LM 201 - TD 8

27 octobre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°3.

Exercice 4 (DM). On procède comme dans l'exercice 2, à ceci près que l'on va factoriser le polynôme diviseur dans $\mathbb{C}[X]$, ce ui ne change rien à la conclusion, puisqu'un polynôme réel en divise un autre dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement s'il le divise dans $\mathbb{R}[X]$ (et nous explique pourquoi il serait inutile de spécifier un hypothétique « corps de division polynomiale » dans l'énoncé). Cela dit, on écrit $X^2 + X + 1 = (X + j)(X + \bar{\jmath})$, avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{\jmath} = j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \neq j$. $X + j$ et $X + \bar{\jmath}$ étant donc premiers entre eux, on peut appliquer le lemme de Gauß. Ainsi, à $n \in \mathbb{N}$ fixé, $P_n := (X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 *ss'*il l'est par $X+j$ et $X+\bar{\jmath}$, et donc *ssi* $P_n(j) = P_n(\bar{\jmath}) = 0$. Puisque P_n est réelle, cette dernière condition se simplifie en $P_n(j) = 0$.

À présent, comme $1 + j = -j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$. Ainsi

$$P_n(j) = e^{\frac{ni\pi}{3}} - e^{\frac{2ni\pi}{3}} - 1 = e^{\frac{ni\pi}{2}}\left(e^{-\frac{ni\pi}{6}} - e^{\frac{ni\pi}{6}}\right) - 1 = 2e^{\frac{(n-1)i\pi}{2}} \sin\left(\frac{ni\pi}{6}\right) - 1$$

et donc $P_n(j) = 0$ équivaut à $2\sin\left(\frac{ni\pi}{6}\right) = e^{-\frac{(n-1)i\pi}{2}}$. Ceci est manifestement invariant modulo 6 ; on peut donc se contenter de regarder ce qui se passe pour $n \in \{0, \ldots, 5\}$. L'égalité n'ayant alors lieu que si $n = 1$ ou 5, on en déduit : $\Big(P_n(j) = 0\Big) \Leftrightarrow n \equiv 1$ ou $5[6]$.

En conclusion, $X^2 + X + 1$ divise P_n *ssi* n est congru à 1 ou 5 modulo 6.

Exercice 7 (DM). Soit x (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une racine au moins double de P_n, *i.e.* $P_n(x) = P_n'(x) = 0$ (sous-entendu : on suppose qu'une telle racine existe). Alors comme $P_n' = P_{n-1}$ (si $n > 0$, sinon la question ne se pose même pas), et donc $P_n - P_n' = P_n - P_{n-1} = \frac{X^n}{n!}$, et ainsi $0 = P_n(x) - P_n'(x) = \frac{x^n}{n!}$, soit $x = 0$, ce qui est absurde puisque 0 n'est pas racine de P_n. Le polynôme P_n n'admet donc pas de racine multiple.

Exercice 8. Il est sous-entendu que x, y et z sont non-nuls dans le système considéré. Soient donc trois nombres complexes non-nuls x, y et z vérifiant ce système. On peut réécrire la troisième relation $\frac{xy+yz+xz}{xyz} = \frac{1}{2}$, soit, comme $xyz = -\frac{1}{2}$, $xy + yz + xz = -\frac{1}{4}$. Les *relations coefficients-racines* nous disent alors que x, y et z sont les racines (avec multiplicités) du polynôme $P := X^3 - 2X^2 + (-\frac{1}{4})X - \left(-\frac{1}{2}\right) = X^3 - 2X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$. En effet, x, y et z sont les racines du polynôme $(X - x)(X - y)(X - z)$, qui lorsqu'on le développe s'écrit $X^3 - (x + y + z)X^2 + (xy+yz+xz)X - xyz$, d'où notre affirmation en remplaçant $x+y+z$, $xy+yz+xz$ et xyz par les valeurs prescrites.

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de ce polynôme. En inspectant les éventuelles racines évidentes, on voit que 2 est racine. On factorise donc P par $X - 2$, ce qui donne $P = (X - 2)\left(X^2 - \frac{1}{4}\right) = (X - 2)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)$, d'où $\{x, y, z\} = \{2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ (cette écriture indique que l'on peut bien sûr permuter les valeurs de x, y et z, et que l'on a donc six triplets solutions — et en outre, on évite bien les valeurs nulles qui étaient proscrites par l'énoncé). On a raisonné par condition nécessaire ; on aurait pu le faire par équivalence, mais on peut aussi conclure en vérifiant que la solution donnée satisfait bien au système d'équations à résoudre.

