LM 201
Feuille 3 - Exercices complémentaires

Avertissement : la rédaction de ce corrigé peut être un peu elliptique par rapport à celle exigée en LM 201. L'utilité de ces corrigés réside donc plutôt en les réponses qu'en la manière dont elles sont écrites.

Exercice 3. Rappelons qu'un nombre x est racine (au moins) k-ième d'un polynôme Q de degré $\geq k$ si (définition) $Q(x) = Q'(x) = \ldots = Q^{(k-1)}(x) = 0$. On doit donc calculer ici $P_n(1)$, $P_n'(1)$ et $P_n''(1)$. Or $P_n(1)$ est immédiatement nul, car la somme des coefficient de P_n vaut 0. Ensuite, $P_n' = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + n + 2$, et là encore (c'est presque aussi évident que précédemment), la somme des coefficients est nulle, et donc $P_n'(1) = 0$. Enfin, $P_n'' = n(n+1)(n+2)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1}$, et la même conclusion s'en suit (somme des coefficients nulle, donc 1 est racine). 1 est donc racine au moins triple de P_n. Vérifions, pour $n \geq 2$ (pour $n = 1$, comme le polynôme considéré est de degré 3, une racine ne peut pas être plus que triple, par définition), que 1 n'est pas racine quadruple ; $P_n^{(3)} = n^2(n+1)(n+2)X^{n-1} - (n-1)n(n+1)(n+2)X^{n-1}$, et la somme de ses coefficients n'est pas nulle, donc 1 n'est pas racine de $P_n^{(3)}$. On a donc vérifié que 1 est exactement racine triple de P_n.

Exercice 6. C'est comme le a) de l'exercice 5, et l'on remarque ici que les coefficients des termes de degrés $2n$ et $2n-2$ (ainsi que ceux des termes de degré $2n-1$ et $2n-3$ qui n'apparaissent même pas dans les calculs) sont nuls, au contraire de celui du terme de degré $2n-4$ (en supposant $n \geq 2$), qui vaut $n(n+1)$, et donc le polynôme considéré est de degré $2n-4$. Si $n = 1$ ou 0, le polynôme est nul, donc de degré $-\infty$.

Exercice 9. On va commencer par exprimer P comme produit de deux trinômes du second degré, à coefficients *a priori* complexes. En effet, même si l'on sait d'après le théorème de factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ que P s'exprime comme produit de deux trinômes réels, on peut grâce à l'indication écrire, dans $\mathbb{C}[X]$, $P = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX - 1)$ (*), car si α et β sont les deux racines de P de produit -1 (dont on ne sait pas si elles sont réelles ou non), elles sont distinctes (car sinon $\alpha = \beta = \pm i$ qui n'est pas racine de P), et l'on sait d'après le lemme de Gauß que $(X-\alpha)(X-\beta) = (X^2+cX-1)$, en notant $c = -(\alpha+\beta)$, divise P.

En développant (*), il vient $P = X^4+(a+c)X^3+(b-1+ac)X^2+(bc-a)X-b$, d'où, en comparant avec $P = X^4+12X-5$, $b=5$, $a+c=0$ *i.e.* $c=-a$, et $12 = bc-a = -a(b+1) = -6a$, d'où $a=-2$ et $c=2$. On vérifie que la dernière relation, $0 = b-1+ac$, est valide, et donc finalement redondante. On a ainsi $P = (X^2-2X+5)(X^2+2X-1)$. Le trinôme de droite se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ en $\big(X-(-1+\sqrt{2})\big)\big(X-(-1-\sqrt{2})\big)$. Celui de gauche, à discriminant $-16 = (4i)^2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, et se factorise en $\big(X-(1+2i)\big)\big(X-(1-2i)\big)$. La décomposition réelle de P est donc $(X^2-2X+5)\big(X-(-1+\sqrt{2})\big)\big(X-(-1-\sqrt{2})\big)$, et sa décomposition complexe est $\big(X-(1+2i)\big)\big(X-(1-2i)\big)\big(X-(-1+\sqrt{2})\big)\big(X-(-1-\sqrt{2})\big)$.

