trajectoire et son sens de parcours. Décomposons cette trajectoire Γ en Γ_1, qui correspond à l'arc de cercle, et Γ_2, qui correspond à l'arc de parabole. Puisque Γ_1 est un arc du cercle de centre O et de rayon 2 parcouru dans le sens trigonométrique, il peut être paramétré par ${}^t(2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [-\alpha, \alpha]$, avec α l'arccosinus de la demi-abscisse du point d'intersection M du cercle et de la parabole considérés et d'ordonnée positive (et α est donc aussi l'arcsinus de la moitié de cette ordonnée). De même, l'arc de parabole de la parabole d'équation $y^2 = 3x$, Γ_2, parcouru aussi en sens trigonométrique, peut être en tant que tel paramétré par ${}^t\left(\frac{1}{3}t^2, -t\right)$, avec $t \in [-\beta, \beta]$, où β est l'ordonné de M — et $\alpha = \arcsin(\beta/2)$.

Il reste à calculer ce β ; or M est par définition un point d'intersection des courbes d'équation $x^2+y^2 = 4$ et $y^2 = 3x$, alors $x_M = \frac{\beta^2}{3}$, puis $\left(\frac{\beta^2}{3}\right)^2 + \beta^2 = 4$, *i.e.* $\beta^4 + 9\beta^2 - 36 =$

0. En considérant β^2 comme l'inconnue cette équation a pour discriminant $225 = 15^2$, et a donc pour racines $\frac{1}{2}(-9 \pm 15) = -12$ ou 3. Comme $\beta^2 \geq 0$, seul $\beta^2 = 3$ convient, et donc puisque β est aussi ≥ 0, $\beta = \sqrt{3}$, et $\alpha = \arcsin\left(\sqrt{3}/2\right) = \frac{\pi}{3}$. Finalement, on a donc en notant ω la 1-forme sous l'intégrale définissant I, en remarquant en particulier que le long de Γ_1, $x^2 + y^2 = 4$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega \\ &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4(2\cos t - 2\sin t)\, dt + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \Big(\big(\frac{t^2}{3}\big)^2 + t^2 \Big) \Big(\frac{2t}{3} - 1 \Big)\, dt. \end{aligned}$$

La première intégrale donne $[8(\sin t + \cos t)]_{-\pi/3}^{\pi/3} = 8$, et la seconde, en enlevant les termes de degrés impairs dont la contribution est nulle (les deux bornes sont opposées), *i.e.* en enlevant le terme $\frac{2t}{3}$, donne $\left[-\frac{t^5}{45} - \frac{t^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = -\frac{12}{5}\sqrt{3}$. Au final, $I = 8 - \frac{12}{5}\sqrt{3} \approx 3,84$.

2. On va utiliser le théorème 3.7.1 pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine (borné) délimité par Γ ; puisque, quasiment par définition, Γ (indépendamment de son sens de parcours) est la frontière du domaine qu'elle délimite, et comme elle est parcourue dans le sens trigonométrique, on a le choix pour $\mathcal{A}$ entre $\int_\Gamma x dy$, $-\int_\Gamma y dx$, et donc aussi n'importe quelle moyenne pondérée de ces deux intégrales, en particulier $\frac{1}{2}\int_\Gamma (xdy - ydx)$. On va utiliser la première, qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\Gamma_1} xdy + \int_{\Gamma_2} xdy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\cos^2 t\ dt - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{3} t^2\ dt \\ &= [2t + \sin(2t)]_{-\pi/3}^{\pi/3} - \left[\frac{1}{9}t^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi + \sqrt{3}}{3} \\ &\approx 4,77. \end{aligned}$$

Exercice 24. 1. On écrit $\phi = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, de sorte que l'on doive montrer que $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ pour conclure que ϕ est fermée — puisque $d\phi = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy$. Or $a(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, d'où $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, et $b(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, donc (en échangeant les rôles de x et y et en changeant le signe) $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial a}{\partial y}$, soit : ϕ est fermée. La suite de l'exercice va cependant nous montrer que l'on ne peut pas se passer en général de l'hypothèse de simple connexité dans le lemme de Poincaré.

