FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

COURS de C_3.

Topologie Algèbrique

-::-::-

Professé par : ROSENBERG

Rédigé par : BETTINELLI

-:-

1ère partie

Année 1968 - 1969

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

COURS de C_3.

Topologie Algèbrique

-::-::-

Professé par : **H. Rosenberg**

Rédigé par : **B. Bettinelli**

-:-

Année 1968 - 1969

Tables des Matières

-::-::-::-

-::-

-:-

RAPPELS SUR LES FONCTEURS.

On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des espaces topologiques.

On définit une application F de $\mathcal{T}$ dans l'ensemble des objets algébriques (à tout espace topologique X correspond $F(X)$). telle que X et Y étant 2 espaces topologiques et f une application continue de X dans Y, il correspond à f une application $F(f)$ de $F(X)$ dans $F(Y)$ qui est un homomorphisme.

De plus, F doit vérifier les axiomes suivants :

1) Si f est l'identité de X alors $F(f)$ est l'identité de $F(X)$.

2) Si $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$ alors le diagramme est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(gof)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
& F(Z)
\end{tikzcd}$$

$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Exemple :

Pour un espace topologique X, posons $H_0(X)$ = le groupe abélien libre engendré par les composantes connexes de X.

Si f est une application continue de X dans Y, alors l'image par f d'une composante connexe de X est contenue dans une composante connexe de Y.

Il existe un homomorphisme $f_{\#} : H_0(X) \to H_0(Y)$ induit par f.

Si on pose $F(X) = H_0(X)$ et $F(f) = f_{\#}$, F est un foncteur.

-::-::-

Problème d'extension.

Soit $A \subset X$ $\quad i : A \to X$

i est l'injection canonique.

Soit $f : A \to Y$

On dit que g est une extension de f à X si le diagramme suivant est commutatif $(f = g \circ i)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & Y \\ A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Si F est un foncteur, l'existence de g implique l'existence d'un homomorphisme $\phi : F(X) \to F(Y)$ tel que :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "F(i)"'] & F(Y) \\ F(X) \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

et on doit avoir :

$$\phi \circ F(i) = F(f) = F(g \circ i) = F(g) \circ F(i)$$

Donc $\psi = F(g)$

Exemple :

Soit $X = I$

$Y = A = \{0,1\}$ $\qquad\qquad$ $f : A \to Y = A$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f = 1_A$

Il n'existe pas d'extension de f à I. En effet, si il existe $g : I \to A$ telle que $g \circ i = 1_A$, on a le diagramme commutatif suivant :

Or $F(1_A) = 1_{H_o(A)}$

$H_o(A) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$H_o(I) = \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
H_o(I) \arrow[r, "F(g)"] & H_o(A) \\
H_o(A) \arrow[u, "F(i)"] \arrow[ur, "F(1_A)"'] &
\end{tikzcd}$$

donc $\begin{tikzcd} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \arrow[r, bend left, "F(i)"] & \mathbb{Z} \arrow[l, bend left, "F(g)"] \end{tikzcd}$

$F(i)$ et $F(g)$ sont des isomorphismes. Or on sait que $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.

Proposition : Si F est un foncteur sur $\mathcal{C}$ et si X est homéomorphe à Y, alors $F(X)$ est isomorphe à $F(Y)$.

Démonstration : Il existe $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $fg = 1_Y$ et $gf = 1_X$

Donc $F(fg) = F(f)\,F(g) = 1_{F(Y)}$

$F(gf) = F(g)\,F(f) = 1_{F(X)}$

Donc $F(g)$ et $F(f)$ sont des isomorphismes entre $F(Y)$ et $F(X)$.

HOMOTOPIE.

Définition 1. Si f_o et f_1 sont deux applications continues de X dans Y, on dit que f_o est homotope à f_1 s'il existe une application H continue de $X \times I$ dans Y telle que, $\forall x \in X$,

$$H(x,0) = f_o(x)$$
$$H(x,1) = f_1(x)$$

Notation : Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, on dit que f est une application de (X,A) dans (Y,B) quand f est une application de X dans Y telle que $f(A) \subset B$.

Par convention, $(X,\emptyset) = X$

On écrit : $(X,A) \times I = (X \times I, A \times I)$.

Définition 1'. Si f_o et f_1 sont deux applications continues de (X,A) dans (Y,B), et $X' \subset X$, on dit que f_o est homotope à f_1 relativement à X' si il existe une application H continue de $(X,A) \times I$ dans (Y,B) telle que :

$$\forall x \in X \quad H(x,0) = f_o(x)$$
$$\forall x \in X \quad H(x,1) = f_1(x)$$
$$\forall x \in X' , \forall t \in I , H(x,t) = f_o(x) .$$

On note $H : f_o \simeq f_1 \quad \text{rel } X'$.

Exemples :

1. $X = Y = \mathbb{R}^n$

On considère les fonctions f et g telles que :

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$g(x) = (0,\dots,0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Alors, f est homotope à g relativement a $(0,\dots,0)$.

En effet soit $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$H(x,t) = (1 - t)x \quad .$$

H est continue par rapport à x et t.

$H(x,0) = x = f(x)$

$H(x,1) = (0,\dots,0) = g(x)$

$H((0,\dots,0),t) = (0,\dots,0) \quad \forall t \in I$.

Donc $H : f \simeq g$ rel $\{(0,\dots,0)\}$.

2. X est un espace topologique quelconque $Y = \mathbb{R}^n$.

On considère deux fonctions f et g, continues qui coïncident sur un sous-espace X' de X. Alors f est homotope à g relativement à X'.

En effet, soit $H : X \times I \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$H(x,t) = (1 - t)\, f(x) + tg(x)$$

H est continue

$H(x,0) = f(x)$

$H(x,1) = g(x)$

Si $x \in X'$, $H(x,t) = f(x) + t(g(x) - f(x)) = f(x)$

Donc $H : f \simeq g$ rel X' .

3. $X = Y = S$

Soit g l'application définie par $g(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\Pi)}$

Alors g est homotope à l'identité sur S^1 .

En effet : soit $H : S' \times I \to S'$ définie par

$$H(e^{i\theta},t) = e^{i(\theta+t\Pi)}$$

on a $H : g \simeq 1_{S^1}$

<u>Théorème.</u>- La relation "être homotope à relativement à X' " est une relation d'équivalence.

<u>Démonstration</u> : elle est reflexive

$f : (X,A) \to (X,A)$

On prend $H(x,t) = f(x)$ $\forall x \in X$, $\forall t \in I$.

Alors $H : f \sim f$ rel X' $\forall X' \subset X$.

Elle est symétrique.

Si $H : f \sim g$ rel X'

posons $G : X \times I \to Y$

$G(x,t) = H(x,1 - t)$

Alors $G : g \simeq f$ rel X' .

Elle est transitive.

Si $H_1 : f_o \simeq f_1$ rel X' , $H_2 : f_1 \simeq f_2$ rel X'

Posons $F : (X,A) \times I \to (Y,B)$

$$F(x,t) = \begin{array}{ll} H_1(x,2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ H_2(x,2t-1) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{array}$$

F est continue, en vertu de la remarque suivante :

Remarque : Soit Z un espace topologique.

A et B deux sous-espaces fermés de Z tels que :

$$Z = A \cup B .$$

Soit $f : A \to Y$ et $g : B \to Y$; f et g sont continues et telles que :

$$g/_{A \cap B} = f/_{A \cap B}$$

Alors la fonction $h : Z \to Y$ définie par

$$h(x) = f(x) \quad \text{si } x \in A$$

$$h(x) = g(x) \quad \text{si } x \in B$$

est continue.

Alors $F : f_o \simeq f_2$ $\text{rel}_{X'}$.

On notera $[\overline{X,A \; ; \; Y,B \; ; \; X'}]$ l'ensemble quotient des fonctions continues de (X,A) dans (Y,B) par cette relation d'équivalence.

Une classe d'homotopie sera notée $[f]_{X'}$.

La relation "être homotope à " est aussi une relation d'équivalence ;

et on notera :

$[X,Y]$ l'ensemble quotient des fonctions continues de X dans Y par cette autre relation d'équivalence.

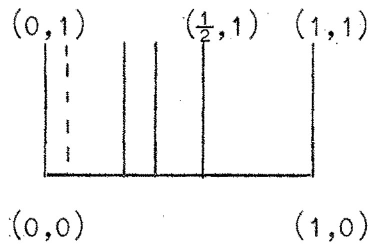
<u>Définition</u>.- On dit que X est contractile si il existe $x_o \in X$ tel que $1_X \simeq C_{x_o}$ (où C_{x_o} est l'application définie par $C_{x_o}(x) = x_o$, $\forall x \in X$) .

<u>Exemple</u> :

Le peigne est contractile.

<u>Définition du peigne</u>.- C'est l'espace topologique

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 1/n \ , \ y \in I\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \ , \ y \in I\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0 \ , \ x \in I\}$$



Montrons que $1_X \simeq C(o,o)$

Soit $F : X \times I \to X$ définie par :

$$F((x,y),t) = \begin{cases} (x,(1-2t)\,y) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ ((2-2t)x,o) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

F est continue.

$F((x,y),0) = (x,y) = 1_X(x,y)$

$F((x,y),1) = (0,0) = C_{(o,o)}(x,y)$

De plus $F : 1_X \simeq C_{(o,o)}$ rel $\{(o,o)\}$ puisque

$$F((0,0),t) = (0,0) \quad \forall t \in I .$$

<u>Remarque</u> : On verra par la suite qu'il existe $G : 1_X \simeq C_{(0,1)}$.

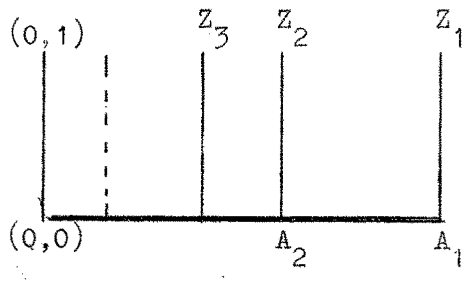
Mais montrons qu'il n'existe pas de fonction G telle que

$$G : 1_X \simeq C_{(o,1)} \text{ rel } \{(o,1)\} .$$

En effet, supposons qu'une telle fonction G existe.

Posons $Z_n = (1/_n, 1)$

$A_n = (1/_n, 0)$



Considérons les fonctions

Considérons les fonctions

$\alpha_n : I \times X$

$\alpha_n(t) = G(Z_n, t)$

$\alpha_n(0) = G(Z_n, 0) = 1_X(Z_n) = Z_n$

$\alpha_n(1) = G(Z_n, 1) = C_{(0,1)}(Z_n) = (0,1)$

α_n est une fonction continue de t et I est un espace connexe.

α_n est donc continue. Pour tout n , il existe t_n tel que $\alpha_n(t_n) = A_n = (1/n , 0)$.

De la suite $\{t_n\}$ on peut extraire une sous-suite $\{t_{n_i}\}$ convergente car X est compact. Soit t la limite de la suite $\{t_{n_i}\}$.

Alors , la suite $\{(Z_{n_i}, t_{n_i})\}$ converge vers $\{(0,1),t\}$. Donc, d'une part : $\lim_{n_i \to \infty} G(Z_{n_i}, t_{n_i}) = G((0,1),t) = (0,1)$.

Mais d'autre part $G(Z_{n_i}, t_{n_i}) = \alpha_{n_i}(t_{n_i}) = A_{n_i} = (1/n_i, 0)$ donc $\lim_{n_i \to \infty} G(Z_{n_i}, t_{n_i}) = (0,0)$

La supposition : $G : 1_X \simeq C_{(0,1)}$ rel$\{(0,1)\}$ conduit donc à une absurdité : G n'existe pas.

<u>Proposition</u> : Si X contractile, alors X est connexe par arcs. Donc X est connexe.

<u>Démonstration</u> : Il existe $x_o \in X$ et une application continue F de $X \times I$ dans X telle que $F : 1_X \simeq C_{x_o}$.

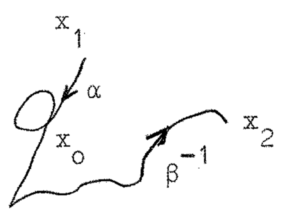
Quelque soit x_1 et x_2 dans X , on peut les joindre par le chemin $\alpha \cup \beta^{-1}$ où

$\alpha : I \to X$

$\alpha(t) = F(x_1, t)$

$\beta : I \to X$

$\beta(t) = F(x_2, t)$



<u>Lemme</u> : Soient f_o et f_1 deux applications continues de (X,A) dans (Y,B) telles que $f_o \simeq f_1$ rel X' .

Soient g_o et g_1 deux applications continues de (Y,B) dans (Z,C) telles que $g_o \simeq g_1$ $\mathrm{rel}_{Y'}$ et $f_o \; 0 \; f_o \simeq g_1 \circ f_1$ $\mathrm{rel}_{X'}$ et $f_o(X') \subset Y'$

Alors $g_o \circ f_o \simeq g_1 \circ f_1$ $\mathrm{rel}_{X'}$

Démonstration : Soit $F : f_o \simeq f_1$ $\mathrm{rel}_{X'}$

$G : g_o \simeq g_1$ $\mathrm{rel}_{Y'}$

La fonction $g_o \circ F : (X,A) \to (Z,C)$ est telle que

$$g_o \circ F(x,0) = g_o f_o(x)$$

$$g_o \circ F(x,1) = g_o f_1(x)$$

$$\forall x \in X' \qquad g_o \circ F(x,t) = g_o \circ f_o(x)$$

Donc $g_o \circ F : g_o f_o \simeq g_o f_1$ $\mathrm{rel}_{X'}$

- Montrons que $g_o f_1 \simeq g_1 f_1$ $\mathrm{rel}_{X'}$

Soit H l'application de $(X,A \times I)$ dans (Z,C) définie par :

$$H(x,t) = G(f_1(x),t) .$$

H est continue

$H(x,0) = G(f_1(x),0) = g_o f_1(x)$

$H(x,1) = G(f_1(x),1) = g_1 f_1(x)$

$\forall x \in X'$, $H(x,t) = G(f_1(x),t) = g_o f_1(x)$ car $f_1(x) \in Y'$.

Donc $H : g_o f_1 \simeq g_1 f_1$ $\mathrm{rel}_{X'}$

- La relation "être homotope à rel X' " est transitive donc

$g_o f_o \simeq g_1 f_1 \quad rel_{X'}$.

<u>Corollaire</u> : Si X est un espace quelconque, Y est contractile, alors toutes les applications continues de X dans Y sont homotopes ($[X,Y]$ est trivial).

<u>Démonstration</u> : Soient f et g deux applications continues de X dans Y.

Il existe $y_o \in Y$ tel que $1_Y \simeq C_{y_o}$

D'autre part : $f \simeq f$

On applique le lemme $(X' = Y' = \emptyset)$:

$f = 1_Y \circ f \simeq C_{y_o} \circ f = C'_{y_o}$ où $C'_{y_o} : X \to Y \quad C'_{y_o}(x) = y_o$

Donc $f \simeq C'_{y_o}$

De même $g = 1_Y \circ g \simeq C_{y_o} \circ g = C'_{y_o}$

Donc $f \simeq g$.

<u>Conséquence</u> : Si X est contractile, alors quelque soit $x_o \in X$, $1_X \simeq C_{x_o}$.

<u>Démonstration</u> : Toutes les applications continues de X dans X sont homotopes.

En particulier, $1_X \simeq C_{x_o} \qquad \forall x_o \in X$.

<u>Théorème</u>.- Si X est contractile, alors $[XY]$ est en correspondance biunivoque avec les composantes connexes par arcs de Y .

Montrons d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Si X et Y sont deux espaces topologiques quelconques alors $\{[f]\} \in [XY]/f \simeq Cte\}$ est en correspondance biunivoque avec les composantes connexes par arc de Y.

<u>Démonstration</u> : A chaque classe d'homotopie $[f]$ de $[XY]$ telle que $f \simeq C_{y_o}$, on fait correspondre la composante par arc de y_o dans Y, notée $C(y_o)$. Posons $\varphi([f]) = C(y_o)$.

- Si C_{y_1} est un autre représentant de la classe $[f]$, alors $C(y_o) = C(y_1)$.

En effet, il existe $F : X \times I$ dans Y telle que

$$F(x,0) = y_o \qquad \forall x \in X$$
$$F(x,1) = y_1 \qquad \forall x \in X$$

et la fonction $\alpha : I \to X$ définie par $\alpha(t) = F(x,t)$ est un chemin de y_o à $y_1 = y_o$ et y_1 sont dans la même composante par acc de Y donc $C(y_o) = C(y_1)$.

Donc φ est une application.

- φ est injective. En effet, soit $[f]$ et $[g]$ dans $[XY]$ telles que $[f] = [C_{y_o}]$ et $[g] = [C_{y_1}]$

et telles que $\varphi[f] = \varphi[g]$.