Exercice 10. Notons (avec beaucoup d'originalité) P le polynôme à factoriser. Alors, en passant par $\mathbb{C}[X]$, on peut écrire $P = \big(X^2+1+i(X^2-X-1)\big)\big(X^2+1-i(X^2-X-1)\big) = \big((1+i)X^2-iX+1-i\big)\big((1-i)X^2+iX+1+i\big)$, ce qui en sortant $(1+i)$ et $(1-i)$ (dont le produit vaut 2) donne $P = 2\left(X^2-\frac{1+i}{2}X-i\right)\left(X^2-\frac{1-i}{2}X+i\right)$. Le premier trinôme a pour discriminant $\left(-\frac{1+i}{2}\right)^2 + 4i = \frac{9i}{2} = \left(3\frac{1+i}{2}\right)^2$, d'où ses racines $\frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{2}+3\frac{1+i}{2}\right) = 1+i$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{2}-3\frac{1+i}{2}\right) = -\frac{1+i}{2}$. En remarquant que le second trinôme est le conjugué du premier, on a donc la factorisation de P sur $\mathbb{C}[X]$:

$$P = 2\big(X-(1+i)\big)\left(X-\tfrac{1+i}{2}\right)\big(X-(1-i)\big)\left(X-\tfrac{1-i}{2}\right).$$

En regroupant les termes conjugués *i.e.* premier et troisième binôme d'une part, deuxième et quatrième binôme d'autre part, on obtient la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = 2(X^2-2X+2)\left(X^2-X+\tfrac{1}{2}\right) = (X^2-2X+2)(2X^2-2X+1),$$

et comme il se doit ces deux trinômes réels sont à discriminant < 0.

Exercice 13. Comme $P_3-P_1 = X-1$, $P_2-(P_3-P_1) = X^2$, $2P_1-P_2+P_3 = P_1-\big(P_2-(P_3-P_1)\big) = 1$ et $2P_3-P_2+P_1 = P_3-\big(P_2-(P_3-P_1)\big) = X$, notre famille engendre la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, et puisqu'elle contient trois éléments en est donc elle-même une base.

Exercice 15. a) On fait les deux premiers avec les racines quatrièmes et cinquièmes de l'unité, ce qui donne dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \text{ et } X^5 - 1 = \prod_{k=0}^{4} \left(X - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)$$

En regroupant les termes conjugués il vient $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$ et $X^5 - 1 = (X-1)\Big(X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1\Big)\Big(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 1\Big)$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{1+\sqrt{5}}$ (pourquoi ?), on a finalement

$$X^5 - 1 = (X-1)\Big(X^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}X + 1\Big)\Big(X^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1\Big).$$

Pour le dernier, on a $(X^2 - X + 1)^2 - 1 = (X^2 - X)(X^2 - X + 2) = X(X-1)(X^2 - X + 2)$. Le discriminant de $X^2 - X + 2$ vaut $-7 < 0$. Ses racines sont donc $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, et $(X^2 - X + 1)^2 - 1 = X(X+1)\Big(X - \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\Big)\Big(X - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\Big)$. La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est donnée ci-dessus.
b) En écrivant $Y^2 - 2(\cos a)Y + 1 = Y^2 - \Big(e^{ia} + e^{-ia}\Big)Y + 1 = \Big(Y - e^{ia}\Big)\Big(Y - e^{-ia}\Big)$, il est clair que $X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1 = \Big(X^n - e^{ia}\Big)\Big(X^n - e^{-ia}\Big)$. Or si $z \in \mathbb{C}$, $z^n = e^{ia}$ *ssi* $z = e^{i\frac{a+2k\pi}{n}}$ pour un $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. On en déduit (il faut quand même regarder les multiplicités) que $\Big(X^n - e^{ia}\Big) = \prod_{k=0}^{n-1} X - e^{i\frac{a+2k\pi}{n}}$. De même, $\Big(X^n - e^{-ia}\Big) = \prod_{k=0}^{n-1} X - e^{i\frac{-a+2k\pi}{n}}$, d'où :

$$X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \Big(X - e^{i\frac{a+2k\pi}{n}}\Big) \prod_{k=0}^{n-1} \Big(X - e^{i\frac{-a+2k\pi}{n}}\Big).$$

