LM 201 - TD 12

1$^{\text{er}}$ décembre 2011

Sauf mention du contraire, les numéros des exercices sont ceux de la feuille d'exercices n°5.

Exercice 17, feuille 4 (DM). 7) Écrivons d'abord l'équation homogène $y''+y=0$. Son équation caractéristique $\lambda^2+1=0$ a pour solutions $\lambda=\pm i$, d'où la solution générale de l'équation homogène $y(x)=a\cos x+b\sin x$, avec a et b des réels quelconques (et on peut même annoncer ce résultat facile sans s'ennuyer à passer par l'équation caractéristique).

Ensuite, on se restreint à un intervalle $I_k := \left]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right[$, $k\in\mathbb{Z}$, et on cherche une solution particulière de l'équation initiale de la forme $y_p(x)=a(x)\cos x+b(x)\sin x$, avec $a(x)$ et $b(x)$ deux fonctions inconnues de classe C^1 qui vérifient $a'(x)\cos x + b'(x)\sin x = 0$ (cette condition est **cruciale** si l'on veut aboutir dans les calculs). L'existence de telles $a(x)$ et $b(x)$ est justifiée par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= a'(x)\cos x + b'(x)\sin x - a(x)\sin x + b(x)\cos x = -a(x)\sin x + b(x)\cos x \\ y_p''(x) &= -a'(x)\sin x + b'(x)\cos x - a(x)\cos x - b(x)\sin x, \end{aligned}$$

d'où l'on tire : $y_p''(x)+y_p(x) = -a'(x)\sin x + b'(x)\cos x$. Par hypothèse, y_p étant une solution particulière de l'équation initiale, il nous reste à résoudre le système

$$\begin{cases} -a'(x)\sin x + b'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \\ a'(x)\cos x + b'(x)\sin x = 0 \end{cases}$$

qui a pour solution $a'(x)=-\tan x$, $b'(x)=1$. On peut alors prendre $a(x)=\log(|\cos x|)$ et $b(x)=x$, et on obtient une solution particulière sous la forme $y_p=\log(|\cos x|)\cos x + x\sin x$. Finalement, la solution générale de l'équation initiale s'écrit $y(x) = \big(a_k+\ln(|\cos x|)\big)\cos x + (b_k+x)\sin x$, où a_k et b_k sont des constantes réelles dépendant de l'intervalle I_k ; on peut effectuer un recollement C^0 entre I_k et I_{k+1} *ssi* $b_k=b_{k+1}$, mais si l'on regarde les dérivées de chaque côté de $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, on voit que le recollement C^1 est impossible.

On a procédé ici par variation des constantes, et les calculs sont restés assez simples. On aurait pu aussi utiliser les « facteurs intégrants » (exponentielles bien choisies), mais comme je vous l'ai démontré *in vivo*, cela mène à des calculs assez épouvantables. La méthode de variation des constantes peut donc parfois tirer de bien mauvais pas. À bon entendeur...

Exercice 2 (DM). Une rapide analyse de la situation nous dit qu'il ne s'agit pas ici d'intervertir limite et intégrale, puisque pour un $t \in [a,b]$ générique, $f(t)\sin(nt)$ n'a aucune raison de converger vers quoi que ce soit. Il faut donc procéder autrement, et se servir des hypothèses de l'énoncé, en particulier que f est de classe C^1. Pour calculer I_n, $n \geq 1$, on peut donc se servir d'une intégration par parties, en remarquant qu'en intégrant $\sin(n\cdot)$ pour $n \geq 1$, on gagne un n au dénominateur :

$$\begin{aligned} I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt &= \left[-f(t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \int_a^b f'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\,dt \\ &= \frac{1}{n}\left[\cos(na)f(a) - \cos(nb)f(b) + \int_a^b f'(t)\cos(nt)\,dt\right]. \end{aligned}$$

Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$ (compact), sa dérivée f' y est continue, donc bornée. Soit donc $M \in \mathbb{R}$ un majorant de $|f'|$ sur cet intervalle. Il vient :

$$\begin{aligned} |I_n| &\leq \frac{1}{n}\left(|\cos(na)f(a)| + |\cos(nb)f(b)| + \int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\,dt\right) \\ &\leq \frac{1}{n}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b M\,dt\right) = \frac{1}{n}(|f(a)| + |f(b)| + M(b-a)) \end{aligned}$$