Donc $C(y_o) = C(y_1)$: y_o et y_1 sont la même composante par arcs de Y. Soit donc $\alpha : I \to Y$ un chemin de y_o à y_1.

La fonction $F : X \times I \to Y$ définie par $F(x,t) = \alpha(t)$ $\forall x \in X$ est une homotopie de C_{y_o} et C_{y_1}.

elle est en effet continue et

$$F(x,0) = \alpha(0) = y_o = C_{y_o}(x)$$

$$F(x,1) = \alpha(1) = y_1 = C_{y_1}(x)$$

Donc $C_{y_o} \simeq C_{y_1}$ et $[f] = [g]$.

- φ est surjective par construction.

Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de remarquer que, quelque soit $f : X \to Y$, f est homotope à C_{y_o} (pour un y_o de Y) car X est contractile.

Alors $\{[f] \in [XY]/f \simeq Cte\} = [XY]$.

Relation d'équivalence dans l'ensemble des paires d'espaces = "avoir même type d'homotopie".

Définitions.-

1. On dit que (X,A) a le même type d'homotopie que (Y,B). Si il existe deux applications f et g continues, $f : (X,A) \to (Y,B)$, $g : (Y,B) \to (X,A)$ telles que $fg \simeq 1_Y$ et $gf \simeq 1_X$.

On note $(X,A) \sim (Y,B)$

f est une équivalence d'homotopie et g est une inverse d'homotopie.

2. Pour toute fonction continue $f : (X,A) \to (Y,B)$, on dit que g est une inverse d'homotopie de f à droite (resp : à gauche) si $fg \simeq 1_Y$ (resp : $gf \simeq 1_X$) .

<u>Lemme</u> : Si f a une inverse d'homotopie à gauche : g_o et une inverse d'homotopie à droite : g_1 , alors f est une équivalence d'homotopie et $g_o \simeq g_1$.

<u>Démonstration</u> : Par hypothèse, $g \circ f \simeq 1_Y$

Alors $g_1 = 1_X g_1 \simeq (g_o f) g_1 = g_o (f g_1) \simeq g_o 1_Y = g_o$

soit $g_1 \simeq g_o$

et $fg_o \simeq fg_1 \simeq 1_Y$.

On a donc : $fg_o \simeq 1_Y$ et $g_o f \simeq f$ est une équivalence d'homotopie.

<u>Théorème</u>.- "Etre de même type d'homotopie" est une relation d'équivalence.

<u>Démonstration</u> : Elle est reflexive car $1_X : (X,A) \to (X,A)$ est une équivalence d'homotopie.

Elle est symétrique :

si $f : (X,A) \to (Y,B)$ est une équivalence d'homotopie, alors il existe $g : (Y,B) \to (X,A)$ telle que $fg \simeq 1_Y$ et $gf \simeq 1_X$. Donc g est une équivalence d'homotopie.

Elle est transitive :

Si $f : (X,A) \to (Y,B)$ et $g : (Y,B) \to (Z,C)$ sont des équivalences d'homotopies, alors gf est une équivalence d'homotopie $(X,A) \sim (Z,C)$.

<u>Proposition</u> : Pour que X soit contractile, il faut et il suffit que X ait le même type d'homotopie qu'un ensemble réduit à 1 seul élement.

<u>Démonstration</u> : Supposons que X contractile : $1_X \simeq C_{x_0}$ $\forall x_0 \in X$.

Posons $P : \{u_0\}$. Alors $X \sim P$.

En effet soit $f : X \to P$ $(f(x) = x_0 \quad \forall x \in X)$.

et $g : P \to X$ $(g(x_0) = x_0)$

On a $fg = 1_P$

$gf = C_{x_0} \simeq 1_X$

Supposons que $X \sim \{Z\}$. Soient $f : X \to \{Z\}$ et $g : \{Z\} \to X$ telles que $fg \sim 1_{\{Z\}}$, $gf \sim 1_X$.

$gf = C_{g(Z)}$ donc $1_X \simeq C_{g(Z)}$ et X est contractile.

<u>Définitions</u>.- Soit $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$

1. On dit que A est un retract faible de X si i a une inverse d'homotopie à gauche (i.e. : $\exists r : X \to A$ telle que $ri \simeq 1_A$)

2. On dit que A est un retract de X si i a une inverse à gauche (i.e.: $\exists r : X \to A$ telle que $ri = 1_A$). On dit que r est une rétraction de X sur A.

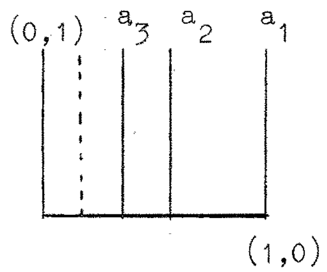
<u>Exemple</u> : $X = \mathbb{R}^2$, A = le peigne (muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$)

A est un retract faible de $\mathbb{R}^2$. En effet A et $\mathbb{R}^2$ sont contractiles donc toutes les applications de A dans A et de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont homotopes. En particulier $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ est une équivalence d'homotopies car $\forall r : \mathbb{R}^2 \to A$,

$ri : A \to A$ donc $ri \simeq 1_A$

$ir : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donc $ir \simeq 1_X$.

Mais le peigne n'est pas un retract de X. En effet, supposons qu'il existe $r : \mathbb{R}^2 \to A$ telle que $ri = 1_A$.



Posons $a_n = (1/n \ , \ 1)$

ℓ_n = le segment $[a_n \ , \ a_{n+1}]$

$r(a_n) = a_n$ et $r(a_{n+1}) = a_{n+1}$,

l'image de ℓ_n par l'application continue r est connexe. Donc, il existe $Z_n \in \ell_n$ tel que $r(Z_n) = (1/n, 0)$.

D'une part $\lim\limits_{n \to \infty} r(Z_n) = (0,0)$

D'autre part $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n (0,1)$ donc (puisque r est continue)

$\lim\limits_{n \to \infty} r(Z_n) = (0,1)$.

Cette absurdité montre que r n'existe pas.

Théorème.- Pour que A soit un retract de X , il faut et il suffit que pour tout X , il faut et il suffit que pour tout Y et pour toute application $f : A \to Y$ continue, f ait une extension $g : X \to Y$

(ie : $g_i = f$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "g"] & Y \\ A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration : Supposons que A soit un retract de X . Il existe r continue de X dans A telle que $ri = 1_A$.

Posons $g = fr$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "for"] \arrow[d, "r"'] & Y \\ A \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

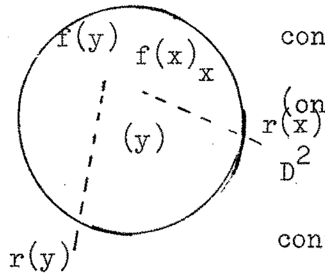
Alors $gi = (fr)i = f(ri) = f1_A = f$. Donc g est une extension de f à X .

Supposons que pour tout Y et toute $f : A \to Y$, f a une extension $g : X \to Y$.

Prenons $Y = A$, $f = 1_A$. Donc il existe $r : X \to A$ telle que $ri = f = 1_A$: A est un retract de X .

Application : Supposons que S' n'est pas un retract de D^2 (ce qui est vrai). Alors toute application continue $f : D^2 \to D^2$ admet un point fixe.

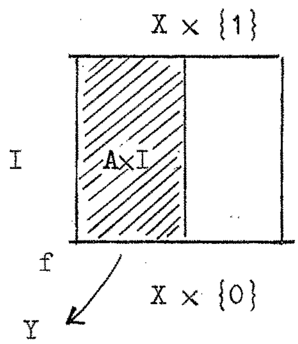
Démonstration : Supposons que $f : D^2 \to D^2$ n'a pas de point fixe. On peut alors construire une rétraction de D^2 sur S^1 comme le montre la figure. Cette



construction est possible car f n'a pas de point fixe (on peut toujours tracer une droite passant par 1 point de D^2 et son image par f). La fonction r ainsi définie est continue car f est continue.

On voit que si $y \in S'$ $r(y) = y$, r est donc bien une rétraction de D^2 sur S^1 ce qui contredit l'hypothèse.

<u>Définition</u> .- On dit que (XA) à la propriété d'extension des homotopies pour les applications dans Y et on note "(X,A) à la PEH pour Y" si, pour toute application $f : [X \times \{0\}] \cup A \times I \to Y$ telle que $f/X \times \{0\}$ et $f_{/A \times I}$ soient continues, alors, il existe $g : X \times I \to Y$, continue telle que $g \circ i = f$



$$X \times \{0\} \cup A \times I \xhookrightarrow{i} X \times I .$$

<u>Proposition</u> : Si f et g sont deux applications homotopes de A dans Y , telles que f s'étend à $\tilde{f} : X$ dans Y .

Si (X,A) à la PEH pour Y .

Alors g s'étend aussi et on peut choisir son extension g telle que $\tilde{g} \simeq \tilde{f}$.

Démonstration : Soit H une application de $A \times I$ dans Y telle que $H : f \simeq g$.

Soit f_0 l'application de $X \times \{0\} \cup A \times I$ dans Y définie par :

$$f_o(x,0) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \in X$$

$$f_o(a,t) = H(a,t) \quad \forall a \in I \quad \forall t \in I .$$

f_o est bien définie car pour $t = 0$ et $\forall a \in A$:

$$\tilde{f}(a) = H(a,o) = f(a)$$

$f_{o|X \times \{0\}}$ et $f_{o|A \times I}$ sont continues puisque $\tilde{f}$ et H sont continues.

Puisque (X,A) à la PEH pour Y, il existe une application continue $F : X \times I \to Y$ telle que $F_{/X \times \{0\} \cup A \times I} = f_o$.

Posons $\tilde{g}(x) = F(x,1)$

$\tilde{g}$ est une extension de g à X car, $\forall a \in A$,

$$\tilde{g}(a) = F(a,1) = f(a,1) = H(a,1) = g(a)$$

D'autre part : $F : f \simeq g$ par construction.

Proposition : Si (X,A) à la PEH pour A , alors A est un retract faible de X si et seulement si A est un retract de X . De plus, quelque soit $r : X \to A$ telle que $ri \simeq 1_A$, r est homotope à une rétraction $r' : X \to A$.

Démonstration : Il est évident que si A est un retract de X , alors A est un retract faible de X .

- Supposons que A est un retract faible de X : Il existe $r : X \to A$ et $F : A \times I \to A$ telles que $F : ri \simeq 1_A$.

Soit f l'application de $A \times I \cup X \times \{0\}$ dans A définie par :

$$f(a,t) = F(a,t) \qquad \forall a \in A \quad \forall t \in I$$
$$f(x,0) = r(x) \qquad \forall x \in X .$$

f est bien définie car pour $t = 0$, $\forall a \in A$: $F(a,0) = ri(a) = r(a)$.

$f_{|A \times I}$ et $f_{|X \times \{0\}}$ sont continues car F et r sont continues.

Puisque (X,A) à la PEH pour A, il existe une application $g : X \times I \to A$ telle que $g_{|X \times \{0\} \cup A \times I} = f$.

Définissons une rétraction r' de X dans A en posant $r'(x) = g(x,1)$.

On a bien $r'i = 1_A$ car $\forall a \in A$, $r'(a) = g(a,1) = f(a,1) = F(a,1) = 1_A(a) = a$.

D'autre part $g : r \simeq r'$ par construction.

Définitions :

1. Une déformation D de X est une application continue $D : X \times I \to X$ telle que $D(x,0) = x \quad \forall x \in I$

(i.e. : D est une homotopie de l'identité sur X).

Si D est une déformation de X telle que $D(x,1) \in A \quad \forall x \in X$, on dit que X est déformable dans A .

2. On dit que A est un retract déformation faible de X si $i : A \hookrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie.

3. On dit que A est un retract déformation de X si il existe une rétraction $r : X \to A$ telle que $ir \simeq 1_X$.

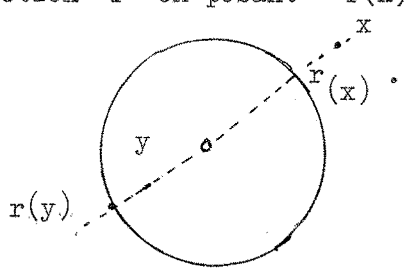
4. On dit que A est un retract déformation fort de X si il existe une rétraction $r : X \to A$ telle que $ir \simeq 1_X$ rel A .

Exemples :

1. $X = \mathbb{R}^n - \{(0,\dots,0)\}$ $\qquad A = S^{n-1}$

Alors A est un retract déformation fort de X .

En effet, on peut définir une rétraction r en posant $r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$



On a bien $ri = 1_{S^{n-1}}$ car si $\|x\| = 1$, $r(x) = x$.

D'autre part, soit $F : \mathbb{R}^n\{(0,\dots,0)\} \times I \to \mathbb{R}^n\{(0,\dots,0)\}$ définie part :

$$F(x,t) = (1-t)x + \frac{tx}{\|x\|}$$

F est continue

$F(x,0) = 1_X(x)$

$F(x,1) = ir(x)$

et $\forall x \in S^{n-1}$ $\quad F(x,t) = \dfrac{(1-t)x}{\|x\|} + \dfrac{tx}{\|x\|} = \dfrac{x}{\|x\|} = r(x)$

Donc $F : 1_X \simeq ir \text{ rel } S^{n-1}$.

2. $X = \mathbb{R}^2 - \{(1,0),(-1,0)\}$

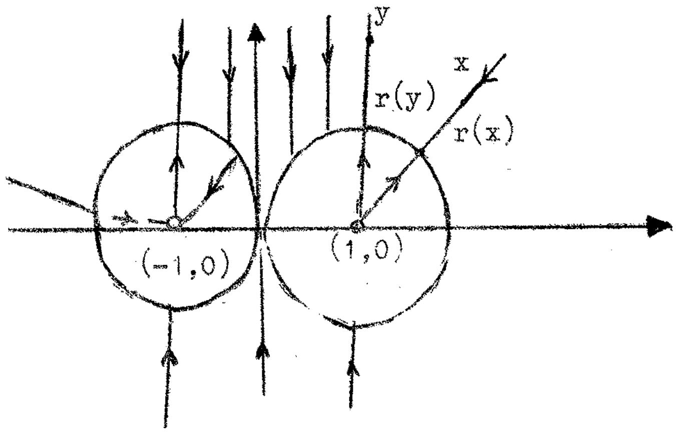
C_1 = le cercle de rayon 1, de centre $(1,0)$

C_2 = le cercle de rayon 1, de centre $(-1,0)$

$A = C_1 \cup C_2$

Alors A est un retract déformation fort de X .

En effet, on peut définir une rétraction r : comme le montre la figure.
Les fonctions ir et 1_X sont identiques sur A .
donc $ir \simeq 1_X \text{ rel}_A$.



3. $X = \mathbb{R}^2$, A = le peigne.

Le peigne est un retract déformation faible de $\mathbb{R}^2$ mais pas un retract déformation de $\mathbb{R}^2$.

En effet, $\mathbb{R}^2$ et le peigne sont contractiles.

Donc quelque soit $r : \mathbb{R}^2 \to A$, $ri : A \to A$ est homotope à 1_A et $ir : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est homotope à $1_{\mathbb{R}^2}$.

Le peigne n'est pas un retract déformation de $\mathbb{R}^2$ car ce n'est pas un retract de $\mathbb{R}^2$.

4. X = le peigne, A est le point $(0,1)$.

$(0,1)$ est un retract déformation du peigne mais pas un retract déformation fort.

En effet, soit $r : X \to \{(0,1)\}$ $(r(x) = (0,1)\ \forall x \in X)$

Alors $ri : \{0,1\} \to \{0,1\}$ est l'identité, et $ir : X \to X$ est l'application constante $C_{(0,1)}$.

Or, on a vu que $C_{(0,1)} \simeq 1_X$ mais on n'a pas $C_{(0,1)} \simeq 1_X$ $\mathrm{rel}\{(0,1)\}$.

<u>Proposition</u> : Si (X,A) à la PEH pour A, alors A est un retract déformation faible de X si et seulement si A est un retract déformation de X.

<u>Démonstration</u> : Il est évident que si A est un retract déformation de X, A est un retract déformation faible de X.

Supposons que A est un retract déformation faible de X. i est une équivalence d'homotopie. Donc il existe $r : X \to A$ telle que :

$$ri \simeq 1_A \quad \text{et} \quad ir \simeq 1_X .$$

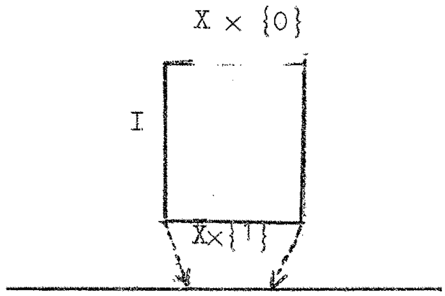
En particulier, A est un retract faible de X. On a vu, qu'alors, A est un retract de X et que, de plus, on peut trouver $r' : X \to A$ telle que $r'i = 1_A$ et $r' \simeq r$.

