LM 201 - TD 7

20 octobre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°3, sauf mention contraire.

Feuille 2, exercice 9 (DM). c) On utilise la méthode habituelle d'étude des suites récurrentes doubles linéaires, formellement très similaire à celle des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2. L'équation caractéristique s'écrit donc ici $r^2 + 2r + 4 = 0$. Le discriminant associé vaut $-12 < 0$: on aura deux solutions distinctes, complexes conjuguées. Ces solutions sont : $r_\pm = -1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm 2i\pi/3}$. Il existe donc λ et μ *complexes* tels que pour tout n on ait

$$u_n = \lambda(-1 + i\sqrt{3})^n + \mu(-1 - i\sqrt{3})^n = \lambda 2^n e^{2in\pi/3} + \mu 2^n e^{-2in\pi/3}. \tag{1}$$

Les conditions de départ s'écrivent $0 = \lambda + \mu$, soit $\lambda = -\mu$, et $1 = \lambda(-1 + i\sqrt{3}) + \mu(-1 - i\sqrt{3})$, soit $1 = \lambda(-1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3}) = 2i\sqrt{3}\lambda$, d'où : $\lambda = -\mu = \frac{1}{2i\sqrt{3}}$, et pour tout n, $u_n = \frac{1}{2i\sqrt{3}}\left(2^n e^{2in\pi/3} - 2^n e^{-2in\pi/3}\right) = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin(2n\pi/3)$, et le résultat est bien dans $\mathbb{R}$.

Feuille 2, exercice 12 (DM). a) Il s'agit pour commencer d'une simple étude de fonction ; la fonction $t \mapsto \log(t+1) - t$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$, de dérivée $t \mapsto \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$, ce qui est du signe opposé à celui de t. La fonction considérée est donc croissante à gauche de 0, et décroissante à droite ; or elle s'annule en 0, et est donc négative sur $]-1, +\infty[$, ce qui signifie exactement $\log(1+t) \leq t$ sur cet intervalle.

Ensuite, en écrivant $\frac{s}{1+s} = 1 - \frac{1}{1+s}$ pour $s > -1$, on voit que cette quantité est < 1, soit : son opposé est > -1. On a d'après ce qui précède $\log\left(1 - \frac{s}{1+s}\right) \leq -\frac{s}{1+s}$. Or le membre de gauche vaut $\log\left(\frac{1}{1+s}\right) = -\log(1+s)$, d'où le résultat en changeant les signes et en inversant le sens de l'inégalité.

b) En remplaçant t par $\frac{1}{k}$, $k \geq 1$, dans les inégalités précédentes il vient $\frac{1}{k+1} = \frac{1/k}{1+1/k} \leq \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$, donc en sommant jusqu'à $k = n$ pour un $n \geq 1$, on obtient $S_{n+1} - 1 \leq \log(n+1) \leq S_n$. L'inégalité de droite est demandée telle quelle, tandis que l'inégalité de gauche donne (au rang $n-1$, elle est encore valable pour $n = 0$) $S_n \leq \log n + 1$, ce qui achève la réponse.

c) On a, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$; or on sait que $\frac{1}{n+1} \leq \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (question b)), et ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc (u_n) est décroissante. Or comme $S_n \geq \log(n+1) \geq \log(n)$, (u_n) est positive, et est donc convergente, et l'on note sa limite γ, que l'on appelle *constante d'Euler*. Ceci nous dit en définitive que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + o(1)$.

Notons que malgré l'apparente simplicité de la définition de cette constante, on sait très peu de choses dessus ; on ne sait même pas par exemple si elle est rationnelle ou non.

Exercice 1. a) Pour montrer que $\sqrt{3}$ est racine de P, il suffit de faire le calcul de $P\left(\sqrt{3}\right)$, qui ne pose pas de problème. On factorise ensuite P par $X-\sqrt{3}$, puisqu'alors P s'écrira $X-\sqrt{3}$ fois un trinôme du second degré, et l'on pourra conclure quant aux racines, réelles ou non, de P. Or le calcul (algorithme habituel de division des polynômes, ou identification, qui peut se faire de tête) donne $P=\left(X-\sqrt{3}\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+6\right)$, et le discriminant du trinôme obtenu vaut -21 ; ses racines ne sont donc pas réelles. Conclusion : la seule racine réelle de P est $\sqrt{3}$.
b) Là encore, pour montrer que le nombre donné est racine de P, il suffit de faire le calcul. Toutefois, si l'on ne prend pas de précaution, cela peut s'avérer assez pénible, du fait des radicaux successifs. Pour nous simplifier la tâche, notons α la chose compliquée qui se trouve sous le premier radical, *i.e.* $2\sqrt{7}+3\sqrt{3}$, et β celle qui se trouve sous le second radical, soit $2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$. Bien qu'elles mélangent $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$, ces deux quantités, du fait du changement de signe qui les différencie, apparaissent d'une certaine manière comme *conjuguées*. On exploite cette remarque en calculant $\alpha\beta$, qui vaut $4\cdot 7-9\cdot 3=1$, ce qui nous dit entre autres que $\beta>0$, et $\beta=\alpha^{-1}$.

