LM 201 - TD 10

17 novembre 2011

Les exercices sont ceux de la feuille n°4, sauf mention contraire.

Exercice 9 (DM). Puisque $\frac{1}{n}$ est strictement positif, $(x+1)^{1/n} - x^{1/n}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 (par valeurs supérieures). Ainsi, $\varphi(x) \sim_{0^+} x^{-1/n}$.

L'équivalent en $+\infty$ n'est pas aussi évident ; on va passer par des développements asymptotiques pour l'obtenir. En effet, pour $x > 0$, on peut mettre en facteur $x^{1/n}$ dans l'expression de $\varphi(x)$, en écrivant :

$$\varphi(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}}\Big((1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{n}} - 1\Big)}{x^{\frac{1}{m}}} = x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}\Big((1+\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{n}} - 1\Big). \tag{1}$$

Or $\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, et $(1+h)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}h + o_0(h)$, donc (en faisant « jouer le rôle de h à $\frac{1}{x}$ ») $(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{nx} + o_{+\infty}\Big(\frac{1}{x}\Big)$. Ainsi, $\varphi(x) = x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}-1} + o_{+\infty}\Big(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}-1}\Big)$, soit :

$$\varphi(x) \sim_{+\infty} x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}-1}.$$

Exercice 10 (DM). *Je mets aussi les d) et e), qui n'étaient pas demandés.*
Tout l'intérêt de l'exercice était de prendre conscience que les formules $\arcsin(\sin x) = x$ et $\arccos(\cos x) = x$ ne sont valables que pour $x \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]$ et $x \in [0, \pi]$ respectivement, et que dans les autres cas on doit se servir des symétries de sin et cos (2π-périodicité, (im)parité, *etc.*) pour se ramener à ces situations. Des remarques similaires sont valables pour la formule $\arctan(\tan x) = x$, valable uniquement pour $x \in]-\pi, \pi[$.

a) Pas de problème ici, la formule $\sin(\arcsin y) = y$ étant vraie dès qu'elle a un sens, *i.e.* dès que $y \in [-1, 1]$. Ainsi, $\sin\Big(\arcsin\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{3}$.

b) Comme $\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on doit modifier l'argument du sin pour conclure. Or $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où $\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

c) De même, $\frac{5\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tandis que $\frac{-\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et $\sin \frac{5\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, d'où $\arcsin \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}$.

d) Cette fois, $\frac{5\pi}{3} \notin [0, \pi]$ et $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$. Comme $\cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3}$, on a $\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

e) On sait que $\tan \frac{\pi}{6} = \tan \frac{7\pi}{6}$ (tan est π-périodique), donc $\arctan\left(\tan \frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 14 (DM).

a) Par encadrement, il est aisé de voir que f est continue en 0 dès que $n \geq 1$. Comme f est alors aussi clairement continue sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, et ce dès que $n \geq 1$.

b) Pour $x \neq 0$, le taux d'accroissement de f en 0 s'écrit $x^{n-1} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$. Si $n \geq 2$, il tend donc vers 0 avec x par encadrement (et en particulier admet une limite), et comme f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$, elle l'est sur $\mathbb{R}$.

Si $n = 1$, la situation est plus problématique : même si f est encore dérivable sur $\mathbb{R}^*$, son taux d'accroissement ne possède plus de limite en 0, comme on le voit en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite avec la suite $(x_k)_{k\geq 1}$ de terme général $\frac{2}{k\pi} > 0$ qui tend donc vers 0. Dans ce cas, f n'est pas dérivable en 0, et ne saurait donc l'être sur $\mathbb{R}$.

c) Supposons déjà $n \geq 2$, car si $n = 1$, on a vu ci-dessus que f n'était pas dérivable sur $\mathbb{R}$, et n'a donc aucune chance d'y être C^1. Dans le cas $n \geq 2$, on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et tous calculs faits f' est donnée par

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) - 2x^{n-2} \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

si $x \neq 0$, et $f'(0) = 0$ par b).