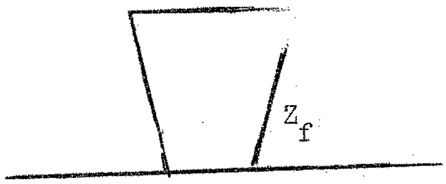
Donc $ir' \simeq ir \simeq 1_X$.

MAPPING CYLINDER.

Soit une application f de X dans Y continue. On considère l'ensemble $(X \times I) + Y$ formé des couples (x,t) $(x \in X\ ,\ t \in I)$ et des $y \in Y$.

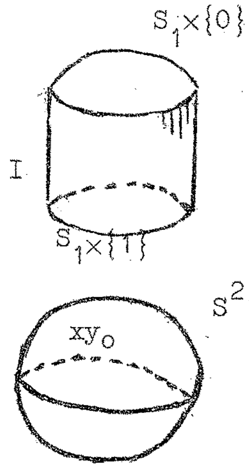
On pose $Z_f = \dfrac{(X \times I) + Y}{\mathcal{R}}$ où R est la relation d'équivalence qui identifie $(x,1)$ avec $f(x)$ pour tout x de X, et qui est l'égalité pour les autres points de $X \times I + Y$

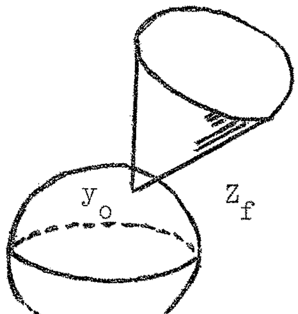




Exemple :

$X = S^1$ $\quad Y = S^2$ $\quad f$ est l'application de S^1 dans S^2 telle que $f(x) = y_o$ $\quad \forall x \in S^1$.





On notera $[(x,t)]$ la classe d'équivalence de $(x,t) \in X \times I$ dans Zf et $[y]$ la classe de $y \in Y$ dans Zf .

Soit i l'application de X dans Zf telle que $i(x) = [(x,0)]$.
Soit j l'application de Y dans Zf telle que $j(y) = [y]$.

i et j sont des homéomorphismes sur leurs images $i(X) = X'$ et $j(Y) = Y'$.

<u>Théorème</u>.- Y' est un retract déformation fort de Zf .

<u>Démonstration</u> : Soit i' l'injection canonique de Y' dans Zf. Soit r l'application de Zf dans Y' définie par :

$$r([x,t])=r([f(x)]) \quad \forall x \in X \quad , \quad \forall t \in I \ .$$
$$r([y]) = [y] \ .$$

r est bien définie car

$$r([f(x)]) = r([(x,1)]) = [f(x)]$$

r est continue car elle est continue sur $X \times I/\mathfrak{R}$ et sur $Y/\mathfrak{R} = Y'$ qui sont fermés dans Zf .

r est une rétraction de Y' dans Zf puisque

$$ri'[y] = 1_{Y'}[y]$$

Montrons que $i'r \simeq 1_{Zf} \ \mathrm{rel}_{Y'}$:

Soit $F : Zf \times I \rightarrow Zf$ définie par :

$$F([x,t],\ \tau) = [(x,(1-\tau)\,t+\tau)]$$

$$F([y],\ \tau) = [y]$$

F est bien définie car :

$$F([x,1],\ \tau) = [(x,1)] = [f(x)] = F([f(x)],\ \tau)$$

F est continue car elle est continue sur $X \times I/_{\mathcal{R}} \times I$ et sur $Y' \times I$ qui sont fermés dans $Z_f \times I$.

$$F([x,t],0) = 1_{Zf}([o,t])$$

$$F([y],0) = 1_{Z_f}([y_1])$$

$$F([x,t],\ 1) = [(x,1)] = [\ f(x)] = r([x,t])$$

$$F([y],\ 1) = [y] = r([y])$$

Sur Y', F est l'identité.

Donc $F : 1_{Z_f} \simeq i'r \ \ \mathrm{rel}Y'$

ce qui exprime que Y' est un retract déformation fort de Z_f .

<u>Remarque</u> : Si on pose $r^1 = j^{-1}r$, (où j^{-1} est l'inverse de $j : Y \to Y'$) , alors pour toute application $f : X \to Y$, on a $f = r'i$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & Y \arrow[r, "j"] & Y' \\
 & Z_f \arrow[u, "r'"'] \arrow[ur, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

On connaît donc f si on connaît Z_f .

<u>Proposition</u> : Si f est une équivalence d'homotopie alors i est aussi une équivalence d'homotopie.

<u>Démonstratioh</u> :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & Y \arrow[r, "j"] & Y' \arrow[dl, bend left, "i'"] \\
& Z_f \arrow[u, "r'"'] \arrow[ur, "r"] &
\end{tikzcd}$$

$jf = ri$

$i'jf = i'ri \simeq 1_{Z_f} i = i$ car $i'r \simeq 1_{Z_f}$

Or i' est une équivalence d'homotopie

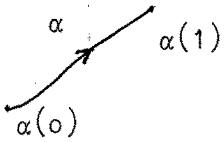
j est une équivalence d'homotopie

f est une équivalence d'homotopie.

Donc i est une équivalence d'homotopie.

LE GROUPE FONDAMENTAL (de POINCARE).

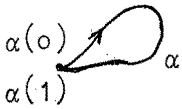
<u>Définitions</u>.- Un <u>chemin</u> dans X est une application continue $\alpha : I \to X$.



On dit que $\alpha(o)$ est l'<u>origine</u> du chemin

et que $\alpha(1)$ est <u>la fin</u> du chemin.

On dit que α est un chemin de $\alpha(o)$ à $\alpha(1)$



Un <u>lacet</u> est un chemin tel que $\alpha(o) = \alpha(1)$.

<u>Définition</u>.- Soient α et β deux chemins dans X tels que $\alpha(1) = \beta(o)$.

On définit <u>$\alpha o \beta$</u> comme étant le chemin défini par :

$$\alpha \circ \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & o \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 . \end{cases}$$

<u>Définition</u>.- Soit $x_o \in X$.

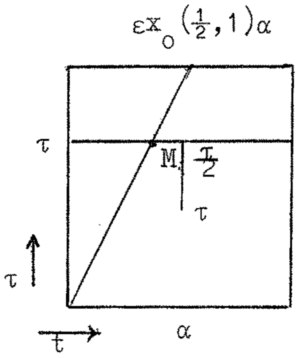
On appelle <u>chemin constant</u> ε_{x_o} le chemin tel que $\varepsilon_{x_o}(t) = x_o \ \forall t$.

On appelle <u>chemin inverse</u> de α le chemin α^{-1} défini par

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t) .$$

<u>Propriété 1</u>. Soit X , $x_o \in X$, α chemin tel que $\alpha(o) = x_o$.

Alors $\varepsilon_{x_o} \circ \alpha \simeq \alpha \ \mathrm{rel}\{o,1\}$.



Soit F l'homotopie cherchée :

$$\begin{cases} F : I \times I \to X \text{ continue.} \\ \text{telle que } f(t,o) = \alpha(t) \\ \qquad\qquad f(t,1) = (\varepsilon x_o \circ \alpha)(t) \\ \forall\tau \quad F(o,\tau) = \alpha(o) \\ \forall\tau \quad F(1,\tau) = \alpha(1) \end{cases}$$

Prenons $F(t,\tau) = \begin{cases} x_o & \text{si } o \leqslant t \leqslant \frac{\tau}{2} \\ \alpha[h(t)] & \text{si } \frac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$

avec $h(t) = at + b$.

Déterminons a et b :

$$\left.\begin{array}{l} h(\frac{\tau}{2}) = 0 \\ h(1) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = \dfrac{2}{2-\tau} \\ b = \dfrac{\tau}{\tau-2} \end{array} \Longrightarrow h(t) = \frac{2t - x}{2 - \tau}$$

F est continue parce que α et h le sont et parce que pour $t = \frac{\tau}{2}$ $\alpha(h(t)) = \alpha(o) = x_o$.

D'autre part $F(t,o) = \alpha(t)$

$$F(t,1) = \left.\begin{cases} x_o & \text{si } o \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}\right\} = (\varepsilon_{x_o} \circ \alpha)t)$$

et $\forall\tau \quad F(o,\tau) = x_o = \alpha(o)$

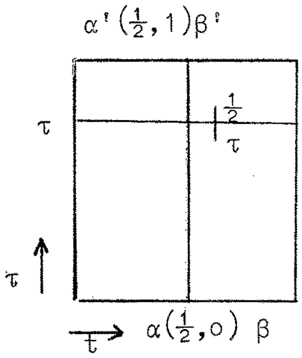
$\forall\tau \quad F(1,\tau) = \alpha(1)$

C.Q.F.D.

Propriété 2.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \simeq \alpha' \text{ rel } I \\ \beta \simeq \beta' \text{ rel } I \\ \alpha(1) = \beta(o) \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \circ \beta \simeq \alpha' \circ \beta' \text{ rel } \partial I .$$

Remarquons d'abord que $\alpha' \circ \beta'$ a bien un sens : $\alpha'(1) = \beta'(o)$. En effet $\alpha \simeq \alpha'$ rel ∂I et $\beta \simeq \beta'$ rel ∂I, donc α et α', β et β' ont mêmes extrémités.



Soit F_1 l'homotopie rel ∂I entre α et α'

$$F_1 : I \times I \to X \text{ continue}$$

$$F_1(t,o) = \alpha(t)$$

$$F_1(t,1) = \alpha'(t)$$

$$\forall t \quad F_1(o,\tau) = \alpha(o)$$

$$\forall \tau \quad F_1(1,\tau) = \alpha(1)$$

Soit F_2 l'homotopie rel ∂I entre β et β'

$$F_2 : I \times I \to X \text{ continue}$$

$$F_2(t,o) = \beta(t)$$

$$F_2(t,1) = \beta'(t)$$

$$\forall \tau \quad F_2(o,\tau) = \beta(o)$$

$$\forall \tau \quad F_2(1,\tau) = \beta(1) .$$

Prenons pour F l'application suivante :

$$F(t,\tau) = \begin{cases} F_1(2t,\tau) & \text{si } o \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ F_2(2t-1,\tau) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

F est continue car F_1 et F_2 le sont et que pour $t = \frac{1}{2}$

$$F_1(1,\tau) = \alpha(1) = \beta(o) = F_2(o,\tau) .$$

$$F(t,o) = \begin{cases} F_1(2t,o) & o \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ F_2(2t-1,0) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t) & o \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \beta(2\tau-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} = (\alpha \circ \beta)(t)$$

de même $f(t,1) = (\alpha' \circ \beta')(t)$

et $\forall \tau \quad f(o,\tau) = f_1(o,\tau) = \alpha(o) = (\alpha \circ \beta)(o)$

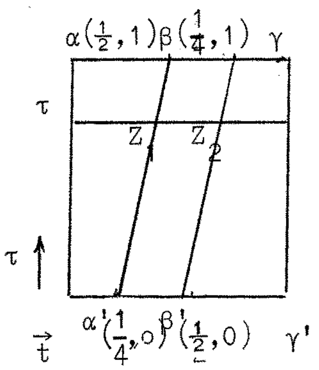
$\forall \tau \quad f(1,\tau) = f_2(1,\tau) = \beta(1) = (\alpha \circ \beta)(1).$

C.Q.F.D.

f est donc bien l'homotopie cherchée.

Propriété 3. Soient α, β, γ 3 chemins dans X tels que $\alpha(1) = \beta(o)$ et $\beta(1) = \gamma(o)$

Alors $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma \simeq \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ rel ∂I .



$$Z_1 \left| \begin{matrix} \frac{\tau+1}{4} \\ \tau \end{matrix} \right. \qquad Z_2 \left| \begin{matrix} \frac{\tau+2}{4} \\ \tau \end{matrix} \right.$$

Soit $F : I \times I \to X$

$(t,\tau) \to f(t,\tau)$

Prenons l'application f définie par :

$F(t,\tau) = \alpha(\frac{4t}{\tau+1}) \qquad$ si $\quad o \leqslant t \leqslant \frac{\tau+1}{4}$

$$f(t,\tau) = \beta(4t - \tau - 1) \quad \text{si} \quad \frac{\tau+1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\tau+2}{4}$$

$$f(t,\tau) = \gamma(\frac{4t - 2 - \tau}{2 - \tau}) \quad \text{si} \quad \frac{\tau + 2}{4} \leqslant t \leqslant 1$$

f est continue parce que α β et γ le sont, parce que

$$[a(\frac{4t}{\tau+1})]_{t = \frac{\tau+1}{4}} = \alpha(1) = \beta(o) = [\beta(4t - \tau - 1)]_{= \frac{\tau+1}{4}}$$

et parce que $[\beta(4t - \tau - 1)]_{t = \frac{\tau+2}{4}} = \beta(1) = \gamma(o) = [\gamma(\frac{4t - 2 - \tau}{2 - \tau})]_{t = \frac{\tau+2}{4}}$

$$\left.\begin{aligned} f(t,o) &= \alpha(4t) \quad \text{si } o \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{4} \\ &= \beta(4t - 1) \quad \text{si } \tfrac{1}{4} \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2} \\ &= \gamma(2t - 1) \quad \text{si } \tfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{aligned}\right\} = [(\alpha \circ \beta) \circ \gamma](t)$$

$$\left.\begin{aligned} f(t,1) &= \alpha(2t) \quad \text{si } o \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2} \\ &= \beta(4t - 2) \quad \text{si } \tfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant \tfrac{3}{4} \\ &= \gamma(4t - 3) \quad \text{si } \tfrac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1 \end{aligned}\right\} = [\alpha \circ (\beta \circ \gamma)](t)$$

D'autre part $\forall\tau \quad f(o,\tau) = \alpha(o) = [(\alpha \circ \beta) \circ \gamma](o)$

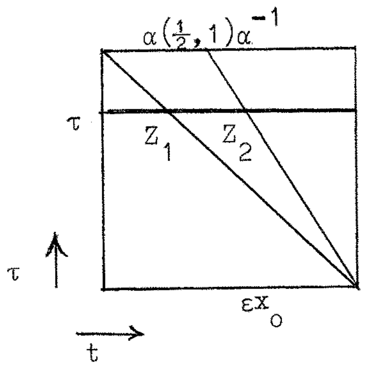
$\forall\tau \quad f(1,\tau) = \gamma(1) = [(\alpha \circ \beta) \circ \gamma](1)$

C.Q.F.D.

F est bien l'homotopie cherchée.

<u>Propriété 4.</u> Soit α un chemin de X tel que $\alpha(o) = x_o \in X$. Alors

$$\alpha \circ \alpha^{-1} \sim \varepsilon_{x_o} \quad \text{rel}\, \partial I .$$



$$Z_1 \left| \begin{array}{l} 1-\tau \\ \tau \end{array} \right. \qquad\qquad Z_2 \left| \begin{array}{l} \frac{2-\tau}{2} \\ \tau \end{array} \right.$$

Soit $F : I \times I \to X$ définie par

$$\begin{aligned} f(t,\tau) &= x_o & o \leqslant t \leqslant 1-\tau \\ &= \alpha\left(\frac{2t}{\tau} - \frac{2(1-\tau)}{\tau}\right] & 1-\tau \leqslant t \leqslant \frac{2-\tau}{2} \\ &= \alpha^{-1}\left(\frac{2t}{\tau} + \frac{\tau-2}{\tau}\right) & \frac{2-\tau}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{aligned}$$

F est continue car α et α^{-1} le sont et parce que :

$$\left[\alpha\left(\frac{2t}{\tau} - \frac{2(1-\tau)}{\tau}\right)\right]_{t\, =\, 1-\tau} = \alpha(o) = x_o$$

et parce que $\left[\alpha^{-1}\left(\frac{2t}{\tau} + \frac{\tau-2}{\tau}\right)\right]_{t\, =\, \frac{2-\tau}{2}} = \alpha^{-1}(o) = \alpha(1)$

$$\left[\alpha\left(\frac{2t}{\tau} - \frac{2(1-\tau)}{\tau}\right]_{t\, =\, \frac{2-\tau}{2}}$$

D'autre part $f(t,o) = x_o = \varepsilon_{x_o}(t)$

$$\left.\begin{aligned} f(t,1) &= \alpha(2t) & o \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2} \\ &= \alpha^{-1}(2t-1) & \tfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{aligned}\right\} = \alpha \circ \alpha^{-1}(t)$$

On a aussi :

$\forall \tau \; f(o,\tau) = x_o = \varepsilon_{x_o}(0)$

$\forall \tau \; f(1,\tau) = \alpha^{-1}(1) = \alpha(o) = \varepsilon_{x_o}(1)$

C.Q.F.D.

f est bien l'homotopie cherchée.