2. *Pour la courbe paramétrée, on prend en fait le paramètre t entre 0 et 4π.*

- pour le cercle de rayon R, on prend comme paramétrisation $(R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, de sorte que $x'(t) = -R\sin t$, $y'(t) = \cos t$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}\, dt, \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t \cdot (-R\sin t)}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\ dt = 2\pi. \end{aligned}$$

En particulier, on voit que ϕ ne peut pas être exacte, car sinon son intégrale le long du chemin fermé qu'est le cercle serait nulle. Une version plus précise du lemme de Poincaré s'énonce d'ailleurs comme ceci : sur un domaine quelconque, une forme fermée est exacte *ssi* son intégrale le long de tout chemin fermé est nulle (ce qui est une condition vide dans le cas d'un domaine simplement connexe).

- pour la courbe paramétrée, on a $x'(t) = -(2+\cos\frac{3t}{2})\sin t - \frac{3}{2}\sin\frac{3t}{2}\cos t = -y(t) - \frac{3}{2}\sin\frac{3t}{2}\cos t$, et $y'(t) = (2+\cos\frac{3t}{2})\cos t - \frac{3}{2}\sin\frac{3t}{2}\sin t = x(t) - \frac{3}{2}\sin\frac{3t}{2}\sin t$. Ainsi,
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{4\pi} \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x(t)^2+y(t)^2}\ dt \\ &= \int_0^{4\pi} \frac{x(t)[x(t) - \frac{3}{2}\sin\frac{3t}{2}\sin t] - y(t)[-y(t) - \frac{3}{2}\sin\frac{3t}{2}\cos t]}{x(t)^2+y(t)^2}\ dt \\ &= \int_0^{4\pi} \left(1 + \frac{y(t)\frac{3}{2}\sin\frac{3t}{2}\cos t - x(t)\frac{3}{2}\sin\frac{3t}{2}\sin t}{x(t)^2+y(t)^2}\right)\ dt \end{aligned}$$
et l'on voit aisément que le dénominateur de la fraction dans l'intégrande est nul, puisque $x(t)$ et $y(t)$ sont facteurs d'un même facteur $2+\cos\frac{3t}{2}$, respectivement par $\cos t$ et $\sin t$. Finalement, on a donc $I = \int_0^{4\pi} dt = 4\pi$. En outre, en traçant la courbe, on voit qu'elle « fait deux tours autour de l'origine » et l'on remarque que $I = 2\cdot 2\pi$. En fait, on peut démontrer que l'intégrale de ϕ le long d'une courbe C^1 par morceaux faisant n tours autour de l'origine, $n \in \mathbb{Z}$ selon le sens de parcours, vaut $2n\pi$.

3. Pour le cercle, on sait que l'aire du disque qu'il délimite est de πR^2 ; on peut le démontrer en intégrant $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ sur cette courbe, ce qui donne $\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\ dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}R^2\ dt = \pi R^2$.

Pour la seconde courbe, c'est un peu plus subtil. En effet, puisqu'elle se chevauche en certains endroits, on ne peut pas appliquer tel quel le théorème précédent. On s'en sort comme ceci : on subdivise $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, de sorte que ces $\mathcal{C}_k$ soient sans point double et qu'on puisse leur appliquer le théorème ; on appelle encore $\mathcal{C}_4$ la courbe union des $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k$, $1 \leq j < k \leq 3$, parcourue dans le sens positif, et elle aussi est sans point double (« point de chevauchement »). Alors si $\mathcal{A}$ est l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, et $\mathcal{A}_k$ celle du domaine délimité par $\mathcal{C}_k$ respectivement pour $k = 1, 2, 3, 4$, on obtient (la première ligne est un exercice élémentaire, la seconde une application du Théorème p. 47) :
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - 2\mathcal{A}_4 \\ &= \left(\int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} + \int_{\mathcal{C}_3} - 2\int_{\mathcal{C}_4}\right)\left(\frac{1}{2}(xdy - ydx)\right) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2}(xdy - ydx) \end{aligned}$$
car lorsque l'on parcourt à la suite les $\mathcal{C}_k$, $k = 1, 2, 3$, c'est exactement comme lorsque l'on parcourt $\mathcal{C}$ puis deux fois $\mathcal{C}_4$ (ceci peut s'écrire rigoureusement en calculant les couples

