UPMC 2011-2012
LM 201
Feuille d'exercices n°2

Exercice 1. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est donné par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Exercice 2. Étudier la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{2n}\right)$.

Exercice 3. Déterminer la limite des suites de terme général :
a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$;
b) $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose :

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

a) Établir que pour tout $p > 1$, $\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x}$.
b) Établir la nature de la suite (S_n).
c) Établir que pour tout $n \geq 1$, $S'_{2n} = S_n$, et en déduire la limite de la suite (S'_n).

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. On pose $v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
a) Montrer que (v_n) est croissante.
b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \frac{u_n+v_n}{2}$.
c) En déduire que (v_n) converge vers ℓ.

Exercice 6. On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$.
a) Pour tout $n \geq 1$, exprimer u_n à l'aide de factorielles.
b) Montrer que (u_n) converge.
c) Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que (v_n) converge et déterminer la limite de (u_n).

Exercice 7. Montrer que pour out $n \geq 2$, $X^n + X - 1$ possède une unique racine positive, que l'on note x_n. Montrer que (x_n) possède une limite finie ℓ, et la déterminer.

Exercice 8. Pour tout $n \geq 0$, soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.
a) Montrer que (I_n) tend vers 0 en décroissant.
b) Pour $n \geq 0$, simplifier $I_n + I_{n+1}$ en déduire une expression de I_n à l'aide d'un symbole sommatoire.
c) Montrer que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.
d) Exploiter les intégrales $J_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$, $n \geq 0$, pour déterminer $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 9. Etudier les suites définies par

a) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
b) $v_0 = 0$, $v_1 = 9$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{v_n}{4}$.
c) $w_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = -2w_{n+1} - 4w_n$.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout $n \geq 1$, $A^n = u_n A + v_n A^2$.

Exercice 11. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $k \geq 1$.
a) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
b) Déterminer un équivalent simple de (S_n).

Exercice 12. On étudie la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
a) Établir que pour tout $t > -1$, $\ln(t+1) \leq t$ et en déduire $\ln(t+1) \geq \frac{t}{t+1}$ pour $t > -1$.
b) Observer que $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln n + 1$ pour tout $n \geq 1$.
c) Montrer que la suite de terme général $u_n = S_n - \ln n$ est convergente. On appelle sa limite constante d'Euler.