Propriété 5. Soient α et β 2 chemins de X tels que $\alpha(1) = \beta(o)$.
Alors $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$.

$$(\alpha \circ \beta)^{-1} = (\alpha \circ \beta)(1-t) = \begin{cases} \alpha(2(1-t)) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \\ \beta(2(1-t)-1) & o \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= (\beta \circ \alpha)(1-t) = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}(t) .$$

Définition du groupe fondamental.

On définit $H_1(X,x_o) = \{[\alpha]$ à α lacet en x_o et

$([\alpha] = [\beta] \Longleftrightarrow (\alpha \sim \beta \text{ rel } \partial I)\}$.

Si on veut $H_1(X,x_o) = [I, \; I \; ; X, \; x_o \; ; \; I]$

Théorème.- La composition des classes de chemins fait de $H_1(X,x_o)$ un groupe.

- La loi de groupe sur $H_1(X,x_o)$ est définie par $[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha \circ \beta]$.

Elle est bien définie d'après la propriété 2 des chemins.

- Elle est associative

- L'élément neutre est $[\varepsilon_{x_0}]$.

en effet $[\alpha] \circ [\varepsilon_{x_0}] = [\alpha \circ \varepsilon_{x_0}] = [\alpha]$ d'après la propriété n°1 des chemins.

- Le symétrique de $[\alpha]$ est $[\alpha^{-1}]$

car $[\alpha] \circ [\alpha^{-1}] = [\alpha \circ \alpha^{-1}] = [\varepsilon x_0]$ d'après la propriété 4 des chemins

C.Q.F.D.

<u>Définissons un homomorphisme $f_{\#} : H_1(X,x_0) \to H_1(Y,y_0)$</u> .

Soit $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ continue.

Soit $[\alpha] \in H_1(X,x_0) \Longrightarrow \alpha : I \to X$ continue tel que $\alpha(o) = \alpha(1) = x_0$

Soit $f \circ \alpha : I \to Y$ $f \circ \alpha$ est contipue car f et α le sont et on a

$(f \circ \alpha)(\partial I) = f(x_0) = y_0$.

donc $f \circ \alpha$ est un lacet en y_0 .

donc $[f \circ \alpha] \in H_1(Y,y_0)$.

<u>Définition</u> : Posons $f_{\#}[\alpha] = [f \circ \alpha]$.

- C'est bien une application de $H_1(X,x_0) \to H_1(Y,y_0)$

- $f_{\#}$ est bien définie

en effet $(\beta \simeq \alpha \text{ rel } I) \Longrightarrow (f \circ \alpha \simeq f \circ \alpha' \text{ rel } \partial I)$

- $f_{\#}$ est un homomorphisme :

en effet

$$f_{\#}([\alpha] \circ [\beta]) = f_{\#}([\alpha \circ \beta] = [f \circ (\alpha \circ \beta)]$$

Attention : le 1er signe "o" désigne la composition des fonctions, le 2ème signe "o" désigne la composition des lacets

$$[f \circ (\alpha \circ \beta)] = [(f\alpha) \circ (f\beta)] = [f\alpha] \circ [f\beta] = f_{\#}[\alpha] \circ f_{\#}[\beta] \, .$$

Propriété 1. Si $f \simeq 1_X \Longrightarrow f_{\#} = \mathrm{Id}$ du groupe $H_1(X,x_0)$.

c'est par définition de $f_{\#}$

Propriété 2. Soit $(X,x_0) \xrightarrow{f} (Y,y_0) \xrightarrow{g} (Z,z_0)$ alors $g_{\#}f_{\#} = (g \circ f)_{\#}$.

$$(gf)_{\#}[\alpha] = [(gf)(\alpha)] = [g(f(\alpha))] = g_{\#}[(f(\alpha))] = g_{\#}f_{\#}[\alpha] \, .$$

Propriété 3. Soient f_0 et $f_1 : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ tels que $f_0 \simeq f_1$ rel $\{x_0\}$. Alors $f_{0\#} = f_{1\#}$

Soit $\alpha \in H_1(X,x_0) \Longrightarrow \alpha : I \to X$ continue

t.q. $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$

$f_0 \simeq f_1$ rel$\{x_0) \Longrightarrow f_0 \circ \alpha \simeq f_1 \circ \alpha$ rel∂I .

donc $f_{0\#}[\alpha] = [f_0 \circ \alpha] = [f_1 \circ \alpha] = f_{1\#}[\alpha]$

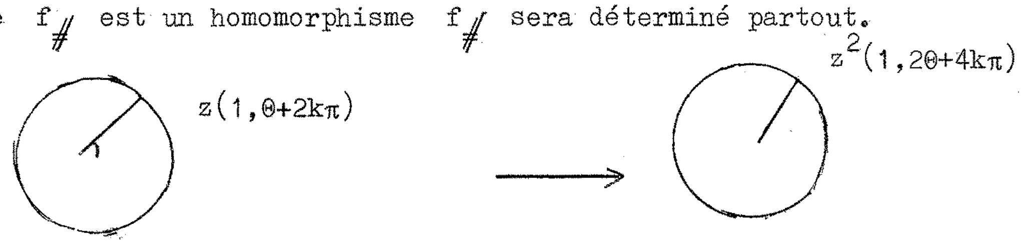
Exemple : calculons $f_{\#} : H_1(S^1,1) \to {}_1(S_1,1)$.

$M_1(S^1,1) \approx Z$ (Problème 2) . $1 \in S^1 = (1,0) \in \mathbb{R}^2$

considérons $f : (S^1,1) \to (S^1,1)$

$z \mapsto z^2$

Il suffit de déterminer $f_{\#} : \mathbb{Z}' \to \mathbb{Z}'$ sur un générateur n du groupe libre $\mathbb{Z}'$. Comme $f_{\#}$ est un homomorphisme $f_{\#}$ sera déterminé partout.



Posons $f_{\#}(n) = 2\,n$.

Théorème.- Si (X,x_0) et (Y,y_0) ont le même type d'homotopie, alors alors $H_1(X,x_0)$ et $H_1(Y,y_0)$ sont isomorphes).

Par hypothèse,

$\exists f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ $\exists g(Y,y_0) \to (X,x_0)$

tq. $f \circ g \simeq 1_Y$ rel y_0

et $g \circ f = 1_X$ rel x_0

donc $(f \circ g)_{\#} =$ Id du groupe $H_1(Y,y_0)$ (Propriété 1)

$= f_{\#}\, g_{\#}$ (Propriété 3)

de même $(g \circ f)_{\neq} = g_{\neq}\, f_{\neq} = \mathrm{Id}$ du groupe $H_1(X,x_o)$.

Donc $f_{\neq}$ est un homomorphisme bijectif.

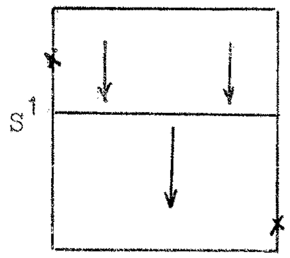
C'est un isomorphisme

C.Q.F.D.

Application : X = bande de Mobius

$Y = S^1$

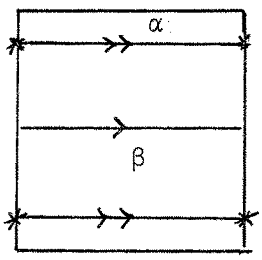
Y est un retract déformation de X , donc a le même type d'homotopie. Soit f la rétraction t.q. $f(x_o) = y_o$. Donc d'après le théorème



$$H_1(S^1,x_o) \approx H_1(Y,y_o) \approx Z$$

Calculons $f_{\#} : H_1(X,x_o) \to H_1(Y,y_o)$

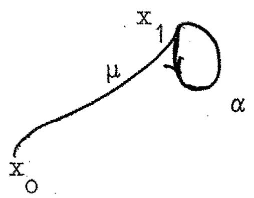
Soit α un lacet de X en x_o. Un lacet β sur le croquis donne une classe $[\beta]$ qui engendre $H_1(Y,y_o)$.



Posons $f_{\#}[\alpha] = 2[\beta]$

> <u>Théorème</u>.- Si X est connexe par arcs, soient x_o et $x_1 \in X$.
>
> Alors $H_1(X,x_o) \approx H_1(X,x_1)$.

Par hypothèse on peut trouver un chemin u de x_o à x_1 dans X .



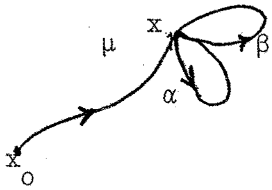
Soit $[\alpha] \in H_1(X_1,x_1)$.

$\mu\, \alpha\, \mu^{-1}$ est un lacet en x_o .

Posons $\Phi_\mu[\alpha] = [\mu\, \alpha\, \mu^{-1}]$. (pas de parenthèses dans le crochet à cause de l'associativité).

$\Phi\mu$ est bien définie. Montrons que c'est un isomorphisme

- C'est un homomorphisme : en effet



$$\Phi\mu[\alpha \circ \beta] = [\mu(\alpha \circ \beta)\mu^{-1}]$$
$$= [\mu(\alpha \circ \mu^{-1})(\mu \circ \beta)\mu^{-1}]$$
$$= [(\mu\ \alpha\ \mu^{-1})(\mu\ \beta\ \mu^{-1})] = \Phi\mu[\alpha]\ \Phi\mu[\beta]$$

- C'est un isomorphisme. Contruisons en effet un inverse.

Soit μ^{-1} le chemin inverse de μ.

$\Phi_{\mu-1} : H_1(X,x_o) \to H_1(X,x_1)$.

Montrons que $\Phi_{\mu-1} = (\Phi_\mu)^{-1}$.

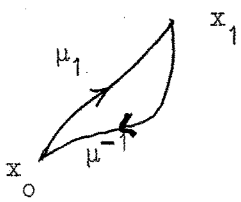
$\Phi_{\mu-1}\ \Phi_\mu[\alpha] = \Phi_{\mu-1}[\mu\ \alpha\ \mu^{-1}] = [\mu^{-1}\mu\ \alpha\ \mu^{-1}\mu] = [\alpha]$

de même $\Phi_\mu\ \Phi_{\mu-1}[\alpha] = [\alpha]$

C.Q.F.D.

<u>Théorème</u>.- l'isomorphisme $H_1(X,x_1) \to (X,x_o)$ est déterminé à un automorphisme intérieur près.

Soient μ et μ_1 deux chemins de x_o à x_1



Φ_μ et Φ_{μ_1} sont deux isomorphismes de $H_1(X,x_1) \to H_1(X,x_o)$

Montrons : $(\exists g \in H_1(X,x_o)$ tq. $\Phi\mu_1 = g\ \Phi\mu g^{-1})$.

$$\Phi_{\mu_1}[\alpha] = [\mu_1\ \alpha\ \mu_1^{-1}\ ] = [\mu_1\ \mu^{-1}\mu\ \alpha\ \mu^{-1}\mu\ \mu_1^{-1}\ ]$$

$$= [\mu_1\ \mu^{-1}\ \mu\ \alpha\ \mu^{-1}(\mu_1\ \mu^{-1})^{-1}]$$

$$= g\ \Phi\mu[\alpha]\ g^{-1} \qquad \text{où} \quad g = [\mu_1\ \mu^{-1}]$$

<u>Réciproquement</u> si on a $\Phi\mu$ et $g \in M_1(X,x_o)$, il existe μ_1 chemin de x_o à x_1 tel que :

$$\Phi_{\mu_1} = g\Phi_{\mu}g^{-1} .$$

en effet $g\ \Phi_{\mu}\ g^{-1} = g_{\mu}\ \alpha\ \mu^{-1}\ g^{-1} = \mu_1\ \alpha\ \mu^{-1}$

C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u> : Si $H_1(X,x_o)$ est abélien, l'isomorphisme est unique :

en effet $\Phi_{\mu} = g\ \Phi_{\mu}g^{-1} \Longrightarrow \Phi_{\mu}\ g = g\ \Phi\ \mu$

$g\ \Phi\ \mu = \Phi\ \mu\ g$ par hypothèse donc $\Phi\ \mu_1 = \Phi\ \mu$.

C.Q.F.D.

Autre description de $H_1(X,x_o)$.

Soit $S^1 = \{e^{i2\pi t}\ \ o \leqslant t \leqslant 1\}$ et $1 \in S^1$ $(=(1,0) \in \mathbb{R}^2)$.

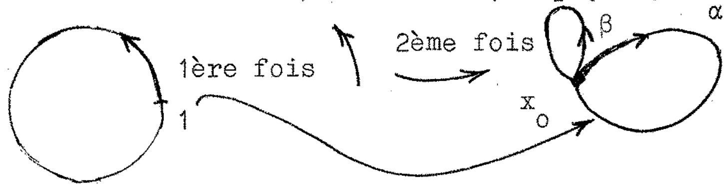
Soit (X,x_o) .

On définit le lacet $\overline{\alpha} : (S^1,1) \rightarrow (X,x_o)$.

Si $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont deux lacets $(S^1,1) \rightarrow (X,x_o)$.

On définit $\overline{\alpha} \circ \overline{\beta} : (S^1,1) \rightarrow (X,x_o)$ par

$$\bar{\alpha} \circ \bar{\beta}\,(e^{2\pi i t}) = \begin{cases} \bar{\alpha}(e^{2i\pi(2t)}) & o \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \bar{\beta}(e^{2i\pi(2t-1)}) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$



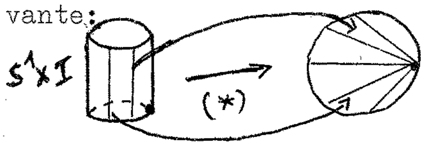
On pose $H_1(X,x_o) = [(S^1,1)\ ]\ (X,x_o)\ ]\ \{1\}_{\in\, S^1}\ ]$ et on a aussi une structure de groupe sur $H_1(X,x_o)$.

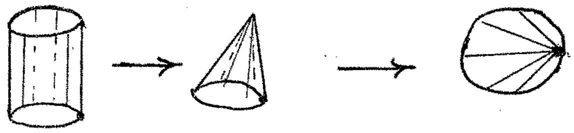
<u>Théorème.-</u> ($\bar{\alpha} : (S^1,1) \to (X,x_o)$ représente le zéro de $H_1(X,x_o)$ $\Longleftrightarrow$ $\bar{\alpha}$ s'étend à D^2 .

$\boxed{\Longleftarrow}$ On connaît $g : D^2 \to X$

On cherche $F\ \ S^1 \times I \to X$ homotopie entre $\bar{\alpha}$ et ε_{x_o} .

On construit donc une application (*) de $S^1 \times I \to D^2$ de la façon suivante:





Posons maintenant $F\ ;\ S^1 \times I \to X$ définie par

$f(x,t) = g[(1-t)\,x + t(1,o)]$. Elle est continue car g l'est.

$f(x,o) = \bar{\alpha}(x)$ car $g|_{\partial D^2} = \bar{\alpha}$

$F(x,1) = \varepsilon_{x_o}$

$\forall t F(1,t) = x_o$ car $g(1,o) = \bar{\alpha}((1,o)) = x_o$.

F est bien une homotopie entre $\bar{\alpha}$ et ε_{x_o} relative à $(0,1)$

C.Q.F.D.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\bar{\alpha}$ soit l'identité du groupe $H_1(X,x_o)$

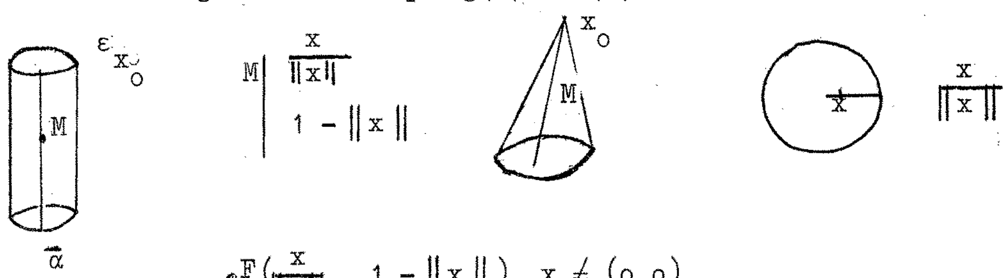
$\Longrightarrow \exists F : S^1 \times I \to X$ continue.

$$F(x,o) = \alpha(x)$$

$$F(x-1) = \varepsilon_{x_o}$$

$$\forall t \; F(1,t) = x_o \quad .$$

On cherche $g : D^2 \to X$ tq. $g(x) = \bar{\alpha}(x)$ si $x \in S^1$



Posons $g(x) = \begin{cases} F\left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right) & x \neq (o,o) \\ x_o & x = (o,o) \end{cases}$

g est continue car F l'est et lorsque $x \to (o,o)$

$$F\left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right) \to x_o \quad \text{(croquis)}$$

g est bien une extension de $\bar{\alpha}$

C.Q.F.D.

<u>Définition 1.-</u> Soit X connexe par arcs. On dit que X est <u>simplement connexe</u> si $H_1(X,x_o) = [\varepsilon_{x_o}]$ pour $x_o \in X$.