En regroupant les termes conjugués deux à deux *i.e.* $X - e^{i\frac{a+2k\pi}{n}}$ avec $X - e^{i\frac{-a+2(n-k)\pi}{n}}$ si $k \neq 0$, $X - e^{i\frac{a}{n}}$ avec $X - e^{-i\frac{a}{n}}$, on obtient la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \Big(X^2 - 2\cos\big(\frac{a+2k\pi}{n}\big)X + 1\Big)$$

Un rapide calcul de discriminants (avec la condition $a \in]0, \pi[0)$ nous assure que l'on a bien des irréductibles.
c) $X^2 + X + 1$ se factorise en $(X - j)(X - j^2)$. De même, $X^4 + X^2 + 1$ se factorise en $\Big(X^2 - j\Big)\Big(X^2 - j^2\Big)$. Les racines carrées de j étant $e^{i\pi/3}$ et j^2, et celles de j^2

étant j et $e^{-i\pi/3}$, la factorisation se poursuit en :

$$X^4+X^2+1=\Big(X-e^{i\pi/3}\Big)\Big(X-j^2\Big)\Big(X-j\Big)\Big(X-e^{-i\pi/3}\Big)=\prod_{\substack{k=1,\dots,5\\k\neq 3}}\Big(X-e^{ik\pi/3}\Big)$$

ce qui donne dans $\mathbb{R}[X]$, en regroupant les termes conjugués : $X^4+X^2+1=\Big(X^2+X+1\Big)\Big(X^2-X+1\Big)$.

De même, le polynôme X^8+X^4+1 a pour décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

$$X^8+X^4+1=\prod_{\substack{k=1,\dots,11\\k\neq 3,6,9}}\Big(X-e^{ik\pi/6}\Big),$$

ce qui donne en regroupant les termes conjugués :

$$X^8+X^4+1=\Big(X^2-\sqrt{3}X+1\Big)\Big(X^2+\sqrt{3}X+1\Big)\Big(X^2+X+1\Big)\Big(X^2-X+1\Big).$$

Enfin, le trinôme Y^2+Y-6 se factorisant en $(Y+3)(Y-2)$, on a $X^4+X^2-6=(X^2+3)(X^2-2)=(X-i\sqrt{3})(X+i\sqrt{3})(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$. La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit $(X^2+3)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$.

Exercice 16. On va travailler ici sur les célèbres et très utiles (notamment en calcul numérique) *polynômes de Legendre*.
a) On remarque d'abord que $(X^2-1)^n$ est un polynôme unitaire de degré $2n$. Sa dérivée n-ième, et donc L_n, est par conséquent de degré $2n-n=n$. En outre, le coefficient dominant de sa dérivée première (qui est de degré $2n-1$) est $2n$; celui de sa dérivée seconde est $(2n-1)2n$, celui de sa dérivée troisième est $(2n-2)(2n-1)2n$, et ainsi de suite. Le coefficient dominant de $\Big((X^2-1)^n\Big)^{(n)}$ est donc $(n+1)\dots 2n$, ce qui s'écrit encore $\frac{(2n)!}{n!}$, de sorte que le coefficient dominant de L_n est exactement 1.
b) On peut supposer $n\geq 0$, puisque le cas $n=0$ est immédiat. Il ne s'agit pas alors de faire le calcul exact des coefficients de L_n,mais bien plutôt de se servir de sa définition, *i.e.* du fait qu'il s'exprime comme la dérivée (n-ième) d'un autre polynôme, qui en outre s'annule aux bornes de l'intégrale considérée. Concrètement, pour nous servir de ces propriétés, on va procéder par intégrations par parties successives en retranchant une dérivation (c'est-à-dire en exhibant une primitive) sur L_n à chaque étape ; il vient, si $Q\in\mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}L_n(t)Q(t)\,dt=&\frac{(2n)!}{n!}\int_{-1}^{1}\Big(\Big(X^2-1\Big)^n\Big)^{(n)}Q(t)\,dt\\=&\frac{(2n)!}{n!}\left(\Big[\Big(\Big(X^2-1\Big)^n\Big)^{(n-1)}Q(t)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\Big(\Big(X^2-1\Big)^n\Big)^{(n-1)}Q'(t)\,dt\right).\end{aligned}$$

