Formule pour calculer le flux : le cas d'une paramétrisation générale

Soit $\mathbf{X} : \Delta \to S$ une paramétrisation de la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ comme dans la section 5.1 de la poly, c.a.d., $\mathbf{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in S$ pour $(u,v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$.
Soit $\mathbf{X}'_u$ et $\mathbf{X}'_v$ les dérivées partielles de $\mathbf{X}$ (notées $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}$ et $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$ dans la poly).
Soit $\Omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$ une 2-forme et considerons $\int\int_S \Omega$ ou, autrement dit, le flux du champ $\mathbf{V} := (P, Q, R)$ (associé à Ω) à tranvers de S, noté dans la poly par $\int\int_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\sigma}$ ou $\int\int_S \mathbf{V} \cdot d\sigma$.
On a expliqué dans le cours que la Définition 5.2.1 aboutit à la formule suivante

$$\int\int_S \Omega = \int\int_\Delta \Big(P\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\,\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \Big) du\,dv,$$

où le Jacobiens $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$ etc. sont définis comme en la section 4.3, c.a.d.,

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \det \begin{bmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{bmatrix}$$

etc. On reconnait ensuite que l'expression sous l'intégrale est égale au déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{X}'_u & \mathbf{X}'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & x'_z \end{bmatrix}$$

et, par conséquent, au produit mixte $\mathbf{V} \cdot \big(\mathbf{X}'_u \wedge \mathbf{X}'_v\big)$. On obtient alors la formule le flux du champ $\mathbf{V}$ à tranvers de la surface S

$$\int\int_S \mathbf{V} \cdot d\sigma = \int\int_\Delta \mathbf{V} \cdot \big(\mathbf{X}'_u \wedge \mathbf{X}'_v\big)\, du\,dv,$$

qui est assez pratique pour le calcul direct du flux (ou des intégrales de 2-formes différentielles).