<u>Définition.-</u> X est <u>connexe par arcs</u> $\Longleftrightarrow$ chaque application $f : S^o \to X$ s'étend à D^1 .

<u>Définition 2.</u> X <u>simplement connexe</u> $\Longleftrightarrow$ chaque application $f : S^i \to X$ s'étend à D^{i+1} pour $i = 0,1$.

<u>Définition.-</u> X est k - connexe $\Longleftrightarrow$ chaque application $f : S^i \to X$ s'étend à D^{i+1} pour $i \leqslant k$.

donc o - connexe = connexe par arcs.

1 - connexe = simplement connexe.

<u>Théorème.-</u> X contractile $\Longrightarrow$ $\forall k$ k - connexe .

Soit $x_o \in X$.

X est contractile. Soit $f : S^i \to X$, soit $C_{x_o} : X \to X$.

Alors d'après un théorème $f \simeq C_{x_o}$ en effet par hypothèse $C_{x_o} \simeq 1_X$

donc $1_X f = f \simeq C_{x_o} f = C_{x_o}$.

Soit donc F l'homotopie entre f et C_{x_o} :

$F(x,o) = f(x)$

$F(x,1) = C_{x_o}$

$D^{i+1} = A \cup B$ où $A = \{x \in \mathbb{R}^{i+1} \; \|x\| \leqslant \frac{1}{2}\}$

$B = \{x \in \mathbb{R}^{i+1} \; \|x\| \geqslant \frac{1}{2}\}$

Soit $g : D^{i+1} \to X$ définie ainsi :

$$g(x) = \begin{cases} F\left(\frac{x}{\|x\|}, 2(1 - \|x\|)\right) & x \in B \\ x_o & x \in A \; . \end{cases}$$

on a $\quad g\Big|_{\|x\|=1} = f$

g est bien définie et continue car lorsque

$$\|x\| \to \tfrac{1}{2} \qquad F\left(\frac{x}{\|x\|}, 2(1-\|x\|)\right) \to x_o \ .$$

Théorème.- X et Y ont le même type d'homotopie X connexe par arcs

$\Longrightarrow H_1(X,x_o) \approx H_1(Y,y_o) \quad \forall x_o \in X \quad , \quad \forall y_o \in Y$

Lemme 1.- Soit $f : I \times I \to X$

soient $\alpha_o(t) = f(t,o) \qquad \alpha_1(t) = f(t,1)$

$\beta_o(t) = f(o,t) \qquad \beta_1(t) = f(1,t)$

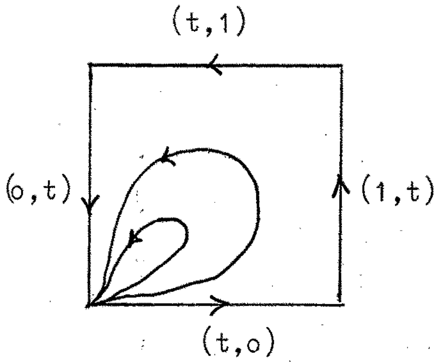
Alors $(\alpha_o\beta_1) \circ (\alpha_1^{-1}\ \beta_o^{-1}) \approx \varepsilon_{f(o,o)}$ rel (o,o)

On définit $\bar{\alpha}(t) =$ chemin $(t,o) \quad t \in I$.

$\bar{\alpha}_1(t) = \qquad (t,1)$

$\bar{\beta}_o(t) = \qquad (o,t)$

$\bar{\beta}_1(t) = \qquad (1,t)$



Alors $(\bar{\alpha}_o \circ \bar{\beta}_1) \circ (\bar{\alpha}_1^{-1} \circ \bar{\beta}_o^{-1}) \simeq C_{(o,o)}$

car le carré $I \times I$ est simplement connexe.

donc $f(\overline{\alpha}_o \circ \overline{\beta}_1) \circ f(\overline{\alpha}_1^{-1} \circ \overline{\beta}_o^{-1}) \simeq C_{f(o,o)}$

$$= [\alpha_o \circ \beta_1] \circ [\alpha_1^{-1} \circ [\beta_o^{-1}] \simeq \varepsilon_{f(o,o)}$$

<u>Lemme 2</u>.-

$$\begin{tikzcd} (X,x_o) \arrow[r, "f_o"] \arrow[dr, "f_1"'] & (Y,y_o) \\ & (Y_1,y_1) \end{tikzcd} \qquad F : f_o \simeq f_1$$

Soit $\beta(t) = F(x,t)$.

β est un chemin de y_o à y_1 car $\beta(o) = y_o$ $\beta(1) = y_o$.

Alors il existe un isomorphisme induit de $M_1(Y,y_o) \to M_1(Y_1,y_1)$: on a le schéma :

$$\begin{tikzcd} M_1(X,x_o) \arrow[r, "f_{o\#}"] \arrow[dr, "f_{1\#}"'] & M_1(Y,y_o) \\ & M_1(Y,y_1) \arrow[u, dashed, "\Phi_\beta"'] \end{tikzcd} \qquad \Phi_\beta f_{1\#} \neq f_{o\#}$$

Soit α lacet en x_o . Soit $f : I \times I \to Y$ donnée par

$$f(t_1,t_2) = F[\alpha(t_1),\ t_2]$$

f est continue car f et α le sont.

Posons $\alpha_o(t) = f(t,o) = f[\alpha(t),o] = f_o(\alpha(t))$

c'est-à-dire $\alpha_o = f_o \circ \alpha$

de même $\alpha_1 = f_1 \circ \alpha$

Prenons $\beta_o = \beta_1 = \beta$ et appliquons le lemme 1

$$((f_o \circ \alpha)\circ \beta) \circ ((f_1\ \alpha)^{-1}\ \beta^{-1}) \simeq C_{f(o,o)} = C_{\beta(o)} = C_{y_o}$$

$$\Longrightarrow (f_o\ \alpha) \circ (\beta(f_1\ \alpha)^{-1}\ \beta^{-1}) \sim C_{y_o}$$

$$\Longrightarrow f_{o\#}[\alpha]\ \Phi_\beta[(f_1\ \alpha)^{-1}] = Id \text{ du groupe } M_1(Y,y_o)$$

$$\Longrightarrow f_{o\#}[\alpha] = (\Phi_\beta[(f_1\ \alpha)^{-1}])^{-1} = (\beta(f_1\ \alpha)^{-1}\ \beta^{-1})^{-1}$$

$$= \beta(f_1\ \alpha)\beta^{-1} = \Phi_\beta[f_1\ \alpha] = \Phi_\beta\ f_{1\#}[\alpha] \ .$$

C.Q.F.D.

<u>Démonstration du théorème</u> :

(X et Y ont même type d'homotopie) $\Longrightarrow$ ($\exists f : X \to Y$, $\exists g\ \ Y \to X$

$fg \simeq 1_Y$ et $gf \simeq 1_X$)

Soit $x_o \in X$

Posons $f(x_o) = y_o$ $\quad g(y_o) = x_1$ $\quad f(x_1) = y_1$.

Appliquons le lemme 2 :

$$\begin{tikzcd}
(X,x_o) \arrow[r, "gf"] \arrow[dr, "1_X"'] & (X,x_1) \\
& (X,x_o)
\end{tikzcd}$$

Nous savons qu'il existe $\Phi\mu_1 : M_1(X,x_o) \to M_1(X,x_1)$

tel que $\Phi\mu_1 = (gf)_\# = g_\# f_\#$.

Nous savons qu'il existe aussi $\Phi\mu_2$ tq. $I\mu_2 = f_\# g_\#$.

et pour tout $f_o : (X,x_o) \to (Y,y_o)$ en particulier $f_o = f$

pour tout $f_1 : (X,x_1) \to (Y,y_1)$ en particulier $f_1 = f$ nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_1(X,x_o) \arrow[r, "f_{o\#}"] \arrow[d, "\Phi_{\mu_1}"'] & H_1(Y,y_o) \arrow[dl, dashed, "g\#"'] \arrow[d, "\Phi_{\mu_2}"] \\
H_1(X,x_1) \arrow[r, "f_{1\#}"'] & H_1(Y,y_1)
\end{tikzcd}$$

$g_{\#} f_{o\#} = \Phi\mu_1 \implies g_{\#}$ est un épimorphisme
(= homomorphisme surjectif)

$f_{1\#} g_{\#} = \Phi\mu_2 \implies g_{\#}$ est un monomorphisme
(= homomorphisme injectif)

donc $g_{\#}$ est un isomorphisme et $f_{\#}$ aussi

C.Q.F.D.

Application du théorème :

Soit $S_1 \times S_1$ le tore de dimension 1

$H_1(S^1 \times S^1),(1,1)) = Z \times Z$

$H_1(S^1,1) = Z$

S^1 et $S^1 \times S^1$ sont connexes par arcs. Leurs groupes fondamentaux sont différents donc ils n'ont pas même type d'homotopie.

Théorème.- S^1 n'est pas un retract de D^2 .

$H_1(S^1,1) \cong Z$.

$H_1(D^2,1) = [\varepsilon_{x_o}]$ (D^2 simplement connexe).

Supposons $\exists r : D^2 \to S^1$ tq. $ri = 1_{S^1}$.

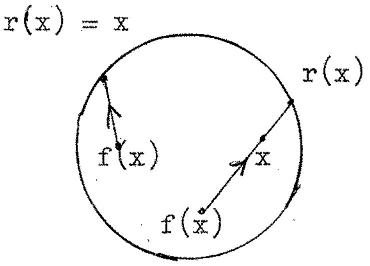
Alors $(ri)_{\#} = r_{\#} i_{\#} = 1 =$ l'application triviale. C'est impossible.

Théorème.- D^2 a la propriété du point fixe.

c'est-à-dire si $\forall f : D^2 \to D^2 \Longrightarrow \exists x \in D^2 \quad f(x) = x$.

Supposons que $\exists f : D^2 \to D^2$, $\forall x \quad f(x) \neq x$.

Alors on peut construire une rétraction de $D^2 \to S^1$ de la manière suivante :



C'est en contradiction avec le théorème précédent.

Définition.- X est un H-espace si

$\exists \mu : X \times I \to X$ continue et si $\exists x_o \in X$ tq.

$x \to \mu(x_o,x_o)$, application de X dans X

et $x \to \mu(x_o,x)$, application de X dans X soient homotopes

à 1_X relativement à x_o .

On pose $\mu(x_o, x_o) = x_o$.

Exemple : X est un groupe topologique.

On prend μ = multiplication du groupe

x_o = unité du groupe

Les deux applications de X dans X sont des identités sur le groupe.

Théorème.- Si X est un H-espace avec unité x_o . Alors $\Pi_1(X,x_o)$ est abélien.

Exemples : * groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$.

* groupe des matrices inversibles $n \times n$.

Démonstration :

1. Soient α et β des lacets en x_o .

Définissons $\alpha * \beta(t)$ comme étant le lacet :

$$(\alpha * \beta)(t) = \mu(\alpha(t), \beta(t)$$

$$(\alpha * \beta)(o) = \mu(\alpha(o), \beta(o)) = \mu(\alpha(1), \beta(1)) = (\alpha * \beta)(1)$$.

Cette loi est bien définie: en effet :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Soit } \alpha' & \alpha \simeq \alpha' & \text{rel } I \\ \text{Soit } \beta' & \beta \simeq \beta' & \text{rel } I \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta' \quad \text{rel } \partial I$$

en effet : Soit $\{\alpha_\tau\}_{\tau \in I}$ l'homotopie entre α et α' .

donc $\alpha_o = \alpha$ $\qquad \alpha_1 = \alpha'$.

de la même façon nous avons $\{\beta_\tau\}_{\tau\in I}$ avec $\beta_o = \beta$ $\beta_1 = \beta'$.

Alors $\alpha_\tau * \beta_\tau(t)$ est une homotopie entre $\alpha * \beta$ et $\alpha' * \beta'$.

En effet $\alpha_o * \beta_o(t) = \alpha * \beta(t)$

$\alpha_1 * \beta_1(t) = \alpha' * \beta'(t)$

2. Soit $\varepsilon_{x_o} : t \to x_o$. $\alpha * \varepsilon_{x_o} \simeq \varepsilon_{x_o} * \alpha \simeq \alpha$ rel ∂I

Posons en effet $f(x) = \mu(x,x_o)$. Par définition de X H-espace nous avons

$f \simeq 1_X$ rel x_o donc $f_o\alpha \simeq 1_X$ rel x_o donc $f_o\alpha \simeq 1_X \circ \alpha = \alpha$

or $f_o\, \alpha(t) = (1(\alpha(t)x_o) = \alpha * \varepsilon_{x_o}(t)$

donc $\alpha \simeq \alpha * \varepsilon_{x_o}$

par le même raisonnement $\alpha \simeq \varepsilon_{x_o} * \alpha$

C.Q.F.D.

3. Soient $\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_1\ \beta_2$ 4 lacets en x_o .

Alors $(\alpha_1 \circ \beta_1) * (\alpha_2 \circ \beta_2) = (\alpha_1 * \alpha_2) \circ (\beta_1 * \beta_2)$. En effet :

$(\alpha_1 \circ \beta_1) * (\alpha_2 \circ \beta_2)$ est le chemin $t \to \mu[(\alpha_1 \circ \beta_1)(t),(\alpha_2 \circ \beta_2)(M)]$

défini par $\begin{cases} \mu(\alpha_1(2t)\ ,\ \alpha_2(2t)) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \mu(\beta_1(2t-1),\ \beta_2(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$

$$= \left.\begin{cases} \alpha_1 * \alpha_2(2t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \beta_1 * \beta_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}\right\} = (\alpha_1 * \alpha_2) \circ (\beta_1 * \beta_2)(t)$$

C.Q.F.D.

4. Soient α et β deux lacets en x_o .

Alors $\alpha \circ \beta \simeq (\alpha * \varepsilon x_o) \circ (\varepsilon x_o * \beta)$

en effet d'après ce qui vient d'être démontré :

$$(\alpha * \varepsilon x_o) \circ (\varepsilon x_o * \beta) = (\alpha \circ \varepsilon x_o) * (\varepsilon x_o \circ \beta)$$

or $\alpha \circ \varepsilon x_o \simeq \alpha$ rel ∂I et $\varepsilon x_o \circ \beta \simeq \beta$ rel ∂ I

donc $(\alpha * \varepsilon x_o) \circ \varepsilon x_o * \beta) \simeq \alpha * \beta$ rel ∂I .

D'autre part : $\alpha * \beta \simeq (\varepsilon x_o \circ \alpha) * (\beta \circ \varepsilon x_o)$

$$= (\varepsilon x_o * \beta) \circ (\alpha * \varepsilon x_o)$$

donc $\alpha * \beta \simeq \beta * \alpha$ rel ∂I .

Produit cartésien d'une famille d'ensemble.

<u>Définition</u>.- Soit $\{X\mu \quad \mu \in A \ , \ A$ ensemble d'indices$\}$. On note X le produit cartésien des $X\mu$, $\mu \in A$: $X = \underset{\mu \in A}{X} X\mu$.

Soit $x \in X$: Soit $\Pi_\mu : X \to X_\mu$, $x \to x\mu$; Π_μ est la $\mu^{\text{ième}}$ projective.

f est une fonction : $A \to \bigcup_{\mu \in A} X\mu$

telle que $f(\mu) \in X\mu$, $\forall \mu \in A$.

<u>Théorème</u>.- $\mathbb{H}_1(X,x) \approx \underset{\mu \in A}{X} \mathbb{H}_1(X\mu, x_p)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\alpha : I \to X$ lacet en x .

Soit α_μ le lacet en $x\mu$ défini par $\alpha_\mu(t) = \Pi_\mu \circ \alpha\,(t)$ c'est-à-dire qu'on projette α sur X_μ .

$$\text{Soit } f : H_1(X,x) \rightarrow \underset{\mu \in A}{X} \; H_1(X\mu \,,\, x\mu)$$

$$[\alpha] \rightarrow \underset{\mu \in A}{\Pi} \; [\alpha\mu]$$

f est bien définie et c'est un isomorphisme car on peut en construire un inverse.

Application 1: $X = \mathbb{R} \times S^1$. Soit $x \in X$ $\Pi_1(X,x) \approx M_1(S^1) \approx Z$.

On peut aussi remarquer que S^1 est un rétract déformation de X . Donc puisqu'ils sont connexes par arcs, ils ont mêmes groupes fondamentaux.

Application 2 : $X = S^1 \times S^1$ $H_1(X,x) = Z \times Z$.

-::-::-::-

CHAPITRE 2.

REVETEMENTS

-::-

RAPPELS TOPOLOGIQUES.

Définitions 2.1.

Soit X un espace topologique.

(a) X est localement connexe si pour tout $x \in X$ et tout voisinage N de x, il existe un voisinage connexe U de x tel que

$$U \subset N$$

(b) X est localement connexe par arcs si pour tout $x \in X$ et tout voisinage N de x, il existe un voisinage U de x, connexe par arcs, tel que

$$U \subset N$$

Propriétés 2.2.

