LM 201 - TD 1 et 2 - Contrôle de rentrée

Exercice 1. Soient les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par $u_n = \frac{1}{2\pi n}$ $(n \geq 1)$ et $v_n = \frac{1}{2\pi n+\pi}$ $(n \geq 0)$. Ces deux suites convergent vers 0. Or, si f désigne l'application étudiée, $\big(f(u_n)\big)$ est constante égale à 1, et $\big(f(v_n)\big)$ est constante égale à -1. Par suite f ne peut avoir de limite en 0 sans contredire le théorème de caractérisation séquentielle.

Exercice 2. On regarde d'abord, au cas où f serait continue sur $\mathbb{R}$, si elle a une chance d'avoir une dérivée continue. Or puisque f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée d'une fonction C^1 de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ $(x \mapsto \frac{1}{x})$ avec une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$ (sin), on peut calculer $f'(x)$ pour x non nul, et l'on trouve $-\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme un sinus est toujours en valeur absolue plus petit que 1, le second terme de cette expression est majoré en valeur absolue par $|x|$, ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Cependant, d'après l'exercice 1., le premier terme n'a pas de limite en 0. La somme f' n'a donc pas de limite en 0, et f ne peut donc pas être C^1 sur $\mathbb{R}$. Toutefois, f a une dérivée en 0, qui est 0 (exercice).

Exercice 3. Il s'agit de voir que pour $p \geq 1$, $(S_{2(p+1)} - S_{2p})$ et $(S_{2p+1} - S_{2(p+1)-1})$ sont de signe constant, et que la différence $S_{2p+1} - S_{2p}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. Or, pour tout $p \geq 1$, $S_{2(p+1)} - S_{2p} = \frac{(-1)^{2(p+1)-1}}{(2(p+1))^2} - \frac{(-1)^{2p+1-1}}{(2p+1)^2} = \frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{(2p+2)^2} \geq 0$, ce qui nous donne la croissance de (S_{2p}). De même, (S_{2p+1}) est décroissante. Par ailleurs, pour tout $p \geq 1$, $S_{2p+1} - S_{2p} = \frac{1}{(2p+1)^2}$, ce qui tend bien vers 0 lorsque p tend vers l'infini. On en déduit que les deux sous-suites convergent vers une limite commune, et donc que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ elle-même converge vers cette même limite, puisque pour tout $n \geq 1$, $S_{2[\frac{n}{2}]+1} \leq S_n \leq S_{2[\frac{n}{2}]}$ (avec égalité d'un côté alternant avec la parité de n). On peut d'ailleurs calculer cette limite avec des moyens plus élaborés, et celle-ci vaut $\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 4. Si P''' n'est pas nul, c'est que P est au moins de degré 3, et est donc exactement de degré 3. Par suite, P''' est constant, et vaut 4. Sa primitive P'' s'écrit donc $4X + a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, $4 + a = P''(1) = 3$, donc a vaut -1, et $P'' = 4X - 1$. De même, P' s'écrit $2X^2 - X + b$, $b \in \mathbb{R}$, d'où $P'(1) = 1 + b$; la valeur demandée pour $P'(1)$ étant 2, il vient $b = 2$. Enfin, P s'écrit $\frac{2}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + X + c$ pour un $c \in \mathbb{R}$, ce qui nous donne $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1 + c = P(1) = 1$, soit $c = -\frac{1}{6}$, et $P = \frac{2}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + X - \frac{1}{6}$. On a raisonné ici par condition nécessaire, mais il suffit de refaire les calculs à partir de ce polynôme pour voir qu'il satisfait au problème, et est donc le polynôme recherché.

Exercice 5. Par définition des racines n-èmes d'un nombre complexe, les racines du polynôme étudié, disons P, sont les racines sixièmes de 27. Or, $27 = (\sqrt{3})^6$, donc si ζ désigne une racine primitive sixième de l'unité (*i.e* $\{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^5\}$ représente les 6 racines sixièmes de 1), disons par exemple $e^{i\pi/3}$, alors les racines de P sont les $\sqrt{3}\zeta^j$, $j = 0, \ldots, 5$, ce qui nous donne la factorisation de P dans $\mathbb{C}$, un polynôme de degré 6 ayant 6 racines distinctes ne pouvant avoir de racine double :

$$P = \prod_{j=0}^{5} \left(X - \sqrt{3}\zeta^j\right),$$

i.e. $P = \left(X - \sqrt{3}\right)\left(X + \sqrt{3}\right)\left(X - \sqrt{3}\zeta\right)\left(X - \sqrt{3}\zeta^5\right)\left(X - \sqrt{3}\zeta^2\right)\left(X - \sqrt{3}\zeta^4\right)$, si l'on regroupe les racines réelles d'une part, et les racines non-réelles ($\zeta \notin \mathbb{R}$, puisque $\mathfrak{Im}\zeta = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$, et de même pour ζ^2, ζ^4 et ζ^5) et conjuguées deux à deux d'autre part. On doit donc encore travailler pour obtenir la décomposition de P sur $\mathbb{R}$. Or, en regroupant les binômes faisant intervenir des racines conjuguées, on retrouve des trinômes réels :

$$\left(X - \sqrt{3}\zeta\right)\left(X - \sqrt{3}\zeta^5\right) = \left(X^2 - \sqrt{3}X + 3\right),$$
$$\left(X - \sqrt{3}\zeta^2\right)\left(X - \sqrt{3}\zeta^4\right) = \left(X^2 + \sqrt{3}X + 3\right),$$

et un rapide calcul de discriminant (il vaut -9 dans les deux cas) nous assure que ces trinômes sont irréductibles sur $\mathbb{R}$. D'où la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = \left(X - \sqrt{3}\right)\left(X + \sqrt{3}\right)\left(X^2 - \sqrt{3}X + 3\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 3\right).$$

