UPMC 2011-2012
LM 201
Feuille d'exercices n°3

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^3 + 3X - 6\sqrt{3}$.

a) Montrer que $\sqrt{3}$ est racine de P et en déduire toutes les racines réelles de P.

b) Montrer que $\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}$ est une racine de P, et conclure.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P_n = (X-2)^{2n} - (X-1)^n - 1$ est divisible par $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 1 est racine triple de $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$

Exercice 4. Pour quels entiers naturels n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 5. On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\big((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\big).$$

a) Déterminer le degré de P_n en fonction de n.

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{2k} = \sum_{p=0}^{k} \binom{2k+1}{2p+1} X^{2k-2p}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de P_n et montrer qu'elles sont réelles. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la décomposition en facteurs irréductibles de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

d) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{2k} = (2k+1)\prod_{p=1}^{k} \big(X^2 - \mathrm{cotan}^2(\frac{p\pi}{2k+1})\big)$.

Exercice 6. Déterminer le degré du polynôme $(X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$ n'admet pas de racine multiple.

Exercice 8. Résoudre

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ xyz = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Exercice 9. Soit $P = X^4 + 12X - 5$. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ sachant qu'il admet deux racines dont le produit vaut -1.

Exercice 10. Factoriser $(X^2+1)^2 + (X^2 - X - 1)^2$.

Exercice 11. Décomposer en éléments simples $F = \frac{X^4+5}{X^3+2X^2-X-2}$.

Exercice 12. Décomposer en éléments simples $F_1 = \frac{1}{X(X-1)^2}$, $F_2 = \frac{1}{X^5+2X^3+X}$.

Exercice 13. Soient $P_1 = X^2+1$, $P_2 = X^2+X-1$ et $P_3 = X^2+X$. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ pour tout P de degré $\leq n$.

a) Montrer que Δ est bien définie et est linéaire.

b) Déterminer le noyau de Δ.

c) En déduire que Δ est surjective.

Exercice 15.

a) Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes X^4-1, X^5-1 et $(X^2-X+1)^2-1$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]0,\pi[$. Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1$.

c) Dans $\mathbb{R}[X]$, factoriser X^4+X^2+1, X^4+X^2-6 et X^8+X^4+1.

Exercice 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $L_n = \frac{n!}{(2n)!}\big((X^2-1)^n\big)^{(n)}$.

a) Montrer que pour tout n, L_n est unitaire de degré n.

b) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,dt = 0$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n possède n racines simples, toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

a) Calculer $f_0, \dots, f_3$.

b) Pour $n \geq 1$ et $x \in [-1,1]$, exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

c) Établir que pour tout $n \geq 0$, il existe un unique polynôme réel T_n, dont la fonction polynomiale associée sur $[-1,1]$ est f_n.

d) Pour $n \geq 0$, déterminer degré et coefficient dominant de T_n.

e) Pour $n \geq 0$, observer que T_n possède n racines distinctes, que l'on exprimera, toutes dans dans $]-1,1[$.

Exercice 18. Soit $n \geq 1$. Décomposer en éléments simples $F_n = \frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$.

Exercice 19. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F = \frac{X^{n-1}}{X^n-1}$ $(n \geq 1)$.