UPMC 2011-2012
LM 201
Contrôle des connaissances en temps limité : deux heures.

**Exercice 1.** Montrer *soigneusement* que l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

**Exercice 2.** L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0,\ f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est -elle de classe $C^1$ ?

**Exercice 3.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$. Montrer que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, et conclure.

**Exercice 4.** Déterminer le polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$P(1) = 1, \quad P'(1) = 2, \quad P''(1) = 3, \quad P'''(1) = 4.$$

On privilégiera une solution simple et courte à une réponse longue et alambiquée.

**Exercice 5.** Factoriser le polynôme $X^6 - 27$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

**Exercice 6.** Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$.

**Exercice 7.** Résoudre l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$.

**Exercice 8.** Résoudre l'équation différentielle $y' + xy = x^2 + 1$.

**Exercice 9.** Soit $f : ]-\pi, \pi[ \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \neq 0,\ f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ et $f(0) = l$, où $l$ est un certain réel.
1) Déterminer $l$ pour que $f$ soit continue en 0. On conserve cette valeur de $l$ dans les questions suivantes.
2) Calculer un développement limité de $f$ à l'ordre 2 en 0.
3) Que peut-on conclure pour $f$ ?

**Exercice 10.** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ (définie au voisinage de 1).