Il faut alors remarquer que puisque 1 et -1 sont racines (simples) de (X^2-1), ils sont racines d'ordre n de $(X^2-1)^n$, et donc racines d'ordre $(n-1)$ de $\Big((X^2-1)^n\Big)'$, d'ordre $(n-2)$ de $\Big((X^2-1)^n\Big)''$, et de même jusqu'à $\Big((X^2-1)^n\Big)^{(n-1)}$ dont ils sont racines simples. Le crochet du calcul précédent est donc nul, et il en sera de même pour les crochets successifs qui apparaîtront au cours des calculs :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,dt &= -\frac{(2n)!}{n!}\int_{-1}^{1}\Big(\big(X^2-1\big)^n\Big)^{(n-1)}Q'(t)\,dt\\ &= -\frac{(2n)!}{n!}\left(\underbrace{\Big[\Big(\big(X^2-1\big)^n\Big)^{(n-2)}Q'(t)\Big]_{-1}^{1}}_{=0}-\int_{-1}^{1}\Big(\big(X^2-1\big)^n\Big)^{(n-1)}Q''(t)\,dt\right)\\ &=\frac{(2n)!}{n!}\left(\int_{-1}^{1}\Big(\big(X^2-1\big)^n\Big)^{(n-2)}Q''(t)\,dt\right)\\ &\ \vdots\\ &=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\int_{-1}^{1}\big(t^2-1\big)^n\,Q^{(n)}(t)\,dt,\end{aligned}$$

et l'intégrande de cette dernière intégrale est nul, car Q étant de degré $\leq n-1$, sa dérivée n-ième est elle-même nulle, d'où le résultat, que l'on peut exprimer ainsi : L_n est orthogonal pour le produit scalaire $(P,Q)\mapsto\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt$ au sous-espace des polynômes de degré $\leq n-1$.

c) C'est la question la plus délicate de l'exercice, et peut-être même de la feuille. Notons $x_1<\ldots<x_r$ les différentes racines de L_n dans $]-1,1[$, et appelons $m_1,\ldots,m_r$ leurs multiplicités respectives, et $m'_1,\ldots,m'_r$ leurs parités respectives, de sorte que la condition sur le degré (qui vaut n) de L_n donne $\sum_{j=1}^{r}m'_j\leq n$, avec égalité *ssi* $r=n$ et $m_1=\ldots=m_n=1$ (puisqu'alors on a $m'_1=\ldots=m'_n=1$, donc les m_j sont non-nulles, et que leur somme est elle aussi majorée par n), *i.e* L_n a toutes ses racines, simples, dans $]-1,1[$. Supposons alors que ce ne soit pas le cas, et considérons le polynôme Q défini par :