La quantité $|f(a)|+|f(b)|+M(b-a)$ étant constante, $\frac{1}{n}(|f(a)|+|f(b)|+M(b-a)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En conséquence, $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Exercice 4.

a) $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+1} = \frac{1}{2}$; $u_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2$; $u_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
On a vu que le calcul de u_3 n'était pas infaisable, et était même un bon exercice de décomposition en éléments simples et de calcul intégral ; je vous invite à le refaire pour vous entraîner.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leq 1$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+1} \leq \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^{n+1}} \leq \frac{1}{1+0} = 1$ $(*)$, ou encore $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^{n+1}} \leq 1$ *i.e.* $\frac{1}{2} \geq u_n \geq u_{n+1} \geq 1$, donc (u_n) est une suite croissante et strictement positive (et bornée, ce qui n'était pas demandé). Pour la croissance stricte, supposons $u_n = u_{n+1}$ pour un certain n ; alors $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^n} - \frac{1}{1+x^{n+1}}\right) dx = 0$ et comme l'intégrande est négatif d'après $(*)$, il est identiquement nul, soit $\frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1+x^{n+1}}$ pour tout $x \in [0,1]$, ce qui est absurde (prendre $x = \frac{1}{2}$).

c) On a en fait vérifié presque toutes les hypothèses pour appliquer le théorème de convergence monotone sur $[0,1[$ dans b), puisque pour tout n, $0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$ sur cet intervalle, et 1 y est intégrable. La convergence simple étant automatique (car en tout point on a une suite croissante majorée), il reste à dire que la limite simple, 1, est continue sur $[0,1[$, et le théorème nous dit alors que (u_n) converge vers $\int_{[0,1[} dx = 1$.

Pour faire sans ce théorème, on évalue $u_n - 1$ (qui est négatif, une minoration suffit donc), pour $n \geq 0$. Puisque $1 = \int_0^1 dx$, on a, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n - 1 = \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+x^n} - 1\Big) dx = -\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \geq -\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \frac{-1}{n+1},$$

ce qui est suffisant pour conclure par encadrement.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour récupérer un $\log(1+x^n)$ sous le signe intégrale, procédons à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 \frac{x}{n} \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} dx &= \Big[\frac{x}{n} \log(1+x^n)\Big]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{1}{n} \log(1+x^n)\ dx \\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \log(1+x^n)\ dx,\end{aligned}$$

et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e) On va d'abord montrer que $\frac{1}{n}\int_0^1 \log(1+x^n)\ dx = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (pas besoin de mettre $+\infty$ en indice, puisque c'est « la seule valeur vers laquelle n peut tendre »). Autrement dit, on va montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \log(1+x^n)\ dx = 0$. Pour cela, on pourrait avoir recours aux théorème de Lebesgue ou de Beppo-Levi, mais il est aussi simple de procéder par encadrement. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq \log(1+x^n) \leq x^n$, donc $0 \leq \int_0^1 \log(1+x^n)\ dx \leq \int_0^1 x^n\ dx = \frac{1}{n+1}$, d'où le résultat — et on a même que $\frac{1}{n}\int_0^1 \log(1+x^n)\ dx = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Pour conclure, il suffit de se souvenir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 = -\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$, et de réinjecter le résultat précédent.

Exercice 7. Pour la première intégrale, on procède comme suit : $I = \int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \int_0^1 \frac{2dt}{e^t+e^{-t}} = \int_0^1 \frac{2e^t\ dt}{1+e^{2t}}$. On fait le changement de variable $u = e^t$, ce qui donne $u \in [1, e]$, $du = e^t\ dt$. Ainsi, $I = \int_1^e \frac{2du}{1+u^2} = [2\arctan u]_1^e = 2\left(\arctan e - \frac{\pi}{4}\right)$.

La seconde intégrale est très classique. Géométriquement, on peut l'interpréter comme l'aire du quart du disque unité situé dans le premier quadrant, et on s'attend donc à ce qu'elle vaille $\frac{\pi}{4}$.

Pour le démontrer, on effectue le changement de variable $x = \sin\theta$, où l'on prend $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et ce qui donne formellement $dx = \cos\theta d\theta$. Ainsi, $I = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$ car $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\cos \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (précision à ne pas oublier). Pour achever le calcul, on linéarise le $\cos^2$: pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$. On en déduit que $I = \left[\frac{\sin(2\theta)}{4} - \frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$, ainsi que l'on s'y attendait.