(a) X localement connexe $\Longleftrightarrow$ Toutes les composantes connexes sont ouvertes et fermées.

(b) X localement connexe par arcs $\Longleftrightarrow$ Toutes les composantes connexes par arcs sont ouvertes et fermées.

(c) X localement connexe par arcs $\Longrightarrow$ X localement connexe.

(d) Soit X localement connexe par arcs. Si X est connexe par arcs, sinon ses composantes connexes sont connexes par arcs.

REVETEMENTS.

Définition 2.3.

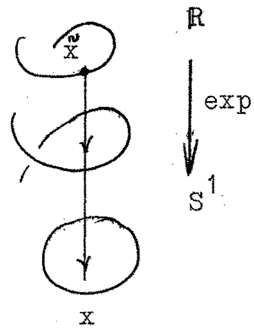
Soient deux espaces topologiques X et $\tilde{X}$, $p : \tilde{X} \to X$ une application continue.

$\tilde{X}$ est un revêtement de X si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que :

a) $p^{-1}(U)$ soit réunion disjointe d'ouverts $\tilde{U}_\alpha$, $\alpha \in A$.

b) Pour tout α , $p|\tilde{U}_\alpha \to U$ soit un homéomorphisme. Un tel voisinage U de x est dit voisinage admissible de x, chaque $\tilde{U}_\alpha$ est une copie de U , X est la base du revêtement, et $p^{-1}(x)$ est la fibre sur x .

Si U est admissible, et V un ouvert tel que $V \subset U$ V est aussi un voisinage admissible.



Exemples 2.4.

a) $\tilde{X} = X$ $\quad p = 1_X$

b) $\tilde{X} = \mathbb{R}$, $X = S^1$, $p = \exp$ $\quad (\exp t = E^{2\pi i t})$

(tout voisinage U, $U \neq S^1$ est admissible).

c) $\tilde{X} = X = S^1$ $\quad p : S^1 \to S^1$ $\quad p(z) = z^n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Cet exemple est un cas particulier de d) avec : $H = \{e^{\frac{2ink}{n}}\}_{k \leqslant n}$

d) Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe discret.

Soit $p : G \to G/H$ la projection canonique p est un revêtement.

<u>Remarque</u> : G/H n'est un groupe que si H est distingué. Soit V un voisinage de ε (élément neutre de G) tel que $V \quad H = \{\varepsilon\}$ (ceci découle directement de la définition de la discrétion de H).

L'application $\varphi : G \times G \to G \ : \ \varphi(g_1,g_2) = g_1 . g_2^{-1}$ est continue donc $\varphi^{-1}(V)$ est voisinage de $(\varepsilon,\varepsilon) \in \varphi^{-1}\{\varepsilon\}$ pour la topologie produit. Il existe donc deux voisinages U_1 et U_2 de ε tels que : $U_1 \times U_2 \subset \varphi^{-1}(V)$.

$U = U_1 \quad U_2$ est un voisinage de ε qui vérifie

$$\{g_1 g_2^{-1} \mid (g_1,g_2) \in U \times U\} \subset V \ .$$

Nous allons montrer que p est un revêtement car $p(U)$ est admissible.

$p|U$ est injective : $g_1,g_2 \in U \qquad p(g_1) = p(g_2) \Longrightarrow g_1 g_2 \in H \quad V = \{\varepsilon\}$

donc $g_1 = g_2$

$p^{-1}(pU) = HU = U \ h \ U \quad ; \quad \{hU\}_{h \in H}$ sont ouverts disjoints car :

- Si $h_1 \ U \cap h_2 \ U \neq \emptyset$ il existe $g_1,g_2 \in U \qquad h_1 g_1 = h_2 g_2$

  $g_1 g_2^{-1} \in H \quad V = \{\varepsilon\}$ donc $g_1 = g_2$ et $h_1 = h_2$

- $\varphi_h : g \to hg$ est homéomorphisme donc hU est ouvert $p|_{hU} : hU \to p(U)$ est un homéomorphisme car :

$$p|_{hU} = p|_U \circ \varphi_{h^{-1}}|_{hU}$$

et $p|_U$ est un homéomorphisme : $U \to p(U)$ car elle est bijective et bicontinue d'après la définition de la topologie quotient.

e) $\tilde{X} = \mathbb{R} \times S^1$, $X = S^1 \times S^1$, $p = \exp \times 1_{S^1}$

f) $\tilde{X} = \mathbb{R}^2$, $X = S^1 \times \mathbb{R}$, $p = \exp \times 1_{\mathbb{R}}$

g) La bouteille de Klein : $K = \dfrac{I \times I}{R}$

R est l'identification : 1) $(x,0) = (x,1)$ $\forall x \in I$

2) $(o,y) = (1,1-y)$ $\forall y \in I$

Le tore est un revêtement de K .

h) De même, le cylindre $S^1 \times I$ est un revêtement de la bande de Moebius $M = \dfrac{I \times I}{\mathbb{R}^1}$

R^1 est l'identification $(o,y) = (1,1-y)$ $\forall y \in I$

i) L'espace projectif $P(K)$.

Définition 2.5.

Soit K un espace normé, de norme $\|\cdot\|$, $S = \{x \in K \mid \|x\| = 1\}$.
L'espace projectif sur K , $P(K)$ est l'espace quotient de S par l'identification de x et $-x$, pour tout $x \in S$.
Cas particulier : $K = R^n$

$P^{n-1} = P(\mathbb{R}^n)$

$P^o = \{\text{point}\}$; ; P^1 est homéomorphe à S^1 .

Proposition 2.6.

L'application $p : S^n \to P^n$: $p(x) = [(x,-x)]$ est un revêtement.

Preuve :

Soit δ la distance définie sur S^n par la mesure de l'angle défini par deux points (avec l'origine).

$x \in \delta^n$ $\quad U_x = \{y \in S^n | \delta(x,y) < \frac{\pi}{4}\}$

$U'_x = \{z \in S^n | -z \in U_x\}$

$U_x \cap U'_x = \emptyset$; $pU_x = pU'_x$.

pU_x est un ouvert de P^n , qui est voisinage admissible de $p(x)$.

Proposition 2.7.

Soit $p : \tilde{X} \to X$, un revêtement ; alors p est une application ouverte surjective.

Preuve : Soit V un ouvert non vide de $\tilde{X}$, et $\tilde{x} \in V$.

Posons $x = p(\tilde{x})$. Soit U un voisinage admissible de x, $\tilde{U}$ la copie de U qui contient $\tilde{x}$. $\tilde{U}$ est ouvert et $V \cap \tilde{U}$ est un voisinage de $\tilde{x}$.

$p|_{\tilde{U}}$ est un homéomorphisme de $\tilde{U}$ dans U .

$p(V \cap \tilde{U})$ est un voisinage de x, inclus dans $p(V)$.

$p(V)$ est donc ouvert (voisinage de tous ses points).

Proposition 2.8.

Soit $p : \tilde{X} \to X$, un revêtement de X connexe ; alors pour tout x appartenant à X $p^{-1}(x)$ est un ensemble discret dont le cardinal (noté $\overline{\overline{p^{-1}(x)}}$) est constant.

(on appelle $\overline{\overline{p^{-1}(x)}}$ la multiplicité du revêtement).

Preuve :

- Soit $x \in X$, il existe un voisinage admissible de x, U .

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} \tilde{U}_\alpha$$

$p|\tilde{U}_\alpha$ est un homéomorphisme ; il existe donc un point $\tilde{x}_\alpha \in \tilde{U}_\alpha$ tel que $p(\tilde{x}_1) = x$ pour tout α de A .

Donc pour tout $x \in U$, $\overline{\overline{p^{-1}(x)}} = A$

- X est connexe. Soit $\Gamma = \{U_\beta\}_{\beta \in B}$ un recouvrement de X par des voisinages admissibles.

Soient x, y appartenant à X . Il existe $\alpha : I \to X$ continue telle que

$$\alpha(0) = x$$

$$\alpha(1) = y$$

$\alpha(I)$ est compact. Il existe donc $U_1, U_2 \ldots U_p$ recouvrant $\alpha(I)$ tels que :

$$U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset \qquad i \in \{1, 2 \ldots p-1\}$$

Soit $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$.

$$\overline{\overline{p^{-1}(x)}} = \overline{\overline{p^{-1}(x_1)}} = \ldots = \overline{\overline{p^{-1}(x_{p-1})}} = \overline{\overline{p^{-1}(y)}}$$

RELEVEMENTS.

Définition 2.9.

Soient X et Y deux espaces topologiques.

$f : Y \to X$ continue

et $p : X \to X$ un revêtement.

On dit que $g : Y \to \tilde{X}$ est un relèvement de f

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

si

$$pg = f \quad .$$

<u>Théorème 2.10 (unicité du relèvement).</u>

Soient $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, Y un espace connexe.

$f : Y \to X$, une application continue.

Si g_1, g_2 sont deux relèvements de f tels qu'il existe $g_o \in Y$ où

$g_1(g_o) = g_2(y_o)$

alors $g_1 = g_2$.

<u>Preuve</u> :

$A = \{y \in Y / g_1(y) = g_2(y)\}$

$B = \{y \in Y / g_1(y) \neq g_2(y)\}$.

On a :

$A \cup B = Y$

$A \cap B = \emptyset$

On va démontrer que A et B sont ouverts.

Comme A n'est pas vide et que Y est connexe, $B = \emptyset$.

A est ouvert : Soient $y \in A$, U est un voisinage admissible de $f(y)$, et $\tilde{U}$ la copie de U qui contient $g_1(y)$ ($g_1(y)$ appartient à $p^{-1}(f(y))$ car $pg_1 = f$) $g_1(y) = g_2(y)$.

Soit V_i un voisinage de y dans Y tel que

$$g_i(V_i) \subset \tilde{U} \qquad\qquad i = \{1,2\}$$

(D'après la continuité de g_1 et g_2) .

Soit $V = V_1 \cap V_2$.

Pour tout z de V $\quad g_1(z) = g_2(z)$ $\quad$ car $g_1(z)$, $g_2(z) \in \tilde{U}$

car $pg_1(z) = pg_2(z) = f(z)$ et car p est injective sur $\tilde{U}$

V est inclus dans A .

B est ouvert : y appartient à B $\quad g_1(y) \neq g_2(y)$

Soit U un voisinage admissible de $f(y)$.

$g_1(y)$ et $g_2(y)$ sont dans deux copies distinctes de U , soit $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$ (car $pg_1 = pg_2$)

$$g_1(y) \in \tilde{U}_1 \quad \text{et} \quad g_2(y) \in \tilde{U}_2 \quad .$$

Soient V_1 et V_2 des voisinages de y tels que

$$g_1(V_1) \subset \tilde{U}_1 \qquad \text{et} \qquad g_2(V_2) \subset \tilde{U}_2$$

$V = V_1 \cap V_2$ est un voisinages de y inclus dans B .

<u>Corollaire 2.11.</u>

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, $x \in X$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Si α est un chemin dans X qui commence en x et si $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ sont deux chemins dans $\tilde{X}$ qui vérifient :

$$p(\tilde{\alpha}_1) = p(\tilde{\alpha}_2) = \alpha$$

et

$$\tilde{\alpha}_1(o) = \tilde{\alpha}_2(o) = \tilde{x}$$

Alors $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$

<u>Définition 2.12. (Revêtement induit).</u>

On se donne $\ : Y \to X$ continue

$p : \tilde{X} \to X$ un revêtement.

On va construire un revêtement $p : Y \to Y$ tel que le diagramme soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{f_1} & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Soit $\tilde{Y} = \{(y,\tilde{x}) \in Y \times \tilde{X} / f(y) = p(\tilde{x})\}$

Soient $p_1 : \tilde{Y} \to Y \qquad p_1(y,\tilde{x}) = y$

$f_1 : \tilde{Y} \to \tilde{X} \qquad f_1(y,\tilde{x}) = \tilde{x}$.

On munit $\tilde{Y}$ de la topologie induite par celle de $Y \times \tilde{X}$.

On démontrera en exercice :

1°) si p et f sont continues : $pf_1 = fp_1$.

2°) si p est un revêtement p_1 est un revêtement.

<u>Théorème 2.13.</u>

Soit $p\ \tilde{X} \to X$ un revêtement.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) X est localement connexe (localement connexe par arcs).

b) $\tilde{X}$ est localement connexe (localement connexe par arcs).

Preuve :

(Démontrée dans le cas localement connexe).

- a $\Longrightarrow$ b : Soit $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{N}$ un voisinage de $\tilde{x}$

Posons :

$$p(\tilde{x}) = x$$

Soit U un voisinage admissible de x , $\tilde{U}$ la copie de U qui contient $\tilde{x}$

Posons :

$$\tilde{N}' = \tilde{N} \cap \tilde{U}$$

$p(N')$ est un voisinage de x, car p est une application ouverte donc

$p(N') \cap U$ aussi

Il existe $V \subset p(\tilde{N}')$ U connexe.

$p|\tilde{U}$ est un homéomorphisme.

Donc

$p^{-1}(V) \cap \tilde{U}$ est connexe dans $\tilde{X}$, et c'est un voisinage de $\tilde{x}$ contenu dans $\tilde{N}$.

- b $\Longrightarrow$ a Soit $x \in X$, N un voisinage de x, U un voisinage admissible de x, $\tilde{U}$ une copie de U .

$p|\tilde{U}$ est un homéomorphisme.

$(p|\tilde{U})^{-1}$ $(U \cap N)$ est un voisinage de $\tilde{x}$ $(p(\tilde{x}) = x)$ il existe donc $\tilde{V}$ connexe, inclus dans $(p|\tilde{U})^{-1}(U \cap N)$

$V = p(\tilde{V})$ est un voisinage connexe de x car $p|\tilde{U}$ est un homéomorphisme.

Théorème 2.14.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, X localement connexe.

Pour chaque composante connexe C de $\tilde{X}$ $p(C)$ est une composante connexe de X , et $p|C : C \to p(c)$ est un revêtement.

Preuve :

- X étant localement connexe, d'après le théorème 2.13 . $\tilde{X}$ l'est donc ses composantes connexes sont ouvertes.

C est ouvert ainsi que $p(C)$ p étant application ouverte. Soit C_1 la composante connexe de X qui contient $p(C)$ C_1 est ouvert.

Pour montrer que $C_1 = p(C)$ il suffit de montrer que $p(C)$ est fermé.

Soit $x \in \overline{p(C)}$.

Soit U un voisinage admissible de x , $V \subset U$ un voisinage connexe de x.

$$V \cap p(C) \neq \emptyset$$

Donc il existe une copie $\tilde{V}$ de V telle que $\tilde{V} \cap C \neq \emptyset$.

$\tilde{V}$ est connexe, donc $\tilde{V} \subset C$.

$$p(\tilde{V}) = V \quad \subset p(C) \qquad \text{donc} \quad x \in p(C) .$$

- Soit $x \in p(C)$ et U_1 un voisinage admissible de x .

Soit $V \subset U_1$ un voisinage connexe de x.

Posons :

$$p_1 = p|c \quad .$$

V est un voisinage admissible de x pour p_1 .

Si $\tilde{V}$ est une copie de V telle que $V \cap C \neq \emptyset$, alors $\tilde{V} \subset C$

$$p^{-1}(U) = \{\tilde{U}_\alpha \in p^{-1}(U) | \tilde{U}_\alpha \cap C \neq \emptyset\}$$

$p_1 : C \to p(C)$ est un revêtement.

RELEVEMENT DES HOMOTOPIES.

Théorème 2.15.

$$\begin{tikzcd} Y \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "F"] & X \end{tikzcd}$$

Soit un revêtement $p : \tilde{X} \to X$,

$G : Y \times I \to X$, $f : Y \to \tilde{X}$ continues

telles que : $pf(y) = G(y,o)$ $(y \in Y)$

Alors il existe $F : Y \times I \to \tilde{X}$ continue telle que :

$$F(y,o) = f(y) \quad (y \in Y) \quad \text{et} \quad pF = G \ .$$

Preuve :

La démonstration s'effectue en deux temps : existence locale de F (en trouvant $F_{\sigma_y} : \sigma_y \times I \to \tilde{X}$ vérifiant les mêmes conditions que F sur un voisinage σ_y de chaque point $y \in Y$) ; existence globale de F par recollement des F_{σ_y} .

a) Définition de F_{σ_y} .

Soit $y \in Y$; $G(y,t) \in X$. Soit $U_{(y,t)}$ un voisinage admissible de $G(y,t)$. Il existe des voisinages $W_{(y,t)}$ de y et $N_{(y,t)}$ de t tels que $G(W_y \times N_t) \subset U_{(y,t)}$.