On peut alors procéder à notre calcul :

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right) =& \alpha-3\sqrt[3]{\alpha^2\beta}+3\sqrt[3]{\alpha\beta^2}-\beta+3\sqrt[3]{\alpha}-3\sqrt[3]{\beta}-6\sqrt{3} \\ =& \underbrace{\alpha-\beta}_{6\sqrt{3}}-6\sqrt{3}-3\underbrace{\sqrt[3]{\alpha^2\beta}}_{\sqrt[3]{\alpha}}+3\underbrace{\sqrt[3]{\alpha\beta^2}}_{\sqrt[3]{\beta}}+3\sqrt[3]{\alpha}-3\sqrt[3]{\beta} \\ =& 0. \end{aligned}$$

Or $\sqrt{3}$ est la seule racine réelle de P, donc $\sqrt{3}=\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}=\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}-\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}$, ce qui est loin de sauter aux yeux. En substance, on retiendra que les formules de Cardan donnent des résultats théoriques forts (nature des racines d'un polynômes de degré 3), mais pour certains bien peu pratiques.

Exercice 2. *Il y avait une faute dans l'énoncé : il y a un $+$, et non un $-$, entre les deux parenthèses.* Un coup d'œil suffit pour voir que $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$. Ainsi, si l'on fixe $n\geq 1$, X^2-3X+2 divise P_n *ssi* $X-1$ et $X-2$ divisent P_n, le « seulement si » venant du lemme de Gauß. Or $X-1$ (*resp.* $X-2$) divise P_n *ssi* $P_n(1)=0$ (*resp.* $P_n(2)=0$). Un simple calcul suffit à vérifier que ces égalités sont vraies.

On en déduit que X^2-3X+2 divise P_n, et ce pour tout $n\geq 1$.

Exercice 5. a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On examine dans P_n le coefficient de X^k en partant de $k=n+1$, puisque P_n est la somme de deux polynômes de degré $n+1$, et est donc de degré $\leq n+1$. Or le coefficient de X^{n+1} dans $(X+i)^{n+1}$ et dans $(X-i)^{n+1}$ est 1 ; ils

se compensent donc dans leur différence, et donc $\deg(P_n) \leq n$. Toutefois, le coefficient de X^n dans $(X+i)^{n+1}$ est $(n+1)i$, et dans $(X-i)^{n+1}$ est $-(n+1)i$; il est donc égal à $2(n+1)i$ dans leur différence, *i.e.* à $n+1$ dans P_n, qui ainsi est de degré n.
b) On va devoir utiliser le binôme de Newton ; si $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
P_{2n}(X) =& \frac{1}{2i}\Big((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1} \Big) \\
=& \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{n+1}{k} X^{n+1-k} i^k - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+1}{k} X^{n+1-k} (-i)^k \right] \\
=& \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{n+1}{k} X^{n+1-k} \Big(i^k - (-i)^k \Big)
\end{aligned}$$

et comme $\big(i^k - (-i)^k\big)$ est nul si k est pair, et vaut $2(-1)^\ell i$ si $k = 2\ell + 1$, on obtient finalement $P_n = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \binom{2n+1}{2\ell+1} X^{2(n-\ell)}$, comme voulu.
c) Procédons par analyse-synthèse : on trouve d'abord des conditions nécessaires sur les racines, et on vérifie dans un deuxième temps qu'elles sont suffisantes. Soit donc $n \geq 1$ et $z \in \mathbb{C}$ une racine de P_n. On a donc $(z+i)^{n+1} = (z-i)^{n+1}$. On ne saurait avoir $z = i$, car l'égalité précédente deviendrait $(2i)^{n+1} = 0$, absurde. Ainsi $z - i \neq 0$, et $\big(\frac{z+i}{z-i}\big)^{n+1} = 1$.

Il existe donc $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $\frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\pi/(n+1)}$; excluons tout de suite la possibilité $k = 0$, qui mènerait à $\frac{z+i}{z-i} = 1$, *i.e.* $z + i = z - i$, ou encore $2i = 0$, absurde. Fixons donc $k \in \{1, \ldots, n\}$. L'égalité précédente se traduit par

$$z = i\frac{e^{2ik\pi/(n+1)} + 1}{e^{2ik\pi/(n+1)} - 1} = i\frac{e^{ik\pi/(n+1)} + e^{-ik\pi/(n+1)}}{e^{ik\pi/(n+1)} - e^{-ik\pi/(n+1)}}$$

en factorisant numérateur et dénominateur par $e^{ik\pi/(n+1)}$ (et les dénominateurs ne sont pas nuls, car $k \neq 0$). Par Euler, ceci se réécrit $z = \operatorname{cotan}\big(\frac{k\pi}{n+1}\big)$

On vérifie aisément que réciproquement, les $\operatorname{cotan}\big(\frac{k\pi}{n+1}\big)$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, sont racines de P_n. Elles sont deux à deux distinctes par stricte croissance de cotan sur $]0, \pi[$, d'où la décomposition de P_n en n'oubliant pas que son coefficient dominant est $n+1$:

$$P_n = (n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X - \operatorname{cotan}\Big(\frac{k\pi}{n+1}\Big) \right)$$

(les racines exhibées sont nécessairement simples, d'après l'égalité « degré = somme des multiplicités »).

d) On applique ce qui précède à $n = 2k$, $k \geq 0$, en remarquant que pour $\ell = 1, \ldots, n$ on a $\operatorname{cotan}\big(\frac{\ell\pi}{2k+1}\big) = -\operatorname{cotan}\big(\frac{2k+1-\ell\pi}{2k+1}\big)$, et en regroupant les facteurs d'indice k et $n - k$.