LM 256 - TD n°9

4 novembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°3.

Exercice 1. On va calculer les intégrales multiples, comme dans le cas d'intégrales simples, à cette différence près que l'on va intégrer successivement ce que l'on obtient en intégrant les premières fois, et que l'on peut selon les cas *séparer* les variables. Concrètement :

- $\int_0^1 dy \int_0^y x^2 dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^3}{3}\, dy = \left[\frac{x^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12};$
- $\int_0^1 dy \int_0^y y^2 dx = \int_0^1 y^2 dy \int_0^y dx = \int_0^1 y^3 dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4};$
- $$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_0^x -\sin(x^2) dy &= \int_0^1 -\sin(x^2) dx \int_0^x dy = \int_0^1 -x\sin(x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^1 = \frac{1-\cos 1}{2};\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} (2x+3y^2) dy &= \int_0^1 \left[2xy + y^3\right]_{1-x}^{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \left(2x(1+x) + (1+x)^3 - 2x(1-x) - (1-x)^3\right) dx \\ &= \int_0^1 (2x^3 + 4x^2 + 6x) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{2} + \frac{4x^2}{3} + 3x^2\right]_0^1 = \frac{29}{6};\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y 2xyz dx &= \int_0^1 zdz \int_0^z ydy \int_0^y 2xdx = \int_0^1 zdz \int_0^z y^3 dy \\ &= \int_0^1 \frac{z^5}{4} dz = \left[\frac{z^6}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

- $\displaystyle \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{x+y} 2xydz = \int_0^1 2xdx \int_x^{2x} ydy \int_0^{x+y} dz$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 2xdx \int_x^{2x} y(x+y)dy \\ &= \int_0^1 2x\Big[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Big]_x^{2x} dx = \int_0^1 \frac{23x^4}{3}dx \\ &= \Big[\frac{23x^5}{15}\Big]_0^1 = \frac{23}{15}; \end{aligned}$$

- $\displaystyle \int_0^{\pi} dy \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z\sin ydx = 2\int_0^{\pi} \sin ydy \int_0^2 zdz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} dx$

$$\begin{aligned} &= 2\int_0^{\pi} \sin ydy \int_0^2 z\sqrt{4-z^2}dz \\ &= 2\int_0^{\pi} \sin y\Big[\frac{-1}{3}(4-z^2)^{3/2}\Big]_0^2 dy = 2\int_0^1 \frac{8}{3}\sin ydy \\ &= \frac{16}{3}\,[-\cos y]_0^{\pi} = \frac{32}{3}; \end{aligned}$$

- $\displaystyle \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^x -yzdz = -\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y\frac{x^2}{2}dy = \int_0^3 \frac{x^2}{2}\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{9-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 \Big(\frac{9x^2-x^4}{4}\Big)dx = \Big[\frac{9x^3}{12} - \frac{x^5}{20}\Big]_0^3 \\ &= \frac{81}{10}. \end{aligned}$$

Exercice 2. *Note : le théorème de Fubini nous dit basiquement, lorsque l'on travaille avec l'intégrale de Riemann, que les intégrales*

$$\int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \qquad \text{et} \qquad \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

sont égales lorsque f est continue sur $D := \{(x,y), x \in [a,b], y \in [c(x), d(x)]\} = \{(x,y), y \in [c,d], x \in [a(y), b(y)]\}$, et que l'on peut donc poser $\iint_D f(x,y)dxdy$ comme étant égale à l'une ou l'autre de ces intégrales, et l'on choisit alors l'un ou l'autre de ces calculs en fonction de la simplicité qu'il présente. En théorie de la mesure, on donne (sous des conditions plus faibles que la continuité, et sur des domaines moins restrictifs) une définition de $\iint_D f(x,y)dxdy$ indépendante des deux premières intégrales, et le théorème de Fubini dit alors que ces différentes notions sont équivalentes.

En appliquant cette note préliminaire (après avoir trouvé les cas échéant une description adéquate du domaine D d'intégration), on va calculer les différentes intégrales proposées, en remarquant avant de commencer que toutes les fonctions à intégrer sont continues sur les domaines considérés.

- $$\iint_D 2xy\ dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$$
$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$
- $$\iint_D (x+2y) dxdy = \int_1^3 dx \int_{1+x}^{2x} (x+2y) dy = \int_0^1 \left[xy + y^2\right]_{1+x}^{2x} dx$$
$$= \int_1^3 (4x^2 - 3x - 1)\ dx = \left[x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x\right]_1^3 = 12.$$
- $$\iint_D e^{x/y} dxdy = \int_1^2 dy \int_y^{2y^3} e^{x/y} dx = \int_1^2 y\left[ye^{x/y}\right]_y^{2y^3} dy$$
$$= \int_1^2 y\left(e^{2y^2} - e\right) dy = \left[\frac{1}{4}e^{2y^2} - ey\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left(e^4 - e^2\right) - e.$$
- $$\iint_D \frac{2}{x} dxdy = \int_1^e dy \int_{y^2}^{y^4} \frac{2}{x} dx = \int_1^e 2[\log x]_{y^2}^{y^4} dy$$
$$= \int_1^e 4\log y\ dy = 4[y\log y - y]_1^e = 4.$$
- $$\iint_D x\cos y\ \ dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} x\cos y dy = \int_0^2 [x\sin y]_0^{x^2} dx$$
$$= \int_0^2 x\sin x^2 dx = \left[-\frac{1}{2}\cos x^2\right]_0^2 = \frac{1-\cos 4}{2} = \sin^2 2.$$
- $$\iint_D 2xy\ dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2}(1-x^2) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$
- $$\iint_D ye^{2x}\ dxdy = \int_0^2 ydx \int_{2y}^{6-y} e^{2x} dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{2y}^{6-y} dy$$
$$= \int_0^2 \frac{y}{2}\left(e^{12-y} - e^{4y}\right) dy$$
$$= \left[\frac{-1}{2}(y+1)e^{12-y} - \frac{1}{8}\left(y - \frac{1}{4}\right)e^{4y}\right]_0^2 = \frac{1}{2}e^{12} - \frac{55}{32}e^8 - \frac{1}{32}.$$

- $$\iint_D xy\ dxdy = \int_0^2 xdx \int_0^{2-x} ydy = \int_0^2 \frac{1}{2}x(2-x)^2 dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{8} - \frac{2x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{34}{3}.$$
- $$\iint_D (x+2y)\ dxdy = \int_0^2 dy \int_y^{4-y} (x+2y)dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + 2xy\right]_y^{4-y} dy$$
$$= \int_0^2 \left(-4y^2 + 4y + 8\right) dy = \left[-\frac{4y^3}{3} + 2y^2 + 8y\right]_0^2 = \frac{40}{3}.$$
- $$\iint_D xy\ dxdy = \int_0^2 xdx \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} ydy = \frac{9}{8}\int_0^2 x(4-x^2)dx$$
$$= \frac{9}{8}\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 6.$$
- $$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^4 dx \int_1^{4-x} \frac{dy}{(x+y)^2} = \int_1^4 \left[-\frac{1}{(x+y)}\right]_1^{4-x} dx$$
$$= \int_1^4 \left(\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{4}\right) dx = \left[\log(1+x) - \frac{x}{4}\right]_1^4$$
$$= \log\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{4}.$$
- $$\iint_D e^{2x+2y}\ dxdy = \int_0^1 e^{2x}dx \int_{-x}^{x} e^{2y}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\left[e^{2y}\right]_{-x}^{x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (e^{4x} - 1)dx = \left[\frac{e^{4x}}{8} - x\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^4 - 9\right).$$