# LM 256 - TD n°5

7 octobre 2011

Exercice 20, feuille 1. a) Pour tous $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + yz + z^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + xz$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = xy + 3xz^2$.
(b) Le calcul est plus facile si l'on écrit, pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{y^2 \log x}$. On a alors pour ces $x$, $y$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{x} e^{y^2 \log x} = y^2 x^{y^2-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \log x e^{y^2 \log x} = 2yx^{y^2} \log x$.
(c) On calcule directement, et pour $x$, $z \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{x/y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{y^2}(e^{x/y} + e^{z/y})$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y} e^{z/y}$.
(d) Pour $(x, y)$ tel que $x^2 + y^2 < 1$, c'est-à-dire $(x, y)$ dans le disque unité ouvert, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$.

Exercice 21, feuille 1. (a) Il est toujours bon de spécifier succinctement l'ensemble (le plus large possible, tant que cela ne mène pas à d'interminables discussions) sur lequel $f$ est définie et différentiable ; ici, il s'agit de $(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}) \cup (\mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{-*})$, et sur cet ensemble, $df = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$ (attention, si l'on veux voir $f$ comme somme de logarithmes en général, il faut écrire $f(x, y) = \ln |x| + \ln |y|$).
(b) Ici, $f$ est définie et différentiable sur $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, $df = 2x(1+y^2z^2)dx + \big(2yx^2z^2 + z\cos(yz)\big)dy + \big(2zx^2y^2 + y\cos(yz)\big)dz$.
(c) On peut décrire l'ensemble de définition et de dérivabilité par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ y + z > 0,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi+y}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$. Dans cette partie d'espace, on a $df = \frac{3}{\cos^2(3x-y)}dx + \left(\frac{-1}{\cos^2(3x-y)} + \log 6 \cdot 6^{y+z}\right) dy + \log 6 \cdot 6^{y+z} dz$.

Exercice 1, feuille 2. 1. Pour parvenir à l'identité demandée, on fait le calcul de $a \wedge (b \wedge c)$ (selon la « règle du gamma » comme je l'ai expliqué en TD) :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \left[ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(et les calculs sont considérablement réduits si l'on remarque que dans tous les cas, pour passer d'une ligne à la suivante il suffit de permuter les indices dans le sens $1 \to 2 \to 3 \to$

1). On remarque alors qu'en ajoutant et en retranchant $a_1b_1c_1$ à la première ligne du résultat, on peut écrire celle-ci $b_1(a \cdot c) - c_1(a \cdot b)$. De même, la deuxième et la troisième lignes s'écrivent respectivement $b_2(a \cdot c) - c_2(a \cdot b)$ et $b_3(a \cdot c) - c_3(a \cdot b)$. Autrement dit, on a exactement les composantes du vecteur $(a \cdot c)b - (a \cdot b)c$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour la non-associativité de $\wedge$, on a en utilisant cette formule pour tous $a$, $b$, $c$ : $a \wedge (b \wedge c) - (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) + c \wedge (a \wedge b)$ (d'après l'anti-commutativité de $\wedge$, $u \wedge v = -v \wedge u$), ce qui vaut donc $(a \cdot c)b - (a \cdot b)c + (c \cdot b)a - (c \cdot a)b = (a \cdot b)c + (c \cdot b)a$. Or pour prouver que $\wedge$ n'est pas associatif, on veut trouver $a$, $b$ et $c$ tels que cette différence soit non-nulle ; un rapide examen nous incite à prendre $a = b$, par exemple ${}^t(1, 0, 0)$, et $c$ orthogonal à $a$ et $b$, par exemple ${}^t(0, 1, 0)$. On obtient alors $a \wedge (b \wedge c) - (a \wedge b) \wedge c = c \neq 0$, et l'on en déduit que $\wedge$ n'est pas associatif. On prendra donc garde à ne pas écrire de choses du genre $a \wedge b \wedge c$, qui n'auraient pas un sens précis.