de paramètres des points doubles de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $t = \frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$, π et 3π, $\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{11\pi}{3}$). Finalement, en se resservant du calcul précédent du 2.,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2}(xdy - ydx) &= \int_0^{4\pi} \frac{1}{2}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{4\pi} (x(t)^2 + y(t)^2)dt \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \left(2 + \cos\tfrac{3t}{2}\right)^2 dt \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \left(4 + \cos^2\tfrac{3t}{2}\right) dt \text{ car } \int_0^{4\pi} \cos\tfrac{3t}{2}\ dt = 0 \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \left(4 + \frac{1+\cos 3t}{2}\right) dt \text{ en linéarisant} \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \frac{9}{2}dt \text{ car } \int_0^{4\pi} \cos 3t\ dt = 0 \\
=&9\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 25. On calcule le travail W de $\overrightarrow{F}$ le long de $\mathcal{E}$ en fonction de a et b. Avec la paramétrisation donnée, on a $\overrightarrow{dM} = (-a\sin t, b\cos t, 0)dt$ et $\overrightarrow{F} = \big(2a\cos t - b\sin t, 4b\sin t, b\sin t + a^2\cos^2 t\big)$ au point de paramètre t. Ainsi en un tel point $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dM} = \big((4b^2 - 2a^2)\sin t\cos t + ab\sin^2 t\big)$. Comme $\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt = 0$ et $\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = \pi$, il vient $W = ab\pi$, d'où $a = 4$ et $b = 8$ (a et b sont des puissances de 2 car 32 en est une, et la seule puissance de 2 entre 3 et $\sqrt{32} \approx 5.66$ est 4).

Exercice 26. 1. Avec la paramétrisation indiquée, on a $\overrightarrow{dM}(t) = (3t^2, -2t, 1)dt$ et $\overrightarrow{F}(M(t)) = (\sin t^3, \cos t^2, t^4)$, $t \in [0,1]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dM}(t) &= \int_0^1 \left(3t^2\sin t^3 - 2t\cos t^2 + t^5\right) dt \\
&=\Big[-\cos t^3 - \sin t^2 + \frac{1}{6}t^6\Big]_0^1 \\
&=\frac{7}{6} - \cos 1 - \sin 1 \\
&\approx -0.215.
\end{aligned}$$

2. De même, on a ici $\overrightarrow{dM}(t) = (\cos t, -\sin t, 2t)dt$ et $\overrightarrow{F}(M(t)) = (\sin^2 t, \sin t\cos t, t^4)$, $t \in [0, \pi/2]$. Par conséquent,

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dM}(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t\sin^2 t - \sin^2 t\cos t + 2t^5\right) dt = \frac{1}{3}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^6 = \frac{\pi^6}{192} \approx 5.01.$$

Exercice 27. 1. On utilise le théorème 3.7.1, de sorte que l'aire à calculer, disons $\mathcal{A}$, s'obtienne par $\mathcal{A} = \int_{\mathcal{C}} x dy$, où $\mathcal{C}$ est l'astroïde considérée. Ainsi, $\mathcal{A} = 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \, dt = 3a^2 \big(\int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt - \int_0^{2\pi} \cos^6 t \, dt \big)$. Or pour tout k, on a par intégration par parties

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2(k+1)} t \, dt = (2k+1) \Big[\int_0^{2\pi} \cos^{2k} t \, dt - \int_0^{2\pi} \cos^{2(k+1)} t \, dt \Big],$$

soit

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2(k+1)} t \, dt = \frac{2k+1}{2k+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2k} t \, dt.$$

On en déduit que $\mathcal{A} = 3a^2 \big(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\frac{5}{6} \big) \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{3}{8} a^2 \pi$, car $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$ (*cf.* exercice 10 de la feuille 1 de TD).

