UPMC 2011-2012
LM 201
Feuille d'exercices n°4

Exercice 1. Démontrer

$$x^2 = o_{\pm\infty}\big(x^4\big), \qquad x^4 = o_0\big(x^2\big), \qquad x^n\varepsilon(x) = o_0\big(x^n\big), \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow{x\to 0} 0 \text{ et } n \in \mathbb{N},$$
$$\frac{1}{x^2} = o_{\pm\infty}\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad \frac{1}{x} = o_0\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Exercice 2. Montrer que : $x^2 + x + 5 \sim_{\pm\infty} x^2$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sim_{\pm\infty} \frac{1}{x}$.

Exercice 3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$.

Exercice 4. Montrer que : $x-1 = O_{\pm\infty}(x^2)$, $1 = O_{\pm\infty}(1-x^2)$, $x = O_{\pm\infty}(x^2)$ et $\frac{1}{x} = O_{\pm\infty}(\frac{1}{x^2})$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.

La fonction prolongée est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6. On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0, mais qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 7. Soit f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{24x}{1+x^2}$. Montrer que $f(x) = O_0(x)$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée n-ème de $x \mapsto x^2(1-x)^n$.

Exercice 9. Soient n, $m \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi : x \mapsto \frac{(x+1)^{1/n} - x^{1/n}}{x^{1/m}}$ sur r$\mathbb{R}^{+*}$. Donner un équivalent de φ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 10. Calculer :

a) $\sin \arcsin \frac{1}{3}$;
b) $\arcsin \sin \frac{2\pi}{3}$;
c) $\arcsin \sin \frac{5\pi}{3}$;
d) $\arccos \cos \frac{5\pi}{3}$;
e) $\arctan \tan \frac{7\pi}{6}$.

Exercice 11. Calculer, quand l'expression considérée a un sens :

a) $\cos \arctan x$;
b) $\sin \arctan x$;
c) $\cos \arcsin x$;
d) $\sin \arccos x$;
e) $\tan \arcsin x$;

f) $\tan \arccos x$

Exercice 12. Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en précisant ensembles de définition et de dérivabilité :
a) $x \mapsto \arcsin \sqrt{x}$;
b) $x \mapsto \arcsin \frac{x}{3}$;
c) $x \mapsto x^2 \arctan(x^2)$;
d) $x \mapsto \arctan \sin(2x)$;
e) $x \mapsto \ln \arctan(x^2)$;
f) $x \mapsto \arctan \frac{x+1}{x-1}$. Que remarque-t-on ? Tracer le graphe de la fonction.

Exercice 13. Montrer que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$:
a) $\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$;
b) $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}$.

Exercice 14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^n \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Étudier, suivant la valeur de n, si
a) f est continue sur $\mathbb{R}$;
b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$;
c) f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15.
1) Pour $t > 0$, calculer $\arctan t + \arctan \frac{1}{t}$.
2) Pour $x > \frac{1}{2}$, on pose $f(x) = (x^2 - 1) \arctan \frac{1}{2x-1}$.
   a) Peut-on prolonger continûment f en $\frac{1}{2}$? Si oui, le prolongement est-il dérivable en $\frac{1}{2}$?
   b) Étudier la branche infinie ; existe-t-il une asymptote oblique ?

Exercice 16.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$. Calculer ses dérivées successives.
b) On garde $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée d'ordre n de f_{2n} directement, et en utilisant la formule de Leibniz pour $(f_n)^2$. En déduire l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n}^2 = \binom{n}{2n}$.

Exercice 17, équations différentielles.
1) Résoudre $(1+t^2)y' + y = 0$.
2) Résoudre $(1-t^2)y' - y = 1 - t - t^2$.
3) L'équation $xy' + y = 1$ admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?
4) Même question pour $(1+t)y' + y = (1+t)\sin t$.
5) Déterminer sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ l'ensemble des solutions de $y' \cos t + 2y \sin t = 1 + \sin^2 t$ vérifiant $y(0) = 0$.
6) Résoudre $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
7) Résoudre $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.
8) Résoudre $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 1 = 0$ en utilisant le changement de variable $x = \tan t$.