LM 201 - Examen du 8 décembre 2012

Exercice 1.

Fixons k et $n \in \mathbb{N}$.

Alors pour tout $t \in [0, \pi]$, $\cos nt \cos kt = \frac{1}{2}\left[\cos(n+k)t + \cos(n-k)t\right]$,

de sorte que $I_{n,k} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \cos(n+k)t\,dt + \int_0^{\pi/2} \cos(n-k)t\,dt\right)$

Or, si $m \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{\pi} \cos(mt)\,dt = \begin{cases} \pi & \text{si } m=0 \\ \left[\frac{\sin(mt)}{m}\right]_0^{\pi} = 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$

Ainsi,

- si $n = k = 0$, $n+k = n-k = 0$, et $I_{n,k} = \frac{1}{2}(\pi + \pi) = \pi$
- si $n = k \neq 0$, $\underset{>0}{n+k} \neq 0$ et $n-k = 0$ donc $I_{n,k} = \frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$
- si $n \neq k$, $n-k \neq 0$ et $n+k \neq 0$, car sinon on aurait $n=k=0$,

  d'où $I_{n,k} = \frac{1}{2}(0+0) = 0$.

Exercice 2.

On a : $(n+1)\binom{n}{k} = \frac{(n+1)\,n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!\,(k+1)}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$.

Ceci étant vérifié dès que $k \leq n$, il vient :

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l+1}\binom{n}{l} = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{l+1} \underset{\text{"}k=l+1\text{"}}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$$

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l+1}\binom{n}{l} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad \text{par Newton.}$$

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $S_n' - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\left(u_k - \frac{1}{k}\right)$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$;

$$\begin{cases} \text{- si } k \not\equiv 0\ [3], & u_k - \frac{1}{k} = 0 \\ \text{- si } k \equiv 0\ [3], & u_k - \frac{1}{k} = -\frac{2}{k} - \frac{1}{k} = -\frac{3}{k} \end{cases}$$

Tout compte fait, on a :

$$S'_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \equiv 0 [3]}} \frac{3}{k}$$

Or les $k \in [\![1,n]\!]$ multiples de 3 sont exactement les 3ℓ pour $\ell \in [\![1, E(n/3)]\!]$.

Ainsi, $S'_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = - \sum_{\ell=1}^{E(n/3)} \frac{3}{3\ell}$, i.e. $\underline{S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 3 \sum_{\ell=1}^{E(n/3)} \frac{1}{3\ell}}$, et ce pour tout $n \geq 1$.

Ceci se réécrit, pour $n \geq 1$,

$$S'_n = S_n - S_{E(n/3)} .$$

Or, $E(n/3) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc pour $n \to +\infty$:

$$S'_n = \ln n + \cancel{\gamma} - \ln\left(E(n/3)\right) - \cancel{\gamma} + o(1)$$

$$= - \ln \Big(\underbrace{\frac{E(n/3)}{n}}_{\frac{1}{3} - \frac{1}{n} \leq \cdot \leq \frac{1}{3}} \Big) + o(1)$$

donc $\frac{E(n/3)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$ par encadrement

d'où (par continuité de ln en $1/3$) : $\underline{(S'_n) \text{ converge}}$, et sa limite vaut $\underline{-\ln(1/3) = \ln 3}$.

Exercice 4.

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire double. Le polynôme caractéristique associé est $X^2 + 2X + 4$.

Son discriminant vaut $2^2 - 4 \cdot 4 = -12$; ses racines sont donc $\frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} = 2j$ et $\frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2\bar{j}$

On sait donc qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha (2j)^n + \beta (2\bar{j})^n$$

ou encore, (u_n) étant réelle et $j = e^{2i\pi/3}$, qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 2^n \left(a \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + b \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)}$.

On utilise u_0 et u_1 pour calculer a et b :

$$\begin{cases} 1 = u_0 = a \\ 2 = u_1 = 2 \cdot \left(a\left(\frac{-1}{2}\right) + b \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases}$$

d'où : $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$.

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^n \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{2n\pi}{3} \right)$.