2. Rappelons que l'on peut passer d'une équation polaire à une paramétrisation cartésienne en écrivant $x(\theta) = r(\theta) \cos \theta$ et $y(\theta) = r(\theta) \sin \theta$. Cela dit, si l'on note à nouveau $\mathcal{A}$ l'aire à calculer et $\mathcal{C}$ la courbe délimitante, on peut écrire $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} (x dy - y dx)$. Avec la paramétrisation choisie, $dx = \big(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r(\theta) \sin \theta \big) d\theta$ et $dy = \big(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r(\theta) \cos \theta \big) d\theta$, de sorte que $x dy - y dx$ se simplifie en $r(\theta)^2 d\theta$ (et ceci vaut dès que l'on a une équation polaire). Par conséquent, $\mathcal{A} = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta$, ce qui tous calculs faits donne $\mathcal{A} = \frac{3a^2\pi}{2}$.

Exercice 28. 1. On va utiliser le théorème de Stokes après avoir démontré que $\omega := \frac{(1+y)dx + x dy}{x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + 1}$ est exacte ; déjà, remarquons que le dénominateur de ω peut s'écrire $x^2(y+1)^2 + 1 \geq 1 > 0$, et donc que ω est bien définie sur le plan tout entier qui est simplement connexe. Pour voir que ω est exacte, il est donc nécessaire et suffisant — *lemme de Poincaré*, théorème 2.6.3, p. 30 du poly— de démontrer qu'elle est fermée. Or si $a(x,y) = \frac{1+y}{x^2(y+1)^2+1}$ et $b(x,y) = \frac{x}{x^2(y+1)^2+1}$, alors $\omega = a dx + b dy$, et

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{1 \cdot (x^2(y+1)^2 + 1) - (1+y) \cdot 2x^2(1+y)}{(x^2(y+1)^2+1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2(y+1)^2 + 1) - x \cdot 2x(1+y)^2}{(x^2(y+1)^2+1)^2} \\ &= \frac{\partial b}{\partial x}, \end{aligned}$$

i.e. ω est fermée, donc exacte, et s'écrit df pour une fonction (lisse) f. Si alors Γ est un chemin reliant deux points A et B fixes, alors $\partial\Gamma$ est l'union de A (compté négativement) et B (compté positivement), donc d'après Stokes, $\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma df = \int_{\partial\Gamma} f = f(B) - f(A)$, ce qui ne dépend pas de Γ.

2. Il suffit (!) de trouver pour répondre à cette question une fonction f convenable. Or une telle f va vérifier les relations aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y)$; la première donne $f(x,y) = \arctan\big((1+y)x\big) + g(y)$, g lisse, ce qui dérivé par rapport à y donne grâce à la deuxième relation $g'(y) = 0$, soit : $g = C \in \mathbb{R}$. On peut donc prendre simplement $f(x,y) = \arctan\big((1+y)x\big)$, et alors $I = f(B) - f(A) = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 29. Mieux vaut ici ne pas se laisser impressionner par la définition de l'arc OP ; en effet, la 1-forme dont on doit calculer l'intégrale curviligne le long de cet arc et généralisée au plan est fermée, donc exacte. Appelons ω cette 1-forme ; on a bien $d\omega = -6xy^2 dy \wedge dx - 6xy^2 dx \wedge dy = 0$. Il suffit donc de connaître une primitive f de ω pour conclure, puisqu'alors l'intégrale demandée vaut $f(P) - f(O)$. Recherchons une telle primitive, dont on peut demander à ce qu'elle soit lisse. Par définition, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 10x^4 - 2xy^3$, donc $f(x,y) = 2x^5 - x^2y^3 + g(y)$ sur $\mathbb{R}^2$, avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse. On a encore $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2y^2$, d'où $g'(y) = 0$, soit g est constante, et on peut donc prendre $g = 0$, soit $f(x,y) = 2x^5 - x^2y^3$ sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, l'intégrale demandée vaut $f(t,2t) - f(0,0) = -6t^5$.

