LM 201
Feuille 2 - Exercices complémentaires

Avertissement : la rédaction de ce corrigé peut être un peu elliptique par rapport à celle exigée en LM 201. L'utilité de ces corrigés réside donc plutôt en les réponses qu'en la manière dont elles sont écrites.

Exercice 6. a) Fixons $n \geq 1$. Pour le numérateur, on intercale un facteur 2 entre 1 et 3, un facteur 4 entre 3 et 5, et ainsi de suite ; on doit donc rediviser le tout, $1 \cdot 2 \cdots (2n+1) = (2n+1)!$ par $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$, et l'on obtient $\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$ au numérateur. Au dénominateur, on avait déjà la quantité $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$, donc finalement, on a : $u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$, et ce pour tout $n \geq 1$.
b) On calcule pour $n \geq 1$ le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1$; (u_n), qui est positive (*i.e.* minorée par 0) est donc décroissante, donc converge.
c) On calcule pour $n \geq 1$ le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}$; en développant il vient :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} = \frac{4n^3+12n^2+9n+2}{4n^3+12n^2+12n+4} \leq 1$$

donc (v_n) qui est positive est elle aussi décroissante, donc converge. Puisque $({u_n}^2) = (\frac{v_n}{n+1})$, on en déduit que $({u_n}^2)$, donc (u_n), tendent vers 0.

Exercice 8. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'une part : $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Et d'autre part, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx \leq 0$. Ceci valant pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que (I_n) tend vers 0 (par encadrement), en décroissant.
b) Il est clair que pour tout $n \geq 0$, $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, soit $I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$. En outre, $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Une récurrence immédiate donne alors $I_n = (-1)^n \Big(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \Big)$ pour tout $n \geq 0$.
c) Pour tout $N \geq 1$, on a d'après b) : $\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k} = (-1)^N I_N + \ln 2$. Or par a), $\lim_{N \to +\infty} (-1)^N I_N = 0$, donc : $\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ existe, et vaut $\ln 2$.
d) On prouve exactement comme en a) que (J_n) décroît vers 0. Pour la relation de récurrence, on a que $J_{n+2} + J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + x^n}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Une récurrence facile donne cette fois $J_{2k} = (-1)^k \Big(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{2j+1} - \frac{\pi}{4} \Big)$, car $J_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

On conclut alors de manière analogue à ce qui est fait en c) : $\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j}{2j+1}$ existe, et vaut $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 10. Le problème se posant à partir de $n=3$, calculons A^3 en fonction de A et A^2 « à la main » ; on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A + A^2$$

Remarquons aussi que la famille $\{A, A^2\}$ est libre, et que s'il existent, u_n et v_n sont donc bien définis. Si pour $n \geq 1$ l'on a $A^n = u_n A + v_n A^2$, alors $A^{n+1} = u_n A^2 + v_n A^3 = 2v_n A + (u_n + v_n)A^2$, d'où les relations de récurrence $u_{n+1} = 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$, et donc $u_{n+2} = 2v_{n+1} = 2u_n + 2v_n = 2u_n + u_{n+1}$. On a donc quant à la suite récurrente double (u_n) l'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$, de solutions 2 et -1. Ainsi, u_n s'écrit $\lambda 2^{n-1} + (-1)^{n-1}\mu$ (λ, $\mu \in \mathbb{R}$) pour tout $n \geq 0$ — j'ai aménagé le résultat habituel, mais quitte à regarder $(\tilde{u}_n) = (u_{n+1})$, on voit que cela ne pose pas de problème — et puisque $u_1 = 1$ (car $A = 1 \cdot A + 0 \cdot A^2$) et $u_2 = 0$, $\lambda + \mu = 1$ et $0 = 2\lambda - \mu = 2 - 3\mu$, $\mu = \frac{2}{3}$ et $\lambda = \frac{1}{3}$ d'où finalement pour tout $n > 0$: $u_n = \frac{1}{3}\Big(2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}\Big)$, et $v_n = u_{n+1}/2 = \frac{1}{6}\Big(2^n + 2(-1)^n\Big)$.