LM 201 - TD 3

22 septembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°1.

Exercice 1. On a vu en TD comment utiliser les nombres complexes, en particulier la *formule de De Moivre*, pour répondre à la question (attention au développement du binôme, et surtout au puissances de i) : développement de $(\cos t + i \sin t)^4$, puis identification des parties réelles et imaginaires, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut aussi procéder en itérant les formules $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, ce qui donne, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} \cos 4t &= 2\cos^2 2t - 1 = 2(2\cos^2 2t - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sin 4t &= 2 \sin 2t \cos 2t = 4 \sin t \cos t(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ &= 4 \sin t \cos^3 t - 4 \sin^3 t \cos t. \end{aligned}$$

Exercice 2. Soient deux réels a et b. On sait que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. En sommant les deux formules et en divisant par 2, on obtient $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big)$.

De même, en posant $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, de sorte que $a + b = p$ et $a - b = q$, on a $\cos p + \cos q = \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, et ce pour tous p et q de $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On utilise $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, et on écrit $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{4}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x$. De même, $\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$. Exemple d'application : calcul de $\int_0^\pi \sin^3 x \, dx$ sans intégration par parties.

Exercice 4. On va encore se servir des complexes, et écrire, pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta =& \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right) = \mathfrak{Re}\left(e^{i\theta}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right)\\ =& \mathfrak{Re}\left(e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) \quad \text{car } e^{i\theta} \neq 1\\ =& \mathfrak{Re}\left(e^{i\theta}\frac{e^{in\theta/2}(e^{in\theta/2}-e^{-in\theta})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}\right)\\ =& \cos\Big((n+1)\theta/2\Big)\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.\end{aligned}$$

Exercice 5. a) La racine quatrième de 4 est $\sqrt{2}$, une racine quatrième de $i = e^{i\pi/2}$ est $e^{i\pi/8}$, et une racine primitive quatrième de l'unité est i ; les racines quatrièmes de $4i$ sont donc les $\sqrt{2}i^k e^{i\pi/8} = \sqrt{2}e^{i(4k+1)\pi/8}$, $k = 0, \ldots, 3$.

b) $9\sqrt{3}$ a pour racine cinquième $\sqrt{3}$; d'autre part, $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) = e^{5i\pi/3} = (e^{i\pi/3})^5$, et enfin, $e^{2i\pi/5}$ est une racine primitive cinquième de l'unité. Par conséquent, les racines cinquièmes de $\frac{9\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3})$ sont donc les $\sqrt{3}e^{i\pi/3}e^{2ik\pi/5} = \sqrt{3}e^{i(5+6k)\pi/15}$, $k = 0, \cdots, 4$.

c) Les racines voulues sont $e^{i\pi/4}$ et $e^{-3i\pi/4}$, soit $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

d) Ici, la méthode module-partie unitaire ne donne que des résultats peu satisfaisants en ceci qu'ils sont peu explicites. Soit donc $x+iy$ une racine carré de $-15+8i$, $x, y \in \mathbb{R}$. On a ainsi $-15+8i = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$, soit $x^2-y^2 = -15$ et $xy = 4$. En multipliant la première de ces égalités par x^2, il vient $x^4-4^2+15x^2 = x^2-(xy)^2+15x^2 = 0$. La résolution de l'équation du second degré en x^2 donne $x^2 = 1$ ou -16. Or $x^2 \geq 0$, donc $x = \pm 1$ et $y = \pm 4$. On pouvait aussi écrire $x^2+y^2 = |x+iy|^2 = \left|(x+iy)^2\right| = |-15+8i| = 17$, donc en sommant avec $x^2-y^2 = -15$, il vient $x^2 = 1$, et on termine comme précédemment. Les racines carrées de $-15+8i$ sont donc $\pm(1+4i)$.

Notons que l'on a plutôt ici raisonné par condition nécessaire, et que pour être rigoureux il faudrait voir que les deux racines obtenues conviennent ; toutefois, le cours nous disant que tout nombre complexe non-nul admet deux racines carrées complexes distinctes, on voit que ces deux racines ne peuvent être que celles obtenues, et sont donc bien celles-ci.

Exercice 14. Pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{ix} + e^{iy} &= e^{i(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2})} + e^{i(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2})} \\ &= \left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}}\right)e^{i\frac{x+y}{2}} \\ &= 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}. \end{aligned}$$

L'intérêt de cette écriture est de rendre immédiatement lisible le module et l'argument (à π près, selon le signe du cosinus) du nombre $e^{ix} + e^{iy}$, informations peu évidentes de prime abord. On s'en sert implicitement également à la troisième ligne de calcul dans l'exercice 4, avec $y = 0$ et $x = \theta$ ou $n\theta$.

Et de même, pour tous x, y dans $\mathbb{R}$, $e^{ix} - e^{iy} = e^{ix} + e^{i(y+\pi)} = 2\cos\left(\frac{x-y-\pi}{2}\right)e^{i\frac{x+y+\pi}{2}}$, soit $e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}$ (ne pas oublier ce dernier i !).

Exercice 7. a) Il existe plusieurs moyens de parvenir au résultat ; outre la récurrence, qui suppose que l'on connaisse le résultat, en voici deux. D'abord, on peut se servir de la *formule du binôme de Newton*, en écrivant : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$. Ensuite, puisque $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble E à n éléments, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ est le nombre total de parties à k éléments pour k allant de 0 à n, c'est-à-dire le nombre total de parties, de E (ranger les parties selon leur cardinal donne une *partition* de $\mathfrak{P}(E)$). Or si l'on note $x_1, \ldots, x_n$ les éléments de E, on voit que $\mathfrak{P}(E) \to \{0,1\}^n$, $A \mapsto (\varepsilon_1(A), \ldots, \varepsilon_n(A))$, avec $\varepsilon_k(A) = 1$ si $x_k \in A$, 0 sinon, est une bijection. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \operatorname{Card}\mathfrak{P}(E) = \operatorname{Card}\{0,1\}^n = 2^n$.

b) Il suffit de dire, si E est toujours un ensemble à n éléments, qu'il existe une bijection entre l'ensemble des parties de E à p éléments, et celui des parties à $n-p$ éléments, p étant fixé dans $\{0, \ldots, n\}$. Or $A \mapsto E - A$ est une telle bijection.

c) On peut l'écrire avec les factorielles ; on peut aussi raisonner par dénombrement, et dire, une fois fixés un ensemble F à $n+1$ éléments, et un de ses éléments x, qu'il s'agit de compter de deux manières différentes les parties à $p+1$ éléments. La première manière, qui consiste à prendre $p+1$ éléments dans F, donne $\binom{n+1}{p+1}$ de ces parties. La seconde consiste à compter le nombre de ces parties qui contiennent x, et qui sont les $A \cup \{x\}$ avec A parcourant les parties à p éléments incluses dans $F - \{x\}$, au nombre de $\binom{n}{p}$, et le nombre de ces parties qui ne contiennent pas x, et qui sont les parties à $p+1$ éléments incluses dans $F - \{x\}$, au nombre de $\binom{n}{p+1}$. Puisqu'une partie de F à $p+1$ éléments contient x ou ne le contient pas, exclusivement, on en déduit que F inclut $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ parties à $p+1$ éléments, d'où le résultat.