La dérivée f' est donc continue sur $\mathbb{R}^*$; il s'agit de voir quand elle converge vers $f'(0) = 0$. Par encadrement, c'est le cas lorsque $n \geq 3$. En revanche, lorsque $n = 2$, on voit que l'expression ci-dessus n'a pas de limite en 0. En effet, le premier terme tend bien vers 0 avec x par encadrement, mais le second n'a pas de limite ; pour le prouver rigoureusement, on utilise la suite $(x_k)_{k\geq 1}$ de terme général $\frac{2}{k\pi}$, et la caractérisation séquentielle de la limite.

En conclusion, f est C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier *ssi* $n \geq 3$.

Exercice 12. On appelle f la fonction à étudier dans chacun des cas de l'énoncé.

a) f est définie sur $[0,1]$, et dérivable au moins sur $]0,1[$, de dérivée donnée par

$$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

sur cet intervalle. Pour voir que f n'est pas dérivable en 0, on peut argumenter comme suit : f n'est autre que la réciproque de la fonction $\sin^2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$. Elle est donc dérivable en $x \in [0,1]$ *ssi* $\sin^2$ est dérivable (ce qui ne pose pas de problème) de dérivée non nulle en $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $y = f(x)$. Or $f(0) = 0$, et $(\sin^2)'(0) = 0$, donc f n'est pas dérivable en 0. De même, $f(1) = \frac{\pi}{2}$, et $(\sin^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc f n'est pas dérivable en 1.

b) Il est clair que f est définie sur $[-3,3]$ et dérivable uniquement sur $]-3,3[$, de dérivée donnée par $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ sur cet intervalle.

c) f est sans problème définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée donné par $f'(x) = \frac{2x^3}{1+x^4} + 2x\arctan(x^2)$ sur cet ensemble.

d) De même, f est ici définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$, de dérivée donné par $f'(x) = \frac{2\cos(2x)}{1+\sin^2(2x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

e) Ici f est définie sur $\mathbb{R}^*$ (il s'agit d'éviter $\arctan(x^2) = 0$, ce qui n'a lieu que si $x = 0$). Elle est dérivable sur cet ensemble, de dérivée donnée par $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^4)\arctan(x^2)}$.

f) Après votre DM.

Exercice 13.

a) Pour x et y réels, on a $\tanh x \tanh y > -1$, car $|\tanh| < 1$, d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} &= \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}}{1 + \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^y - e^{-y}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^y + e^{-y}\right)}} \\
&= \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^y + e^{-y}\right) + \left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^y - e^{-y}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^y + e^{-y}\right) + \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^y - e^{-y}\right)} \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}} \\
&= \frac{2\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right)}{2\left(e^{x+y} + e^{-(x+y)}\right)} \\
&= \operatorname{th}(x+y).
\end{aligned}$$

b) C'est dans votre DM.

Exercice 17.

1) On réécrit l'équation sous la forme $y' + \frac{1}{1+t^2}y = 0$. La fonction arctan étant une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, cette équation équivaut à $\left(ye^{\operatorname{arctan}}\right)' = 0$, soit $ye^{\operatorname{arctan}} = c \in \mathbb{R}$, ou encore $y = ce^{-arctan}$. Les solutions sont donc les $ce^{-arctan}$, $c \in \mathbb{R}$.

   On pouvait rédiger cette résolution d'une manière plus proche de « celle des physiciens », en prenant quelques précautions. On commence par remarquer que la fonction nulle est solution ; les graphes des solutions ne se coupant pas, une solutions non identiquement nulle ne s'annulera jamais. Soit donc y une solution non identiquement nulle. Puisque y ne s'annule pas, l'équation équivaut à $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{1+t^2}$, ce qui s'intègre en disant que $\ln|y| = k - \operatorname{arctan}$ pour une certaine constante réelle k. Ainsi, $|y| = Ke^{-\operatorname{arctan}}$ où $K = e^k > 0$, *i.e.* $y = \pm Ke^{-\operatorname{arctan}}$. En comptant la fonction nulle, on voit donc que les solutions sont de la forme $ce^{-\operatorname{arctan}}$, $c \in \mathbb{R}$, et la réciproque est facile.