On pouvait en déduire que (u_n) n'est pas convergente, car pour tout $k \geq 0$,

$u_{3k} = 2^{3k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ et $u_{3k+1} = 2^{3k+2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = -2^{3k+3} \xrightarrow[k \to +\infty]{} -\infty$.

. Exercice 5

Déjà, on n'aura pas de partie entière, car $\deg X^2 < \deg (X^4 + X^2 + 1)^2$.

Ensuite, on factorise $X^4 + X^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$

On écrit par exemple :

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 \\ &= \left((X^2+1) - X\right)\left((X^2+1) + X\right) \\ &= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

et les discriminants des deux trinômes valent $1 - 4 = -3 < 0$: la factorisation de $X^4 + X^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ est achevée.

On peut alors remarquer que :

$$F = \left(\frac{X}{X^4 + X^2 + 1}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{X}{X^4+X^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X^2 - X + 1} - \frac{1}{X^2 + X + 1}\right)$$

d'où : $F = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(X^2-X+1)^2} + \frac{1}{(X^2+X+1)^2} - \frac{2}{(X^2-X+1)(X^2+X+1)}\right]$

or on sait qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{2}{(X^2-X+1)(X^2+X+1)} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}$

Par parité, $a = -c$ et $b = d$.

En évaluant en 0 et en 1, il vient : $2 = b + d = 2b$ donc $b = 1$ et $d = 1$, et $\quad 2/3 = \dfrac{a+1}{3} + \dfrac{c+d}{1} = -\dfrac{2}{3}a + 4/3$, d'où $a=1$ et $c=-1$.

En conclusion :

$$F = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(X^2-X+1)^2} + \frac{1}{(X^2+X+1)^2} - \frac{X+1}{X^2+X+1} + \frac{X-1}{X^2-X+1}\right],$$

et ceci est bien une décomposition en éléments simples.

Exercice 6.

On sait (c'est du cours) qu'une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en un point a ($DL_n(a)$), avec $n\geq 0$, n'est pas en général n fois dérivable en a.

Suivant l'énoncé, on regarde (à $n\geq 2$ fixé),

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^n}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}, \quad \text{avec } a=0.$$

Alors pour $x\neq 0$, $\left|\dfrac{f(x)}{x^n}\right| = \left|x\sin\left(\frac{1}{x^n}\right)\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

donc (comme également $f(0)=0$),

$$f(x) = o_0(x^n) = 0 + 0\cdot x + \cdots + 0\cdot x^n + o_0(x^n) :$$

f admet un $DL_n(0)$.

On va voir que f n'est cependant pas n fois dérivable en 0 ; il suffit de voir qu'elle n'est pas deux fois dérivable en ce point.

Or, sur $\mathbb{R}^*$, f est C^1 de dérivée $x\mapsto (n+1)x^{n-1}\sin\frac{1}{x^n} - n\cos\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Ainsi, bien que $f'(0)$ existe (considérer le taux d'accroissement de f en 0), f' n'a aucune chance d'être continue, ni donc dérivable, en 0, comme on le voit en considérant la suite $(x_k)_{k\geq 1} = \left((k\pi)^{-1/n}\right)_{k\geq 1}$.

On a donc prouvé que f n'est pas 2 fois, et a fortiori, n fois dérivable en 0.

Dans le cas $n=1$, il est équivalent d'être dérivable en a et d'y admettre un DL_1.

. Exercice 7 :

Par définition de $f'(0)$, on a : $f(x) = \underbrace{f(0)}_{=1} + f'(0)x + o_0(x)$.
En particulier, pour x proche de 0, $f(x)$ est proche de 1 donc >0, et donc $f(x)^{1/x}$ a un sens (si $x>0$).

Plus précisément, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x)^{1/x} &= e^{\frac{1}{x}\ln(f(x))} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln(1+f'(0)x+o_0(x))} \\ &= e^{\frac{1}{x}(f'(0)x+o_0(x))} \\ &= e^{f'(0)+o_0(1)} \end{aligned}$$

ce qui signifie exactement, car exp est continue, que $\lim_{x\to 0^+} f(x)^{1/x}$ existe, et vaut $e^{f'(0)}$.