2. On peut pour cette question calculer le déterminant $3 \times 3$ $\det[a, b, c]$ selon la règle de Sarrus, mais il y a plus rapide ; si en effet on utilise le développement par rapport à la première colonne, on a :

$$\begin{aligned} \det[a, b, c] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

en permutant les deux lignes du second déterminant $2 \times 2$. Or on remarque que le premier de ces déterminants, $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, n'est autre que la première composante de $b \wedge c = b_2c_3 - b_3c_2$ ; de même, le second est la seconde composante de $b \wedge c$ et le troisième est la troisième de ces composantes. Autrement dit, $\det[a, b, c] = a_1 \cdot (b \wedge c)_1 + a_2 \cdot (b \wedge c)_2 + a_3 \cdot (b \wedge c)_3$, ce qui est bien égal à $a \cdot (b \wedge c)$, quantité que l'on appelle *produit mixte de* $a$, $b$ et $c$. Pour obtenir la seconde égalité, $\det[a, b, c] = (a \wedge b) \cdot c$, il suffit de permuter les colonnes $a$ et $c$ (et multiplier par $-1$) dans $\det[a, b, c]$ — ou tout simplement dévelloper par rapport à la colonne de droite — et l'on a donc $a \cdot (b \wedge c) = \det[a, b, c] = -\det[c, b, a] = -c \cdot (b \wedge a) = c \cdot (a \wedge b) = (a \wedge b) \cdot c$. Cette formule nous dit donc, étant donnés trois vecteurs, comment échanger produit scalaire et produit vectoriel (sans oublier le re-parenthésage). En somme, il suffit de garder l'ordre d'écriture $a$, $b$, $c$, et d'écrire les produits dans un ordre tel que l'expression obtenue ait un sens (produit vectoriel, puis produit scalaire).

3. La première question nous disait que pour tous $u$, $v$, $w$, on avait $u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$ (je fais exprès de le réécrire avec des lettres différentes, car ici $a$, $b$ et $c$ vont jouer un autre rôle que celui qu'ils jouaient en 1.). En posant $u = a \wedge b$, $v = c$ et $w = d$, on a : $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = ((a \wedge b) \cdot d)c - ((a \wedge b) \cdot c)d$. Apparaissent donc deux produits mixtes (celui de $(a, b, d)$ et celui de $(a, b, c)$), et en échangeant produit scalaire et produit vectoriel comme nous l'enseigne la question 2., il vient $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) =$

$\big(a\cdot(b\wedge d)\big)c-\big(a\cdot(b\wedge c)\big)d$, ce qui est la première forme du résultat à démontrer. Pour la seconde, on part de $(a\wedge b)\wedge(c\wedge d)=-(c\wedge d)\wedge(a\wedge b)$, et l'on procède de même.

Je rajoute les corrigés des exercices 17, 18 et 19 de la feuille 1, que l'on n'a pas vu en TD mais qui fournissent tout un panel de cas pathologiques de calcul différentiel à deux variables. Ceci dans le but de vous convaincre que s'il y a des dénominateurs posant problème, il peut se passer des choses assez contraires à l'intuition, et que réciproquement, si on a affaire à de braves fonctions qui sont par exemple des composées de polynômes et de fonctions lisses, alors on peut faire les calculs demandés sans trop se méfier.

Exercice 17. Comme $(0,0)$ appartient à la droite d'équation $x+y=0$ (appelons-la $D$ une fois pour toutes), droite sur laquelle on voit que la formule définissant $f$ lorsque $x\neq y$ diverge, on se doute donc que cette droite va jouer un rôle dans le défaut de continuité de $f$ en $(0,0)$. Néanmoins, lorsque l'on suit cette droite vers l'origine, on a, pour tout $x\neq 0$, $f(x,x)=0$ par définition de $f$, et cette quantité tend bien vers $0=f(0,0)$. On doit donc sortir de $D$ pour trouver un contre-exemple à la continuité de $f$ en l'origine.

Essayons par exemple une autre droite passant par l'origine, que l'on paramètre comme étant l'ensemble des $(\alpha t,\beta t)$, $t$ parcourant $\mathbb{R}$, avec $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, et, de manière générale, non colinéaire à $(1,-1)$ (soit $\alpha+\beta\neq 0$, pour que notre droite ne soit pas $D$). Alors pour tout $t$ non-nul, c'est-à-dire en dehors de l'origine, $(\alpha t,\beta t)\notin D$ et :

$$f(\alpha t,\beta t)=\frac{\alpha\beta t^2}{(\alpha+\beta)t}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t\xrightarrow{t\to 0}0,$$

ce qui ne nous donne toujours pas le contre-exemple désiré.