$$Q:=(X-x_1)^{m'_1}\ldots(X-x_r)^{m'_r}$$

qui d'après notre hypothèse est de degré $\leq n-1$. Alors d'après la question b), $\int_{-1}^{1}L_n(t)Q(t)\,dt=0$. Or, il est facile de voir que L_nQ est de signe (au sens large) constant sur $]-1,1[$ et donc sur $[-1,1]$ par continuité, puisque $L_n=(X-x_1)^{m_1}\ldots(X-x_r)^{m_r}R$, avec R un polynôme ne s'annulant pas sur $]-1,1[$, et donc de signe constant sur $]-1,1[$, puis sur $[-1,1]$ par continuité, ce qui nous dit par conséquent que L_nQ s'écrit $(X-x_1)^{m_1+m'_1}\ldots(X-x_r)^{m_r+m'_r}R$ $(**)$, et le fait que les $m_j+m'_j$ soient paires nous garantit le signe constant du produit considéré sur $[-1,1]$. L'annulation de l'intégrale $\int_{-1}^{1}L_n(t)Q(t)\,dt$ se traduit finalement par : L_nQ, qui est continu, est identiquement nul sur $[-1,1]$, ce qui est absurde au regard de $(**)$, en regardant n'importe quel point de $]-1,1[$ qui n'est pas un des x_j. En conclusion, L_n a donc bien n racines, qui sont simples et se situent dans $]-1,1[$.

Notons toutefois que l'on aurait pu apporter une preuve plus analytique, et indépendante de la question b), de ce résultat. En effet, puisque $(X^2-1)^n$ s'annule en -1 et en 1, le théorème de Rolle nous dit que sa dérivée s'annule en au moins un point $x' \in]-1,1[$; de plus, on sait que -1 et 1 sont racines (d'ordre $n-1$) de cette dérivée. On applique à nouveau le théorème de Rolle entre -1 et x et entre x et 1 pour obtenir deux racines distinctes $x_1'' \in]-1,x'[$ et $x_2'' \in]x',1[$ de $\Big((X^2-1)^n\Big)''$, en plus des racines (d'ordre $n-2$) -1 et 1. On peut donc réitérer cette technique sur les dérivées d'ordre $k-1$ avec $k \leq n$ pour obtenir des racines $x_1^{(k)} < \ldots < x_k^{(k)} \in]-1,1[$ de la dérivée d'ordre k, selon le schéma :

$$\begin{array}{cccccccc}
(X^2-1)^n & -1_n & & & & & & 1_n \\
\Big((X^2-1)^n\Big)' & -1_{n-1} & & & x' & & & 1_{n-1} \\
\Big((X^2-1)^n\Big)'' & -1_{n-2} & & x_1'' & & x_2'' & & 1_{n-2} \\
\vdots & \vdots & & \iddots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\Big((X^2-1)^n\Big)^{(n)} & -1_0 & x_1^{(n)} & & \ldots & & x_n^{(n)} & 1_0
\end{array}$$

où les indices de -1 et 1 indiquent leur multiplicité. Finalement, on voit que $\Big((X^2-1)^n\Big)^{(n)}$ et donc L_n admettent n racines sur $]-1,1[$, et puisque ce sont des polynômes de degré n, on en déduit que ce sont leurs seules racines, et qu'elles sont simples.

Exercice 17. Il s'agit dans cet exercice d'introduire les renommés *polynômes de Tchebychev* (de première espèce) ainsi que leurs propriétés de base.
a) Puisque $\cos(\arccos x) = x$ pour tout x de $[-1,1]$ (contrairement à $\arccos(\cos y) = y$ qui n'est vrai que pour $y \in [0,\pi]$), il est immédiat que $f_0 = 1$ et $f_1 = \{x \mapsto x\}$, tandis que la formule $\cos(2\cdot) = 2\cos^2 - 1$ donne $f_2 = \{x \mapsto 2x^2-1\}$. Enfin, on avait vu dans l'exercice 3 de la feuille 1 la formule de linéarisation $\cos^3 = \frac{1}{4}\cos(3\cdot) + \frac{3}{4}\cos$, qui donne $\cos(3\cdot) = 4\cos^3 - 3\cos$, d'où $f_3 = \{x \mapsto 4x^3 - 3x\}$. On remarque qu'il s'agit ici du processus inverse de la linéarisation, *i.e.* étant donné un $\cos(nx)$, on cherche à l'exprimer en fonction de puissances de $\cos x$, ce que l'on peut faire en remontant les formules de linéarisation, comme ici pour $n = 3$, mais qui risque de devenir de plus en plus fastidieux à mesure que n augmente (ces formules étant des sommes à $\left[\frac{n}{2}\right]$ termes, *cf.* feuille 1, exercice 27).