. Exercice 8.

Il faut voir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1}+x>0$.
Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ donc $\sqrt{x^2+1}+x > |x|+x \geqslant 0$.

Ainsi, argsh est bien définie sur $\mathbb{R}$

Vérifions que $\text{argsh} \circ \text{sh} = \text{id}_{\mathbb{R}}$; soit $y\in\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} \text{argsh}(\text{sh}\, y) &= \ln\left(\sqrt{\text{sh}^2 y+1}+\text{sh}\, y\right) = \ln\left(\sqrt{\text{ch}^2 y}+\text{sh}\, y\right) \\ &= \ln\left(\underbrace{\text{ch}\, y}_{\geqslant 0}+\text{sh}\, y\right) = \ln(e^y) \\ &= y, \end{aligned}$$

et ce pour tout $y\in\mathbb{R}$. On a bien $\text{argsh}\circ\text{sh} = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

On pourrait vérifier directement que $\mathrm{sh} \circ \mathrm{argsh} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, mais ceci est automatique. En effet, $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection ; elle admet donc une réciproque $\mathrm{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mais alors :

$$\underline{\mathrm{sh}^{-1}} = \underbrace{(\mathrm{argsh} \circ \mathrm{sh})}_{= \mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \circ \mathrm{sh}^{-1} = \mathrm{argsh} \circ (\mathrm{sh} \circ \mathrm{sh}^{-1}) = \underline{\mathrm{argsh}},$$

d'où le résultat : argsh est la réciproque de sh.

Enfin, le théorème de dérivation de la réciproque nous dit que argsh est dérivable en tout x_0 tel que sh est dérivable en $\mathrm{argsh}\, x_0$, (ce qui est toujours vrai), et $\mathrm{sh}'(\mathrm{argsh}\, x_0) \neq 0$, ce qui est encore sûrement vrai, puisque $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Finalement, ce théorème nous donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{argsh}'\, x = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{argsh}\, x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}\, x) + 1}} \quad (\mathrm{car}\ \mathrm{ch} \geq 0)$$

$$\underline{\mathrm{argsh}'\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}.$$

Exercice 9.

L'équation considérée équivaut à : $y'(t) - \frac{t}{1+t^2}\, y(t) = 1$,

soit, puisque $\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ est une primitive de $\frac{t}{1+t^2}$, à :

$$e^{\frac{1}{2}\ln(1+t^2)} \frac{d}{dt}\left(y\, e^{-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)} \right) = 1,$$

i.e. $$\underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{\sqrt{1+t^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}.$$

D'après 8., ceci équivaut encore à : $\frac{y}{\sqrt{1+t^2}} = \mathrm{argsh}\, t + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation considérée est :

$$\underline{\{ t \mapsto \sqrt{1+t^2}\,(\mathrm{argsh}\, t + c),\ c \in \mathbb{R} \}}.$$

Exercice 10.

On fixe $n \geq 1$.

On effectue pour I_n le changement de variable C^1 $t = \sqrt{n} \sin\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$.

Ainsi, $t = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$; $t = \sqrt{n} \Leftrightarrow \theta = \pi/2$, et formellement, $dt = \sqrt{n} \cos\theta \, d\theta$, d'où :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{n \sin^2\theta}{n}\right)^n \sqrt{n} \cos\theta \, d\theta = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta)^n \cos\theta \, d\theta$$

$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta \, d\theta$, et ce pour tout $n \geq 1$.

Pour prouver que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, on regarde les fonctions f_n, $n \geq 1$, définies à n fixé par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t \geq \sqrt{n} \end{cases}$$

de sorte que pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_{\mathbb{R}^+} f_n$

On prouve ensuite que (f_n) converge simplement vers $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}^+$, qui est intégrable, on trouve une fonction de domination (ou on prouve la croissance à t fixé), et on applique le théorème de convergence dominée (ou monotone).

Enfin, d'après l'équivalent de l'énoncé,

$I_n \sim \sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce qui veut dire : (I_n) converge vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par unicité de la limite, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.