Faisons alors la remarque suivante : si l'on se rapproche de manière orthogonale d'un point de $D$ qui n'est pas l'origine, par exemple en suivant la demi-droite $\big\{(x_0+t,-x_0+t),t>0\big\}$ avec $x_0\neq 0$, alors pour $t>0$ on a $f(x_0+t,-x_0+t)=\frac{-x_0^2+t^2}{2t}$, ce qui tend vers $-\infty$ lorsque $t$ tend vers 0. Nous retiendrons donc le fait suivant : lorsque l'on se dirige vers l'origine selon un angle constant, $f$ tend vers 0, et lorsque l'on se dirige orthogonalement vers un point de $D$ qui n'est pas $(0,0)$, on tend vers (moins) l'infini. Intuitivement, il faudrait donc trouver un équilibre entre ces deux manières de tendre vers $D$, de sorte que $f$ tende vers une quantité entre zéro et l'infini, soit une quantité finie non-nulle.

Plus prosaïquement, il est tentant au vu de ceci de tendre vers l'origine en suivant une courbe passant par $(0,0)$ et lisse en ce point, telle que $D$ soit la tangente à cette courbe en ce point, et de prendre une telle courbe confinée strictement à un des demi-plans délimités par $D$ en dehors de $(0,0)$ pour éviter les problèmes hors de ce point. Si l'on cherche de plus cette courbe comme étant le graphe d'une fonction, soit un ensemble du type $\big\{\big(t,g(t)\big)\big\}$, on va donc vouloir pour $g$ une fonction définie en 0 avec $g(0)=0$, dérivable en 0 de dérivée $-1$, et telle que $g(t)>-t$ par exemple pour tout $t\neq 0$.

On trouve rapidement une fonction comme $g:t\mapsto -t+t^2$ satisfaisant à cette analyse, et pour tout $t$ non nul on a alors :

$$f(t,g(t)) = \frac{-t^2+t^3}{t^2} = -1+t \xrightarrow{t\to 0} -1 \neq 0 = f(0,0),$$

ce qui nous permet (enfin) d'affirmer que $f$ n'est pas continue $(0,0)$.

On veut maintenant voir que la restriction de $f$ au cadran supérieur droit est elle continue en l'origine. Remarquons donc que pour $x$ et $y$ positifs tels que $(x,y) \neq (0,0)$, $0 \leq x \leq \max(x,y) \leq x+y$, et de même $0 \leq x \leq x+y$, d'où $0 \leq xy \leq (x+y)^2$, et donc $0 \leq f(x,y) \leq \frac{(x+y)^2}{x+y} = x+y$, et le membre de droite tend vers 0 lorsque $(x,y)$ tend vers $(0,0)$. Par encadrement, on a donc bien que $f$ restreinte à $(\mathbb{R}^+)^2$ est continue en l'origine. On peut aussi utiliser ici les coordonnées polaires, et dire que pour $r > 0$, $\theta \in [0,\pi/2]$,

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r(\cos\theta+\sin\theta)} \\ &= \frac{r}{2}\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}(\cos(\pi/4)\cos\theta+\sin(\pi/4)\sin\theta)} \\ &= \frac{r}{2\sqrt{2}}\frac{\sin 2\theta}{\cos(\theta-\pi/4)}. \end{aligned}$$

Or le numérateur de la seconde fraction est majoré en valeur absolue par 1, tandis que son dénominateur est minoré par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; la fraction est donc majorée en valeur absolue (par $\sqrt{2}$). On en déduit que $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ tend vers 0 lorsque $r$ tend vers 0 (et $\theta$ a pour seule contrainte de rester dans $[0,\pi/2]$), soit lorsque que $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ tend vers l'origine en restant dans le cadran supérieur droit.