Exercice 11. Posons $F = \frac{P}{Q}$, où $P = X^4+5$ et $Q = X^3+2X^2-X-2 = (X-1)(X+1)(X+2)$, en regardant les racines évidentes (et une fois que l'on en a deux, on a la troisième par les relations coefficients-racines). On cherche d'abord le quotient et le reste de la division de P par Q, qui s'écrit : $P = (X - 2)Q(X) + 5X^2 + 1$. Ainsi, $F = X - 2 + \frac{5X^2+1}{(X-1)(X+1)(X+2)}$. Comme les racines du dénominateur Q sont toutes simples, la décomposition de F en éléments simples est de la forme suivante : $F = X-2+\frac{\lambda}{X-1}+\frac{\mu}{X+1}+\frac{\nu}{X+2}$, où λ, μ et ν sont des constantes réelles. En procédant par identification après réduction au même dénominateur, on aurait donc

$$F = X - 2 + \frac{(\lambda + \mu + \nu)X^2 + (3\lambda + \mu)X + (2\lambda - 2\mu - \nu)}{(X - 1)(X + 1)(X + 2)},$$

ce qui, comparé à l'expression

$$F = X - 2 + \frac{5X^2 + 1}{(X - 1)(X + 1)(X + 2)}$$

donne le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 5, \\ 3\lambda + \mu = 0, \\ 2\lambda - 2\mu - \nu = 1, \end{cases} \quad \text{soit : } \begin{cases} \lambda = 1, \\ \mu = -3, \\ \nu = 7. \end{cases}$$

En conclusion, $F = X - 2 + \frac{1}{X-1} - \frac{3}{X+1} + \frac{7}{X+2}$.

Une autre technique pour déterminer les coefficients λ, μ et ν consiste en la manipulation suivante ; on multiplie F par $X - 1$, ce qui donne au vu de sa décomposition en éléments simples :

$$(X-1)F = (X-1)(X-2) + \lambda + \tfrac{\mu(X-1)}{X+1} + \tfrac{\nu(X-1)}{X+2}.$$

Puisque 1 n'est plus un pôle de la fraction rationnelle obtenue, disons G, on peut calculer $G(1)$, qui vaut λ. Or en calculant G à partir de l'expression de F sous forme (partie entière)+(partie fractionnaire), on a aussi $G = (X-1)(X-2) + \frac{5X^2+1}{(X+1)(X+2)}$, d'où $G(1) = 1$, *i.e.* $\lambda = 1$. En évaluant de même $H := (X+1)F$ en -1 et $I := (X-2)F$ en 2, on obtient bien $\mu = -3$ et $\nu = 7$, et on conclut à l'identique.

Exercice 14 (début). a) Pour montrer que Δ est bien définie, il s'agit de voir que son ensemble d'arrivée n'est pas trop petit. En effet, pour un polynôme P, on peut toujours calculer $P(X+1) - P(X)$ *au sein de l'algèbre des polynômes* ; on doit néanmoins vérifier que si $\deg(P) \leq n+1$, alors $\deg\Big(P(X+1) - P(X)\Big) \leq n$. En d'autres termes, il faut que notre manipulation nous emmène de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit donc P de degré $\leq n+1$; on peut donc l'écrire $aX^{n+1} + Q$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $\deg(Q) \leq n$. Ainsi,

$$P(X+1) - P(X) = a\Big((X+1)^{n+1} - X^{n+1}\Big) + Q(X+1) - Q(X).$$

D'après les règles de composition, $\deg\Big(Q(X+1)\Big) = \deg Q$, et donc $\deg\Big(Q(X+1) - Q(X)\Big) \leq \deg Q \leq n$. Par ailleurs, en utilisant le binôme de Newton, on a $(X+1)^{n+1} - X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n+1} X^k$, ce qui est de degré n. En conclusion, $P(X+1) - P(X)$ est bien de degré inférieur ou égal à n, et ce dès que $\deg(P) \leq n+1$.

L'application Δ est donc bien définie, et sa linéarité est immédiate.