Exercice 30. La forme w n'est définie qu'en dehors de l'origine, ce qui ne correspond pas à un domaine sans trou ; on ne peut donc pas utiliser le lemme de Poincaré pour affirmer l'existence de f, ce qui de toute manière ne nous aurait pas donné son expression. On va donc raisonner par analyse-synthèse : on va déterminer les seules f possibles sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, puis vérifier qu'elles sont bien primitives de w. Soit donc f une telle fonction, disons C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$; on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = y\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{y}{x^2+y^2} - y \end{cases} \tag{$*$}$$

en dehors de l'origine. La première équation nous dit que $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + g(y)$ en dehors de l'origine, avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Plus précisément, en intégrant en x à $y \in \mathbb{R}$ fixé cette équation,

- si $y \neq 0$, on peut intégrer sur tout $\mathbb{R}$, donc on a une constante c_y telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + c_y$;
- si $y = 0$, on ne peut pas intégrer à travers $x = 0$ (car $(0,0)$ n'est pas dans le domaine), et on a donc deux constantes c_+ et c_- telles que : $\forall x \in \mathbb{R}^{\pm *}$, $f(x,0) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2\right) + c_\pm$. Or, $c_+ = f(1,0) = \lim_{y\to 0, y>0} f(1,y)$ car f est supposée continue en $(1,0)$, et de même $c_- = \lim_{y\to 0, y>0} f(-1,y)$. Mais pour tout $y > 0$, $f(1,y) = f(-1,y)$ d'après le premier point. On a donc $c_+ = c_- := c_0$.

On pose $g(y) = c_y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$; on a donc $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + g(y)$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, et nécessairement g est C^1 sur $\mathbb{R}$, puisque par exemple : $\forall y \in \mathbb{R}$, $g(y) = f(1,y) - \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)$.

En dérivant par rapport à y en dehors de $\{(0,0)\}$, et en comparant avec la seconde équation du système $(*)$ (on peut fixer x de manière à récupérer une condition sur tous les $y \in \mathbb{R}$, par exemple $x = 1$), il vient $g'(y) = -y$, soit $g(y) = -\frac{1}{2}y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Les fonctions f possiblement primitives de w sont donc les $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{2}y^2 + c$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, et on vérifie aisément par un calcul direct qu'elles vérifient bien cette propriété.

Exercice 31. La forme différentielle sous le signe intégrale n'est pas fermée (et donc pas exacte) ; on doit donc choisir une paramétrisation de l'arc AB décrit dans l'énoncé.

La plus évidente est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = (t-1)\ln(t+1) \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

On a ainsi $I = \int_0^1 (\sqrt{t}y'(t)dt - \sqrt{t}\ln(t+1)x'(t))dt = \int_0^1 (\sqrt{t}\ln(t+1) + \sqrt{t}\frac{t-1}{t+1} - \sqrt{t}\ln(t+1))dt = \int_0^1 \sqrt{t}\frac{t-1}{t+1}\,dt$. Faisons le changement de variable $s = \sqrt{t}$ dans a dernière expression ; on obtient $I = \int_0^1 2s^2\frac{s^2-1}{s^2+1}ds = 2\int_0^1 (s^2-2+\frac{2}{s^2+1}) = 2(\frac{1}{3}-2+\frac{\pi}{2}) = \pi - \frac{10}{3} \approx -0,192$.

Exercice 32. On décompose $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, paramétrée par

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x(t) =t \\ y(t) =t^2 \end{cases}, \qquad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x(s) =s^2 \\ y(s) =s \end{cases}$$

avec t allant de 0 à 1 et s allant de 1 à 0. Puisque ces courbes ont pour intersection les points $(0,0)$ et $(1,1)$ (qui sont de dimension 0), on a $I = \int_{\mathcal{C}_1} \omega + \int_{\mathcal{C}_2} \omega$, où $\omega = (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy$. On pose $I_j = \int_{\mathcal{C}_j} \omega$, $j = 1, 2$. Ainsi, $I_1 = \int_0^1 (2t^3 - t^2)dt + (t+t^4)2tdt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{37}{30}$ d'une part, et d'autre part $I_2 = \int_1^0 (2s^3 - s^4)2sds + (s^2+s^2)ds = -\frac{13}{15}$, d'où $I = \frac{3}{10}$.