LM 201 - TD 6

13 octobre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°2.

Exercice 4 (DM). a) Il suffit de remarquer que pour $p > 1$, si $x \in [p, p+1]$, alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{p}$, donc en intégrant sur $[p, p+1]$, qui est un intervalle de longueur 1, il vient $\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p}$. De même, si $x \in [p-1, p]$, alors $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{x}$, et en intégrant sur $[p-1, p]$ (en remarquant que cela se fait sans problème), on obtient la seconde inégalité. Notons que ce genre de raisonnement est très utile lorsque l'on étudie des séries, et donne souvent des résultats assez fins, comme par exemple lorsque l'on établit la nature des séries de Riemann selon l'exposant considéré.

b) Remplaçons p par $n+k$, $n \geq 1$, $k \geq 1$ (de sorte que $n+k$ est > 1), puis sommons sur $k = 1, \ldots, n$ (et donc $n+k$ va de $n+1$ à $2n$) pour avoir l'encadrement

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq S_n \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x}.$$

On sait calculer les membres de droite et de gauche de l'inégalité, qui valent respectivement $[\log x]_{n+1}^{2n+1} = \log\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \log\left(2 - \frac{1}{n+1}\right)$, et $[\log x]_n^{2n} = \log 2$. Or le terme de gauche tend vers $\log 2$ lorsque n tend vers l'infini, et il en va donc de même pour S_n, *i.e.* (S_n) est convergente, de limite $\log 2$.

c) Soit $n \geq 1$ (pour $n = 0$, on a deux sommes vides donc nulles). On a en séparant termes pairs et impairs $S'_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$ Cette différence (somme des termes $\frac{1}{l}$ impairs moins somme des termes $\frac{1}{l}$ pairs), est encore égale à $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{l=1}^{2n} \frac{1}{l} - 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$ (somme totale moins deux fois la somme des termes pairs). Ceci se récrit $S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = S_n$.

Finalement, on peut écrire pour tout n (en analysant sa parité)

$$|S'_n - S_{[\frac{n}{2}]}| \leq |S'_{2[\frac{n}{2}]} - S'_{2[\frac{n}{2}]+1}| = \tfrac{1}{2[\frac{n}{2}]+1} \xrightarrow{n \to +\infty} 0,$$

donc (S'_n) converge, et tend vers la même limite que (S_n), soit $\log 2$. En conclusion, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$.

Exercice 7. Notons, pour $n \geq 2$, P_n le polynôme $X^n + X - 1$, ainsi que la fonction (C^∞) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associée. Alors pour tout n cette fonction a pour dérivée $nX^{n-1} + 1$, qui est ≥ 1 donc strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, et P_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $P_n(0) = -1 < 0$ et $P_n(1) = 1 > 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, elle admet une racine $x_n \in]0,1[$ (qui est donc positive), et puisque P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle ne saurait s'annuler ailleurs qu'en x_n (sur $\mathbb{R}^+$). En conclusion, pour tout $n \geq 2$, P_n possède une unique racine positive x_n, et de plus $0 < x_n < 1$.

Pour la convergence de la suite (x_n), on cherche d'abord à déterminer la monotonie. Tout ce que l'on sait sur x_n, c'est qu'elle est la racine de P_n ; pour comparer x_{n+1} et x_n, on va donc voir ce qui se passe lorsque l'on évalue P_n en x_{n+1}. On a : $P_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1$, et en retranchant $0 = P_{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1$, il vient $P_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = x_{n+1}^n(1 - x_{n+1})$. Or $0 < x_{n+1} < 1$, donc $P_n(x_{n+1}) > 0$, et la monotonie de P_n nous dit finalement que $x_{n+1} > x_n$, et ce pour tout n. La suite (x_n) est donc croissante, et tend vers une limite $\ell \leq 1$.

Supposons pour finir $\ell < 1$. Pour tout $n \geq 2$, par croissance de P_n, puisque $x_n \geq l$, on a : $0 = P_n(x_n) \leq P_n(l) = \ell^n + l - 1$, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient (ℓ^n tendant vers 0) $0 \leq \ell - 1$ soit $\ell \geq 1$, une contradiction. D'où : $\ell = 1$.

Exercice 9. a) On aura reconnu la suite de Fibonacci. On utilise la méthode habituelle d'étude des suites récurrentes doubles linéaires. L'équation caractéristique s'écrit donc ici $r^2 - r - 1 = 0$, de solutions *simples* (c'est important) $r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On sait alors qu'il existe λ et μ réels tels que pour tout n, $u_n = \lambda r_+^n + \mu r_-^n$. Pour déterminer ces deux scalaires, on utilise la donnée u_0 et u_1. On a ainsi $0 = u_0 = \lambda + \mu$, soit $\lambda = -\mu$; d'autre part, $1 = u_1 = \lambda r_+ + \mu r_- = \lambda(r_+ - r_-) = \sqrt{5}\lambda$, d'où : $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, et pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

b) Le polynôme caractérisitique de la suite (v_n) est $X^2 - X + \frac{1}{4} = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2$. Le cours nous dit qu'il existe λ et μ réelles telles que pour tout $n \geq 0$, $v_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu n\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Les conditions initiales $v_0 = 0$ et $v_1 = 9$ donnent $\lambda = 0$ et $\mu = 18$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $v_n = 9n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Exercice 11. a) C'est la même technique de comparaison à une intégrale que dans l'exercice 4 ; pour $n \geq 1$, $x \in [n, n+1]$,on a $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc en intégrant sur le segment en question, il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et comme le membre central vaut $[2\sqrt{x}]_n^{n+1} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, on a l'inégalité demandée. Dans ce cas particulier on pouvait aussi procéder avec les quantités conjuguées et écrire $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, ce qui est bien $\leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, et $\geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

b) Récrivons l'inégalité précédente avec un k à la place du n, et sommons sur $k = 1, \cdots, n$ pour $n \geq 1$; il vient par télescopage $S_{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = S_n$. On peut aussi écrire l'inégalité de gauche $S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$ (en décalant l'indice), d'où finalement pour tout n, $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$. On en déduit l'équivalent $S_n \sim_{n \to +\infty} 2\sqrt{n}$.