Les $N_{(y,t)}$ recouvrent I compact. Il existe un sous-recouvrement fini, donc $\varepsilon > 0$ tel que si $|t - s| < \varepsilon$ $G(W_{(y,t_o)} \times [t,s] \subset U_{(y,t_o)}$ pour un $t_o \in I$.

Prenons une suite : $0 = t_o < t_1 <\dots < t_m = 1$ telle que

$|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$ pour $i = 0,1,\dots m-1$. Soit s_i le t_o correspondant à $|t_{i+1} - t_i|$. $V = \bigcap_o^{m-1} W(y,si)$.

V est un voisinage de y qui vérifie : $G(V \times [t_i\ t_{i+1}] \subset U(y,s_i) = U_i$ pour $i = 0,1\dots m-1$.

$G(V \times [o,t_1]) \subset U_1$ et $G(y,o) = pf(y)$.

Soit $\tilde{U}_1$ la copie de U_1 qui contient $f(y)$. Il existe un voisinage V_1 de $f(y)$ tel que $f(V_1) \subset \tilde{U}_1$. Posons $p_1 = p|\tilde{U}_1$ (homéomorphisme)

$G_1 = V_1 \cap V$. Définissons : $F_{G_1} : G_1 \times [o,t_1] \to \tilde{X}$ par

$$F_{G_1} = p_1^{-1} G| G_1 \times [o,t_1]$$

F_{G_1} vérifie : $pF_{G_1} = G$ et $F_{G_1}(z,o) = f(z)$ $(z \in G_1)$.

Nous allons par ce procédé trouver $F_{G_1}, F_{G_2} \dots F_{G_m}$ par récurrence.

Supposons trouvée $F_{G_i} : pF_{G_i} = G$ et $F_{G_i}(z,t_{i-1}) = F_{G_{i-1}}(z,t_{i-1})$ pour $z \in G_i$.

Il existe un voisinage V_{i+1} de $f(y)$ tel que $f(V_{i+1}) \subset \tilde{U}_{i+1}$.

posons $p_{i+1} = p|\tilde{U}_{i+1}$ et $G_{i+1} = V_{i+1} \cap V_i$.

Définissons $F_{G_{i+1}} : G_{i+1} \times [t_i\ ,\ t_{i+1}] \to \tilde{X}$ par

$$F_{G_{i+1}} = p_{i+1}^{-1} \quad G| G_{i+1} \times [t_i\ t_{i+1}]$$

$F_{G_{i+1}}$ vérifie : $pF_{G_{i+1}} = G$ et $F_{G_{i+1}}(z,t_i) = F_{G_i}(z,t_i) (z \in G_{i+1})$

Il suffit maintenant de prendre $G_y = \bigcap_1^m {}_i$ et de recoller les F_{G_i} pour obtenir $F_{G_y} : G_y \times I \to \tilde{X}$ par :

pour $t \in [t_i t_{i+1}] : F_{G_y}(yt) = F_{G_{i+1}}(yt)$

F_{G_y} est continue. Elle est continue car les $Y \times [t_i, t_{i+1}]$ sont fermés et

$$pF_{G_y} = G | G_y \times I \quad \text{et} \quad F_{G_y}(z,o) = f(z) \quad (z \in G_y)$$

b) Définition de F.

Soit $F(y,t) = F_{G_y}(y,t)$ pour $y \in G_y$.

Cette définition est convenable car si $G_y \cap G_{y'} \neq \emptyset$

$$F_{G_y} | G_y \cap G_{y'} = F_{G_{y'}} | G_y \cap G_{y'}$$

Soit $z \in G_y \cap G_{y'}$. Les chemins : $\alpha_1(t) = F_{G_y}(z,t)$, $\alpha_2(t) = F_{G'_y}(z,t)$ vérifient :

$$\alpha_1(0) = \alpha_2(o) = F_{G_y}(z,o) = f(z)$$

et $p\alpha_1(t) = p\alpha_2(t) = pF_{G_y}(z,t) = G(z,t) \qquad t \in I$

α_1 et α_2 sont donc deux relèvements de $p\alpha_1$, qui coïncident en $t = o$. D'après le théorème 2.10 $\alpha_1 = \alpha_2$.

Les F_{g_y} sont continues sur les ouverts $G_y \times I$ de $Y \times I$ et coincident aux intersections. F est donc continue sur $Y \times I$. Enfin F vérifie évidemment :

$$F(y,o) = f(y) \quad \text{et} \quad pF = G .$$

<u>Corollaire 2.16.</u>

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement $x \in X$

$\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, α un chemin dans X tel que

$\alpha(0) - x$

$$\begin{tikzcd} a \times 0 \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[d, "\rho"] \\ \alpha \times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\alpha}"] & X \end{tikzcd}$$

Alors il existe un unique chemin $\tilde{\alpha}$ dans X tel que

$\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ et $p\tilde{\alpha} = \alpha$.

<u>Preuve</u> :

L'unicité résulte de 2.10. L'existence s'obtient en prenant $Y = \{a\}$

$G(a,t) = \alpha(t)$, $f(a) = \tilde{\alpha}$ dans le théorème 2.16 .

<u>Corollaire 2.17.</u>

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement,

$\tilde{\alpha}$,$\tilde{\beta}$ deux chemins dans $\tilde{X}$ tels que

$\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ et $p\tilde{\alpha} \sim p\tilde{\beta}$ rel ∂I

$$\begin{tikzcd} I \times 0 \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[d, "\rho"] \\ I \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "F"] & X \end{tikzcd}$$

Alors $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$ rel ∂I

<u>Preuve</u> : Soit $G : p\tilde{\alpha} \sim p\tilde{\beta}$ rel ∂I

D'après Th.2.15 , il existe $F : I \times I \to \tilde{X}$ tel que $F(t,o) = \tilde{\alpha}(t)$

et $pF = G$.

Or $pF(0\tau) = G(o,\tau) = p\tilde{\alpha}(0)$.

Le chemin $\varphi : \tau \to F(o\tau)$ est donc contenu dans la fibre de $p\tilde{\alpha}(0)$.

Cette fibre étant discrète et un chemin continu, φ est constant

$$F(o\tau) = F(0,0) = \tilde{\tilde{\alpha}}(o) \qquad \tau \in I$$

de même $F(1,\tau) = F(1,1) = \tilde{\alpha}(1) \qquad (\tau \in I)$

Soit $\tilde{\beta}_1(t) = F(t1)$. On a $F : \tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}_1$ rel ∂I

Or $\tilde{\beta}_1(0) = \tilde{\beta}(0)$ et $p\tilde{\beta}_1 = p\tilde{\beta}$. D'après 2.10 $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}$

ce qui complète la preuve.

RELATIONS AVEC LE GROUPE FONDAMENTAL.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, $s \in X$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$

$$p_{\#} : \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \Pi_1(X, x)$$

$p_{\#}$ est une injection.

Preuve :

Soit $[\tilde{\alpha}] \in \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ tel que $p_{\#}[\tilde{\alpha}] = [p\tilde{\alpha}] = 1_{\Pi_1(X,x_o)} = [\varepsilon x_o]$.

Ceci signifie que : $p\tilde{\alpha} \simeq \varepsilon x_o$ rel ∂I

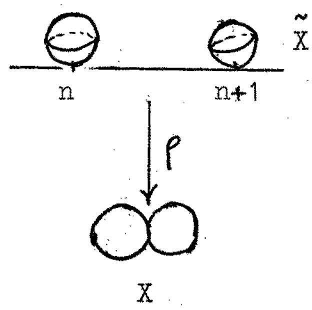
Or $\varepsilon x_o = p(\varepsilon_{\tilde{\alpha}(o)})$ $(\tilde{\alpha}(o) = \tilde{x}$ car α est un lacet en $\tilde{x})$ d'après 2.17 : $\tilde{\alpha} \simeq \varepsilon_{\tilde{\alpha}(o)}$ rel ∂I

ou : $[\tilde{\alpha}] = 1_{\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{\alpha}(o))}$

Applications 2.19.

a) $X = \dfrac{S^2 + S^1}{R}$ (R identifie un point de S^2 à un point de S^1). $\tilde{X}$ est $\mathbb{R}$ sur lequel on colle une sphère S^2 en chaque point de $\mathbb{Z}$.

p s'obtient d'une manière évidente.



On a $\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) \approx 0$ et $\Pi_1(X,x) \approx Z$.

b) T : le tore $S^1 \times S^1$. T n'est revêtement ni de S^1 ni de S^2 car :

$$\Pi_1(T,x_1) \approx \mathbf{Z}^2 \quad ; \quad \Pi_1(S^2,x_2) \approx 0 \quad ; \quad \Pi_1(S^1,x_3) \approx \mathbf{Z} \quad .$$

Proposition 2.20.

$$\begin{tikzcd} \Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[r, "\Phi_{\tilde{\alpha}}"] \arrow[d, "p_{\#}"] & \Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o) \arrow[d, "p_{\#}"] \\ \Pi_1(X,x_1) \arrow[r, "\Phi_{p\tilde{\alpha}}"'] & \Pi_1(X,x_o) \end{tikzcd}$$

Soit $\tilde{\alpha}$ un chemin dans $\tilde{X}$ entre $\tilde{x}_o$ et $\tilde{x}_1$. $p\tilde{\alpha}$ est un chemin dans X entre $p\tilde{x}_o = \tilde{x}_o$ et $p\tilde{x}_1 = x_1$

D'après le chapitre I, on a des isomorphismes

$\Phi_{\tilde{\alpha}}$ et $\Phi_{p\tilde{\alpha}}$ $(\Phi_{\tilde{\alpha}}[\tilde{\beta}] = [\tilde{\alpha}\,\tilde{\beta}\,\tilde{\alpha}^{-1}]$; $\Phi_{p\tilde{\alpha}}[\beta] = [p\tilde{\alpha}.\beta.(p\tilde{\alpha})^{-1}]$

Alors le diagramme ci-dessus est commutatif.

i.e. $$p_{\#}.\,\overline{\Phi}_{\tilde{\alpha}} = \Phi_{p\tilde{\alpha}}\,.\,p_{\#}$$

Preuve :

Soit un lacet $\tilde{\beta}$ en $\tilde{x}_1$

$$p_{\#}\Phi_{\tilde{\alpha}}[\tilde{\beta}] = p_{\#}[\tilde{\alpha}\;\tilde{\beta}\;\tilde{\alpha}^{-1}] = [p(\tilde{\alpha}\;\tilde{\beta}\;\tilde{\alpha}^{-1})] = [p\tilde{\alpha}.\;p\tilde{\beta}.\;(p\tilde{\alpha})^{-1}]$$

$$= \Phi_{p\tilde{\alpha}}[p\tilde{\beta}] = \Phi_{p\tilde{\alpha}}p_{\#}[\tilde{\beta}]$$

Corollaire 2.21.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, $x_o \in X$, $\tilde{x}_o$, $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$.
Si $\tilde{x}_o$ et $\tilde{x}_1$ sont dans la même composante connexe par arcs de $\tilde{X}$ alors $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o))$ est conjugué à $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1))$ dans $\Pi_1(X,x_o)$.

Ceci signifie qu'il existe $[\alpha] \in \Pi_1(X,x_o)$ tel que tout $[x] \in p_1(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_o))$ s'écrit $[x] = [\alpha][y][\alpha]^{-1}$ pour un $[y]$ de $p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1))$.

La relation de conjugaison est une relation d'équivalence ce qui nous conduira ci-après à étudier les classes de conjugaison.

Preuve :

Soit $\tilde{\alpha}$ un chemin dans $\tilde{X}$ entre $\tilde{x}_o$ et $\tilde{x}_1$.

$$p_{\#}\Pi_1(X,x_o) = p_{\#}\Phi_{\alpha}(\Pi_1(\tilde{X},x_1)) \quad \text{d'après le chapitre I}$$
$$= \Phi_{p\alpha}p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X},x_1))$$

Ce qu'on peut noter :

$$p_{\#}\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o) = [p\alpha]\ p_{\#}\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)\ [p\alpha]^{-1}$$

pour rendre évidente la relation de conjugaison.

Corollaire 2.22. (réciproque).

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, $x_o \in X$, $\tilde{x}_o \in p^{-1}(x_o)$.
Si H est un sous-groupe de $\Pi_1(X,x_o)$ conjugué à $Ho = p_{\#}\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o)$.
Alors il existe $\tilde{x}_1$, connecté à $\tilde{x}_o$ dans $\tilde{X}$, $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_o)$
tel que :

$$H = p_{\#}[\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)] \quad .$$

Preuve :

Il existe $g \in \Pi_1(X,x_o)$ tel que $H = gH_o g^{-1}$. $g = [\alpha]$ où α est un lacet en x_o . Soit $\tilde{\alpha}$ le relèvement de α qui commence en $\tilde{x}_o$.

Posons $\tilde{x}_1 = \tilde{\alpha}(1) \qquad (\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_o))$

$$H = p_{\#}\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \quad .$$

Théorème 2.23.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement. On suppose $\tilde{X}$ connexe par arcs. Soit $x_o \in X$, $\tilde{x}_o \in p^{-1}(x_o)$.

Alors il existe une bijection entre $p^{-1}(x_o)$ et $\Pi_1(X,x_o)/_{p_{\#}\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o)}$

i.e. $\qquad \overline{\overline{p^{-1}(x_o)}} = \mathrm{card}\ (\Pi_1(X,x_o)/_{p_{\#}\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o)})$

Preuve :

Posons $H = p_{\#}\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o)$. Soit $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_o)$ et $\tilde{\alpha}$ un chemin dans $\tilde{X}$ entre $\tilde{x}_o$ et $\tilde{x}_1$. $p\tilde{\alpha}$ est un lacet en x_o . Soit $h : p^{-1}(x_o) \to \Pi_1(X,x_o)/H$

$h(\tilde{x}_1) = H.[p\tilde{\alpha}]$ $\quad$ h est bien définie :

Soit $\tilde{\alpha}_1$ un autre chemin de $\tilde{x}_o$ à $\tilde{x}_1$. $\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}^{-1}$ est un lacet en $\tilde{x}_o$.

Donc $\quad p_{\#}[\tilde{\alpha}_1 \circ \tilde{\alpha}^{-1}] \in H = p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o))$

$$p_{\#}[\tilde{\alpha}_1 \circ \tilde{\alpha}^{-1}] = [p\tilde{\alpha}_1 \,.\, (p\tilde{\alpha})^{-1}]$$

et $\qquad [p\tilde{\alpha}_1 \,.\, (p\tilde{\alpha})^{-1}] \in H \iff H[p\tilde{\alpha}_1] = H[p\tilde{\alpha}]$

h est surjective :

Un élément de $\Pi_1(X,x_o)/H$ s'écrit $H[\alpha]$ avec α lacet en x_o .

Soit $\tilde{\alpha}$ le relèvement de α tel que $\tilde{\alpha}(o) = \tilde{x}_o$.

Posons $\tilde{x}_1 = \tilde{\alpha}(1)$. On a $h(\tilde{x}_1) = H[\alpha]$

h est injective :

Soient $\tilde{x}_1 , \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$ tels que $h(\tilde{x}_1) = h(\tilde{x}_2)$ ou

$H[p\tilde{\alpha}_1] = H[p\tilde{\alpha}_2]$ où $\tilde{\alpha}_i$ est un chemin de $\tilde{x}_0$ à $\tilde{x}_i$. Il s'ensuit que :

$[p\tilde{\alpha}_1] = [p\tilde{\beta}]\,[p\tilde{\alpha}_2]$ où $\tilde{\beta}$ est un lacet en $\tilde{x}_0$. Ceci signifie :

$p\tilde{\alpha}_1 \simeq p(\tilde{\beta}\cdot\tilde{\alpha}_2)$ rel ∂I. Comme $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\beta}\cdot\tilde{\alpha}_2$ commencent en $\tilde{x}_0$, 2.17 affirme :

$$\tilde{\alpha}_1 \simeq \tilde{\beta} \cdot \tilde{\alpha}_2 \text{ rel } \partial I$$

En particulier : $\tilde{x}_1 = \tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{\alpha}_2(1) = \tilde{x}_2$.

Corollaire 2.24.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement. Si $\tilde{X}$ est connexe par arcs et $p_{\#}$ surjective, alors p est un homéomorphisme.

EXISTENCE D'UN RELEVEMENT.

Le but de ce paragraphe est de déterminer sous quelles conditions on peut relever : $f(Y,y_0) \to (X,x_0)$ sur un revêtement $(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ de X

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X},x_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \Pi_1(\tilde{X},x_0) \arrow[d, "p_{\#}"] \\ \Pi_1(Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "g_{\#}"] \arrow[r, "f_{\#}"'] & \Pi_1(X,x_0) \end{tikzcd}$$

On remarquera que si g existe, telle que $pg = f$ on a

$$f_{\#}(\Pi_1 Y,y_0)) \subset p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$$

en raison de la correspondance fonctorielle entre les espaces topologiques munis des applications continues (catégorie des espaces topologiques) et les groupes fondamentaux munis des homomorphismes (catégorie des groupes).