b) Soit $n \geq 1$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) =& \cos\Big((n+1)\arccos x\Big) + \cos\Big((n-1)\arccos x\Big)\\
=& 2\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x), \text{ d'après } \cos(p)\cos(q) = 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\\
=& 2xf_n(x).
\end{aligned}$$

c) Pour l'existence, on pose $T_0 = 1$, $T_1 = X$, et l'on définit ensuite récursivement, pour $n \geq 1$, $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$. Alors puisque T_0 et T_1 sont bien associés respectivement à f_0 et f_1, en procédant par récurrence et en utilisant la formule du b), il est immédiat que pour tout $n \geq 0$, T_n est associé à f_n sur $[-1, 1]$.

Pour l'unicité, c'est une propriété générale des polynômes associés à des fonctions sur des corps de base infinis (ou sur certains de leurs sous-ensembles infinis) ; en effet, supposons que pour un entier n, S_n soit aussi associé à f_n sur $[-1, 1]$; alors $T_n - S_n$ est associé à 0 sur cet intervalle, ce qui signifie que tout $x \in [-1, 1]$ est racine de $T_n - S_n$, qui est donc nul puisqu'il possède cette infinité de racines (et l'on voit bien que l'on pourrait s'absoudre des n en indices, et qu'il suffit que l'ensemble des variables soit infini, ou au moins ait un cardinal strictement supérieur au degré de la différence $T - S$).

d) Une récurrence immédiate donne $\deg(T_n) = n$ pour tout $n \geq 0$, et $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$, $\mathrm{dom}(T_0)$ valant 1.

e) Il s'agit de résoudre, en adoptant le point de vue fonctionnel, l'équation $f_n(x) = 0$ pour $x \in [-1, 1]$. Or, pour de tels x,

$$\begin{aligned}
f_n(x) = 0 &\iff \cos(\underbrace{n\arccos x}_{\in[0,n\pi]}) = 0\\
&\iff n\arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2},\ k = 1, \ldots, n\\
&\iff \arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2n},\ k = 1, \ldots, n\\
&\iff x = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right),\ k = 1, \ldots, n,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne bien n racines distinctes de T_n dans $]-1, 1[$, la fonction cos étant strictement décroissante sur $]0, \pi[$. En fin de compte, puisque T_n est de degré n, il n'admet pas d'autres racines que celles-ci qui de plus sont simples, d'où l'égalité, pour $n \geq 1$:

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right).$$

On peut aussi faire le calcul direct de ces polynômes, en utilisant une fois de plus les nombres complexes, mais de manières assez réciproque de celle que l'on utilise pour la linéarisation ; en effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) =& \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left((e^{i\theta})^n + (e^{-i\theta})^n\right)\\ =& \frac{1}{2}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\right)\\ =& \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(\sin\theta)^k\left(i^k + (-i)^k\right)\end{aligned}$$

et une rapide étude selon la parité de k nous dit que pour k impair, $i^k + (-i)^k = 0$, tandis que pour $k = 2l$, $i^k + (-i)^k = 2(-1)^l$, d'où :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l\binom{n}{2l}(\cos\theta)^{n-2l}(\sin\theta)^{2l}\\ &= \sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l\binom{n}{2l}(\cos\theta)^{n-2l}\left(1-(\cos\theta)^2\right)^l\\ &= \sum_{l=0}^{[n/2]}\sum_{m=0}^{l}(-1)^{l-m}\binom{n}{2l}\binom{l}{m}(\cos\theta)^{n-2(l-m)}\\ &= \sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\left(\sum_{l=m}^{[n/2]}\binom{n}{2(l-m)}\binom{l}{m}\right)(\cos\theta)^{n-2m},\end{aligned}$$

d'où $T_n = \sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\left[\sum_{l=m}^{[n/2]} C\binom{n}{2(l-m)}\binom{l}{m}\right]X^{n-2m}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.