Exercice 18. 1. Remarquons tout d'abord que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, puisque le dénominateur $x^4+y^2$ ne s'y annule jamais. Il faut donc voir ce qui se passe en l'origine. On paramètre $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D} = \{(\alpha t, \beta t), t \in \mathbb{R}\}$, pour un certain couple de réels $(\alpha,\beta)$ non nul (paramétrisation plus souple que les équation $y = ax$ ou $x = by$). On a alors, le long de $\mathcal{D}$, en dehors de l'origine, *i.e.* pour $t$ non nul, $f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha^2\beta t^3}{\alpha^4 t^4+\beta^2 t^2}$. Si alors $\beta$ est non nul, le dénominateur est équivalent à $\beta^2 t^2$ lorsque $t$ tend vers 0, donc $f(\alpha t, \beta t)$ équivaut à $\frac{\alpha^2}{\beta}t$, et tend vers 0 avec $t$, donc $f$ réduite à $\mathcal{D}$ est continue en 0 et donc continue. Si à présent $\beta$ est nul, alors $f(\alpha t, \beta t) = 0$, ce qui tend vers 0 (!) avec $t$, et la même conclusion s'en suit.
2. On pourrait croire que ceci nous permet de dire que $f$ est continue en 0. Or, si l'on se place sur la parabole $\{(t,t^2)\}$ qui passe par l'origine, on a pour $t$ non nul $f(t,t^2) = \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$, ce qui manifestement ne tend pas vers 0 quand $t$ tend vers 0. Surprenant, n'est-ce pas ?

Exercice 19. On commence par montrer que $f$ est continue en $(1,0)$. Supposons $(x,y) \neq (1,0)$ ; alors on peut écrire $f(x,y)$ sous la forme $\frac{(x-1)y\cdot(x+1)y^2}{(x-1)^2+y^2}$. Or on a toujours $|(x-$

$1)y| \leq \frac{1}{2}\big((x-1)^2+y^2\big)$, donc $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|x+1|y^2$ dès que $(x,y) \neq (1,0)$. Faisons à présent tendre $(x,y)$ vers $(1,0)$ ; il est clair que $|x+1|y^2$ tend vers 0, et donc par encadrement $f(x,y)$ tend vers $0 = f(1,0)$ (la dernière égalité par définition de $f$) : $f$ est continue en $(1,0)$.

Étudions maintenant la dérivabilité de $f$ en ce point ; on commence par les dérivées partielles. Pour la dérivée partielle selon $x$, on fixe $y = 0$ et il s'agit donc de voir que la fonction d'une variable $x \mapsto f(x,0)$ admet une dérivée en $x = 1$. Or cette dernière fonction est identiquement nulle (si $x \neq 1$, $f(x,0) = \frac{(x^2-1)0^3}{(x-1)^2+0^2=0}$, tandis que $f(1,0) = 0$ par définition) ; elle admet donc bien une dérivée, nulle, en $x = 1$. Par conséquent, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ existe et vaut 0.

De même, pour la dérivée partielle selon $y$, on fixe $x = 1$ et on regarde la fonction $y \mapsto f(1,y)$ ; on a encore la fonction nulle, car lorsque $y \neq 0$, on peut favoriser le numérateur par $(x-1)$ dans la formule donnant $f(x,y)$, et toujours car $f(1,0) = 0$. Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ existe et vaut 0.

Cela ne suffit toutefois pas à conclure quant à la *différentiabilité* de $f$ en $(1,0)$. D'après les valeurs des dérivées partielles, si $f$ admet une différentielle en ce point, celle-ci est nulle. Autrement dit, $f$ est différentiable en $(1,0)$ *ssi* $f(x,y) = f(x,y) - 0 = o_{(1,0)}\big(\|(x-1,y)\|\big)$, et alors sa différentielle en ce point est nulle. Or on a vu que $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|x+1|y^2$ pour tout $(x,y) \neq (1,0)$ ; d'une part, au voisinage de $(1,0)$, $|x+1|$ est borné (par exemple, $|x+1| \leq 3$ si $0 \leq x \leq 2$), et d'autre part $y^2 \leq (x-1)^2+y^2 = o_{(1,0)}\big(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\big)$ (si l'on tend vers 0, on est négligeable devant sa racine carrée), d'où : $f(x,y) = o_{(1,0)}\big(\|(x-1,y)\|\big)$, et donc $f$ est différentiable en $(1,0)$, de différentielle nulle.