UPMC 2011-2012
LM 201
Feuille d'exercices n°1

Exercice 1. Donner l'expression de $\cos(4t)$ et de $\sin(4t)$ et fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Exercice 2. Transformer $\cos a \cos b$ en somme et $\cos p + \cos q$ en produit.

Exercice 3. Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$.

Exercice 4. Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta$.

Exercice 5. Calculer
a) les racines quatrièmes de $4i$;
b) les racines cinquièmes de $\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$;
c) Les racines carrés de i ;
d) les racines carrées de $-15 + 8i$.

Exercice 6. Résoudre :
a) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$;
b) $2iz^2 - 3z - 1 - 3i = 0$;
et en déduire la factorisation des polynômes en jeu dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
Montrer que : $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, et si $n \geq 1$, que : $\forall p \in [\![0, n-1]\!]$, $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

Exercice 8. Déterminer les racines avec leur multiplicité ainsi que la factorisation sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ du polynôme
$$P = X^3 - X^2 - X + 1.$$

Exercice 9. Les polynômes suivants sont-ils scindés dans $\mathbb{R}[X]$?
$$P = X^3 - 3X^2 + 2 \quad \text{et} \quad Q = X^3 + 2X^2 + 2X + 1.$$

Exercice 10. Factoriser sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: $P = X^4 + 1$.

Exercice 11. Calculer, pour $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=1}^{n} q^k$ $(q \in \mathbb{R})$.

Exercice 12. Montrer que :
a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$;
b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}$.

Exercice 13. Déterminer les racines quatrièmes de -16 sous forme géométrique.

Exercice 14. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}$. Établir une relation analogue pour $e^{ix} - e^{iy}$.

Exercice 15. Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \cos 2kx = \begin{cases} \frac{\sin[(n+1)x]\cos x}{\sin x} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$.

Exercice 16. Résoudre
a) $(z-i)^n = 1$;
b) $(z-1)^n = (z+1)^n$ et montrer qu'il y a $(n-1)$ solutions réelles distinctes.

Exercice 17. Pour tout couple d'entiers naturels (k, ℓ) calculer $I = \int_0^\pi \cos(kt)\sin(\ell t)\, dt$.

Exercice 18. Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.

Exercice 19. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 20. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 21. Exprimer, à l'aide de factorielles, les produits $2 \cdot 4 \cdots 2n$ et $1 \cdot 3 \cdots (2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22. Montrer que : $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

Exercice 23. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$. Quel sont le degré et le coefficient dominant de P_n ?

Exercice 24. Pour $z \in \mathbb{C}$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{k-1}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 25. Pour $n \geq 2$, calculer $\sum_{k=0} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $\prod_{k=0} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Exercice 26. Résoudre, a, b et c étant trois réels, et $j = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, le système

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2 z = b \\ x + j^2 y + jz = c. \end{cases}$$

Exercice 27. Exprimer $\cos^{2p} x$ et $\cos^{2p+1} x$ à l'aide de termes linéaires en $\cos(kx)$ ($p, k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$). Même question avec sin à la place de cos.

Exercice 28.
1) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.
2) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\, dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.
3) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{2n+1}$.
4) En déduire : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.