Exercice 6. Appelons I l'intégrale à calculer, et remarquons en préambule que puisque le discriminant du dénominateur de l'intégrande de I vaut -2, ce dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et l'on n'a donc pas de problème de définition. On écrit ensuite $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(x - \sqrt{2}/2)^2 + 1/2}$, soit $I = 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2(x - \sqrt{2}/2)^2 + 1} = 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1}$. Une primitive de $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$ étant la fonction arctan, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x - 1)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}$, et ainsi

$$I = 2\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x - 1)\right]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\Big(\arctan(1) - \arctan(-1)\Big) = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

J'ai en fait procédé ici à un changement de variable sans le dire, mais puisqu'il s'agit d'un changement linéaire, on ne doit pas se sentir obligé d'utiliser la machinerie, plus puissante mais plus lourde (vérification des bornes, *etc.*), du changement de variable C^1.

Exercice 7. Les racines (« évidentes ») du trinôme $X^2 + 3X + 2$ étant -1 et -2, les solutions de l'équation homogène (on a une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants) sont les $ae^{-x} + be^{-2x}$, a, $b \in \mathbb{R}$. Reste à trouver une solution particulière à l'équation proprement dite. Or le membre de droite est en e^{-2x}. *Si* cette fonction n'était pas solution du problème homogène, on calculerait ses dérivées première et seconde, et on ajusterait le coefficient pour obtenir une solution particulière. Ici, on va le faire avec $y_1 := xe^{-2x}$; la dérivée vaut $-2xe^{-2x} + e^{-2x}$, et la dérivée seconde $4xe^{-2x} - 4e^{-2x}$, d'où $y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = -e^{-2x}$, *i.e.* $-xe^{-2x}$ est solution particulière, et la solution générale s'écrit donc $-xe^{-2x} + ae^{-x} + be^{-2x}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Ici, c'est différent car les coefficients de l'équation ne sont plus constants. On s'en tire en écrivant $y' + xy = e^{-x^2/2} \frac{d}{dx}\left(e^{x^2/2}y\right)$, donc $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2/2}y\right) = (x^2+1)e^{x^2/2}$. Une « intégration par parties formelle » donne pour primitive $xe^{x^2/2} + c$, $c \in \mathbb{R}$, au membre de droite, ce qui donne pour expression générale de la solution de cette équation différentielle $y = x + ce^{-x^2/2}$.

Exercice 9. 1. On sait que $\sin x = x + o_0(x^2) = x\Big(1+o(x)\Big)$, d'où $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x\left(1+o(x)\right)} = \frac{1}{x}\Big(1 + o(x)\Big) = \frac{1}{x} + o_0(1)$, et donc au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{1}{x} + o_0(1) - \frac{1}{x} = o_0(1)\,;$$

par définition des o, $f(x)$ tend donc vers 0 lorsque x tend vers 0 en restant non-nul. Ainsi, il faut (et il suffit) que $l = 0$ pour que f soit continue en 0.
2. On calcule, pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{x^2}$. On écrit ensuite $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5) = x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o_0(x^4)\Big)$, d'où $\sin^2(x) = x^2\Big(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o_0(x^4)\Big)$. On a alors, pour x non nul assez petit,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{\cos x}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o_0(x^4)}\right).$$

Or, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$, donc $\frac{\cos x}{1-\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{45}+o_0(x^4)} = \Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{45} + o_0(x^4)\Big) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{11x^4}{360} + o_0(x^4)$, et pour x non nul assez petit, $f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{11x^4}{360} + o_0(x^4)\right) = \frac{1}{6} - \frac{11x^2}{360} + o_0(x^2)$.

3. C'est la question-piège du contrôle, puisque la réponse se composent de divers points assez délicats. Tout d'abord, comme $l = 0$, f est continue en 0. De plus, f est C^1 à gauche et à droite de 0 (théorèmes standards), et sa dérivée admet d'après le développement limité obtenu en 2. une limite en 0, valant $\frac{1}{6}$. D'après le *théorème de la limite de la dérivée* (que je ne saurais trop vous inviter à relire et si besoin à apprendre précisément), f (et pas sa prolongée, on ne prolonge rien) est alors dérivable en 0, de dérivée $\frac{1}{6}$, et est donc C^1 sur $]-\pi, \pi[$. Et finalement, puisqu'alors f' admet un développement limité d'ordre au moins 1 en 0, dont le terme d'ordre 1 est nul, f' est dérivable en 0 et $f''(0) = 0$. Néanmoins, même si on a un développement d'ordre 2, on ne peut pas affirmer que f' est deux fois dérivable en 0 (bien que cela soit le cas).

Exercice 10. On écrit $x = 1 + h$, et $\log(1 + 1 + h) = \log 2 + \log(1 + h/2) = \log 2 + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + o_0(h^2)$, soit $\log(1 + x) = \log 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o_0(h^2)$. D'autre part, $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + o_0(h^2)$. En multipliant ces deux développements limités, on obtient : $\frac{\log(1+x)}{x} = \log 2 + \left(\frac{1}{2} - \log 2\right) h + \left(\log 2 - \frac{5}{8}\right) h^2 + o_0(h^2)$, soit en remplaçant h par $x - 1$, $\frac{\log(1+x)}{x} = \log 2 + \left(\frac{1}{2} - \log 2\right)(x-1) + \left(\log 2 - \frac{5}{8}\right)(x-1)^2 + o_1\left((x-1)^2\right)$.

Pour des révisions et des compléments de cours (notamment sur les polynômes), je vous demanderais de consulter le document de mon confrère Pierre Nguyen, à l'adresse suivante : `http://www.math.jussieu.fr/~pierre/000Cours.pdf` .