<u>Théorème 2.25.</u>

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, $x_o \in X$, $\tilde{x}_o \in p^{-1}(x_o)$ et soit Y un espace topologique connexe, localement connexe par arcs (il est donc connexe par arcs) et $f : (Y,y_o) \to (X,x_o)$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe g, unique : $(Y,y_o) \to (\tilde{X},\tilde{x}_o)$ telle que $pg = f$.

b) $f_{\#}(\Pi_1(Y,y_o)) \subset p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o))$.

<u>Preuve</u> :

$a \Longrightarrow b$ est démontré ci-dessus.

$b \Longrightarrow a$ 1) Soit $f^*\tilde{X}$ le revêtement de Y induit par f : $f^*\tilde{X} = \{(y,x) \in Y \times \tilde{X} | \ fy = px\}$

$(y_o,x_o) \in f^*\tilde{X}(\rho\tilde{x}_o = f(y_o) = x_o)$

$$\begin{tikzcd} f^*\tilde{X} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\rho_1"] & \tilde{X} \arrow[d, "\rho"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Soit A la composante connexe par arcs de $(y_o,\tilde{x}_o) = a_o$.

$p_2 = p_1|A \ : A \to p_1(A)$ est un revêtement.

Ceci d'après l'équivalent de 2.14 où connexe est remplacé par connexe par arcs (qu'on démontrera de façon analogue). Ce théorème nous apprendra aussi que $p_1(A)$ est une composante connexe par arcs de Y . Comme Y est connexe par arcs : $Y = p_1(A)$

2) On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A(a_o) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_2"] & (\tilde{X},\tilde{x}_o) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_o) \arrow[r, "f"] & (X,x_o) \end{tikzcd}$$

$p_{2\#}(\Pi_1, a_o)) = \Pi_1(Y,y_o)$.

Cette relation que nous allons démontrer, associée à 2.24 nous montre que p_2 est un homéomorphisme.

Soit α un lacet en y_o - $f\alpha$ est un lacet en x_o

$f_{\#}(\Pi_1(Y,y_o)) \subset p_{\#}(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_o))$. De cette condition on déduit l'existence d'un lacet $\tilde{\beta}_1$ en $\tilde{x}_o$ tel que : $f\alpha \simeq \rho\tilde{\beta}_1$ rel ∂I .

Soit $\tilde{\beta}$ un relèvement de $f\alpha$ tel que $\tilde{\beta}(o) = \tilde{x}_o$.

$$\rho\tilde{\beta} = f\alpha \simeq \rho\tilde{\beta}_1 \ .$$

D'après 2.17 $\tilde{\beta} \simeq \tilde{\beta}_1$ rel ∂I donc $\tilde{\beta}(1) = \tilde{x}_o$. Soit $\mu(t) = (\alpha(t),\beta(t))$.

C'est un lacet dans A en a_o car :

a) $\mu(t) \in f^*\tilde{X}$ $(f\alpha(t) = p\tilde{\beta}(t))$

b) $\mu(I) \subset A$: $\mu(o) = a_o \in A$ et A connexe par arcs .

c) $\mu(1) = a$.

Alors $[\mu] \in \Pi_1(A,a_o)$ et $p_{2\#}[\mu] = [\rho_2\mu] = [\alpha]$.

3) Puisque p_2 est un homéomorphisme, posons : $g = f_1\rho_2^{-1}$.

Vérifions que : $pg = f$.

Or $pg = f \Longleftrightarrow pgp_2 = f\rho_2$ car p_2 est un homéomorphisme.

Ce qui s'écrit $\rho f_1\rho_2^{-1}\rho_2 = \rho f_1 = f\rho_2$.

C'est la restriction à A de la condition pour que $f^*\tilde{X}$ soit le revêtement induit par f sur Y .

CLASSIFICATION DES REVETEMENTS.

Lemme 2.26.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement. Supposons X localement connexe . Soit U un voisinage admissible connexe dans X . Alors chaque composante connexe de $p^{-1}(U)$ est une copie de U .

Preuve :

Chaque copie de U est connexe car $p|\tilde{U}$ est un homéomorphisme. Comme les copies de U sont deux à deux disjointes, le lemme est évident.

Théorème 2.27.

Soient $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$, $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ deux revêtements de X (X localement connexe).

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ \tilde{X}_1 \arrow[ur, "\rho"] \arrow[r, "p_1"'] & X \end{tikzcd}$$

S'il existe ρ continue : $\tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ telle que $p_2\rho = p_1$.

Alors ρ est un revêtement.

Preuve :

Soit $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$.

Posons $p(\tilde{x}_2) = x$. $x \in X$.

Soit U un voisinage connexe de x, admissible pour p_1 et p_2 .

Soit $\tilde{U}_2$ la copie de U dans $\tilde{X}_2$ qui contient x_2

$p^{-1}(\tilde{U}_2) \subset p_1^{-1}(U)$

$p^{-1}(\tilde{U}_2)$ est donc formé d'ensembles connexes disjoints (à savoir les copies de U dans $\tilde{X}_1$ qui appartiennent à $p^{-1}(\tilde{U}_2)$) .

Soit $\tilde{U}_1$ l'une d'elles.

$\tilde{U}_2$ étant une composante connexe de $p_2^{-1}(U)$ d'après 2.26 et $\tilde{U}_1$ étant connexe

$$p(\tilde{U}_1) \subset \tilde{U}_2 \quad .$$

La relation – $p_2 p = p_1$ restreinte à $\tilde{U}_1$ peut donc s'écrire :

$$(p_2|\tilde{U}_2)\ (p|\tilde{U}_1) = p|\tilde{U}_1 \quad .$$

Or $(p_1|\tilde{U}_1)$ et $p_2|\tilde{U}_2$ sont des homéomorphismes ; il en est donc de même de $p|\tilde{U}_1 = (p_2|\tilde{U}_2)^{-1}\ (p\ |\tilde{U}_1)$. En conclusion : $p^{-1}(\tilde{U}_2)$ est formé d'ouverts disjoints de la forme $\tilde{U}_1$ et $p|\tilde{U}_1$ est un homéomorphisme pour chaque $\tilde{U}_1 \in p^{-1}(\tilde{U}_2)$.

<u>Définition 2.28.</u>

Soient $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_2$ deux revêtements connexes par arcs de X .

On dit que $(\tilde{X}_1, X, p_1)$ est équivalent

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ \tilde{X}_1 \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "p_2"'] & X \end{tikzcd}$$

$(\tilde{X}_2, X, p_2)$ s'il existe un homéomorphisme $p : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tel que :

$$p_2 p = p_1 \ .$$

Théorème 2.29.

$(\tilde{X}_1 X, p_1)$ est équivalent à $(\tilde{X}_2, X, p_2)$ si et seulement si il existe $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ tels que

$$p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_o$$

et que

$$p_{1*}\Pi_1(X_1, \tilde{x}_1) \text{ soit conjugué de } p_{2*}\Pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \text{ dans}$$

$\Pi_1(X, x_o)$.

Preuve :

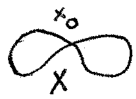
(laissée au lecteur)

Il suffit de combiner le résultat 2.21 et les propriétés fonctorielles entre les espaces topologiques et leurs groupes fondamentaux.

Applications 2.30.

1. Les revêtements de S^1 sont $(\mathbb{R}, \exp)$ et (S^1, p_n) avec $p_n(z) = z^n$.

2. Soit le huit X . On a $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$



$\Pi_1(X, x_o)$ est le groupe libre à deux générateurs.

(C'est le premier groupe fondamental non abélien que nous rencontrons).

Les démonstrations sont difficiles.

Théorème 2.31.

Soient $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ deux revêtements connexes par arcs de X .

$p_1 : \tilde{X}_1 \to X$, $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$. X est localement connexe.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) il existe un revêtement $p : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tel que :

$$p_2 p = p_1$$

b) il existe $x_1 \in \tilde{X}_1$, $x_2 \in \tilde{X}_2$ tel que :

$$p_1(x_1) = p_2(x_2) = x_o$$

et que

$\Pi_1 = p_{1\#}\Pi_1(\tilde{X}_1 x_1)$ soit conjugué d'un sous-groupe de

$\Pi_2 = p_{2\#}\Pi_1(\tilde{X}_2, x_2)$.

Preuve : $a \Longrightarrow b$

Soit $x_1' \in p^{-1}(\tilde{x}_2)$

alors $p_{1\#}\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1')$ est conjugué de $p_{1\#}\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$.

Or $p_{1\#} = (p_2 p)_\# = p_{2\#}) \ (p_\#)$

Donc $p_{1\#}\Pi_1(\tilde{X}_1, x_1)$ est conjugué de $(p_{2\#}) \ p_\# \Pi_1(\tilde{X}_1, x'_1)$ et $p_\#\Pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1') = H$ est un sous-groupe de Π_2 .

\- $b \Longrightarrow a$.

Il existe $g \in \Pi_1(X, x_o)$ et un sous groupe H de H_2 tels que

$$\Pi_1 = g\, H\, g^{-1} .$$

$gHg^{-1} \subset gH_2g^{-1} = p_{2\#}\Pi_1(\tilde{X}_2, z)$ pour un $z \in p_2^{-1}(x_o)$

(D'après 2.22).

D'après le théorème 2.20 (des relèvements) il existe $p : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tel que

$$p_2 p = p_1 \quad .$$

et d'après 2.27.

$$p \text{ est un revêtement.}$$

<u>Définition 2.32.</u>

$(\tilde{X}, p)$ est dit revêtement universel de x, si $\tilde{X}$ est un revêtement de X , s'il est connexe et si pour tout revêtement $(\tilde{X}_1, p_1)$ connexe de X , il existe $f : \tilde{X} \to \tilde{X}_1$ tel que

$$p = p_1 f$$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

<u>Théorème 2.33.</u>

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement. Si $\tilde{X}$ est simplement connexe, c'est un revêtement universel de X .

<u>Preuve</u> : Découle directement de 2.31.

<u>Problème 2.34.</u> Soit X un espace topologique, $\alpha \in X$ et H un sous-groupe de $\Pi_1(X,x)$.

On se propose de trouver sous quelles conditions, il existe un revêtement $\tilde{X}$ tel que si $\tilde{x}$ est dans la fibre de x

$$p_{\#}\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) = H \; .$$

Commentaire.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, $\tilde{X}$ connexe par arcs, $H = p_{\#}\, \Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o)$ $p(\tilde{x}_o) = x_o$.

Soit $\mathcal{U} = \{U/U$ soit voisinage admissible dans $X\}$.

Soit α un chemin dans X tel que $\alpha(o) = x_o$, et soit $U \in \mathcal{U}$ tel que $\alpha(1) \in U$.

Pour tout lacet β en $\alpha(1)$ dans U ; $\alpha\beta\alpha^{-1}$ est un lacet en x_o .

β se relève dans $\tilde{X}$ en un lacet $\tilde{\beta}$, donc $\alpha\beta\alpha^{-1}$ aussi en $\widetilde{\alpha\beta\alpha}^{-1}$

$$[\alpha\beta\alpha^{-1}] = p_{\#}[\widetilde{\alpha\beta\alpha}^{-1}]$$

Donc H contient nécessairement tous les éléments de la forme :

$$[\alpha\beta\alpha^{-1}]$$

Théorème 2.35.

Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs, $x_o \in X$, H est un sous-groupe de $\Pi_1(X,x_o)$. Soit $\mathcal{U} = \{U\}$ un recouvrement de X par des ouverts tels que H contienne tous les éléments de la forme $[\alpha\beta\alpha^{-1}]$, α étant un chemin en x_o , β un lacet en $\alpha(1)$ contenu dans un U du recouvrement $\mathcal{U}$.

Alors :

Il existe un revêtement $\tilde{X}$ connexe par arcs tel que

$$p_{\#}\, \Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) = H$$

(De plus cette implication est une équivalence).

<u>Preuve.</u> a) Analyse du problème.

Supposons que $\tilde{X}$ existe. Soit $\Omega = \{\alpha /\ \alpha$ chemin dans X et $\alpha(0) = x_o\}$ et ρ la relation $\alpha_1 \rho \alpha_2 \Longleftrightarrow \alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ et $[\alpha_1 \alpha_2^{-1}] \in H$. Comme H est un sous-groupe, ρ est une relation d'équivalence. Soit Y l'ensemble Ω/ρ (sans topologie).

On va établir une correspondance bijective ψ entre $\tilde{X}$ et Y.

Soit $\psi : \tilde{X} \to Y \qquad \psi(\tilde{x}) = \langle p\tilde{\alpha} \rangle \qquad$ pour $\tilde{x} \in \tilde{X}$

$\tilde{\alpha}$ étant un chemin entre $\tilde{x}_o$ et $\tilde{x}$ et le symbole $\langle\ \rangle$ désignant une classe d'équivalence pour ρ

. ψ est bien définie : Soit $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}$ deux chemins entre $\tilde{x}_o$ et $\tilde{x}$

$$\tilde{\alpha}\,\tilde{\alpha}^{-1} \text{ est un lacet en } \tilde{x}_o .$$

Donc

$$p_{\#}[\alpha\ \alpha^{-1}] \in H .$$

Ce qui signifie qu'on a $(p\tilde{\alpha})\ \rho(p\tilde{\alpha}_1)$

ou $\qquad \langle p\tilde{\alpha} \rangle = \langle p\tilde{\alpha}_1 \rangle$

. ψ est injective :

Soit $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ appartenant à $\tilde{X}$ tels que

$\psi(\tilde{x}_1) = \psi(\tilde{x}_2) \qquad$ ou $\qquad \langle p\tilde{\alpha}_1 \rangle = \langle p\tilde{\alpha}_2 \rangle$

$$(p\tilde{\alpha}_1)(p\tilde{\alpha}_2^{-1})^{-1} = \begin{cases} p\tilde{\alpha}_1(2t) & \text{pour } t \leqslant \frac{1}{2} \\ p\tilde{\alpha}_2^{-1}(2t-1) & \text{pour } t \geqslant \frac{1}{2} . \end{cases}$$

$(p\tilde{\alpha}_1)(p\tilde{\alpha}_2^{-1}) = p\tilde{\beta}$ où $\tilde{\beta}$ est un lacet en $\tilde{x}_o$ car c'est un élément de $H = \rho_{\#}\Pi_1(\tilde{X}\,\tilde{x}_o)$

posons

$$\tilde{\beta}_1(t) = \tilde{\beta}(\frac{t}{2})$$

$$\tilde{\beta}_2(t) = \tilde{\beta}(\frac{1+t}{2})$$

Alors $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1\,\tilde{\beta}_2$

$$\tilde{\beta}_1(o) = \tilde{\beta}_2(1) = \tilde{x}_o$$

et

$$p\tilde{\beta}_1 = \tilde{\alpha}_1 \qquad p\tilde{\beta}_2 = \tilde{\alpha}_2$$

Comme on a la même relation en $\tilde{\alpha}_i$ soit :

$$\tilde{\alpha}_1(0) = \tilde{\alpha}_2^{-1}(1) = \tilde{x}_o$$

d'après 2.16 $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\alpha}_2^{-1}$.

Donc en particulier $\tilde{x}_1 = \tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{x}_2 = \tilde{\alpha}_2(1)$.

. ϕ est surjective : évident en supposant $\tilde{X}$ connexe par arc ce qui sera démontré dans la construction de $\tilde{X}$.

On a donc établi une bijection ensembliste, entre $\tilde{X}$ et Y qui n'est construit qu'à partir de X .

En munissant Y d'une topologie on va en faire le revêtement cherché.

b) Topologie de Y .

Posons $Y = \tilde{X}$ et appelons p la projection de $\tilde{X}$ dans X définie par : $p\langle\alpha\rangle = \alpha(1)$.

Si V est un ouvert de X et $\alpha \in \Omega$ tel que $\alpha(1) \in V$ on définit $\langle\alpha,V\rangle = \{ \langle\alpha'\rangle \in \tilde{X}$ tels que $\alpha' = \alpha \circ \beta\}$ (β étant un lacet en $\alpha(1)$ inclus dans V) .

Ces ensembles ont les propriétés suivantes :

- $\langle\alpha_2\rangle \in \langle\alpha_1 V\rangle \Longrightarrow \langle\alpha_1 V\rangle = \langle\alpha_2,V\rangle$
- Si $\langle\alpha_1 V_1\rangle \cap \langle\alpha_1,V_2\rangle \neq \emptyset$ $\langle\alpha_1 V_1 \cap V_2\rangle \subset \langle\alpha_1,V_1\rangle \cap \langle\alpha_1 V_2)$

Ces propriétés permettent d'affirmer que les $\langle\alpha,V\rangle$ forment une base d'ouverts de $\tilde{X}$.

On munit donc $\tilde{X}$ de la topologie définie par cette base d'ouverts

c) p est une application continue et ouverte.

- p est continue.

Si V est voisinage de $\alpha(1)$ $p\langle\alpha,V\rangle$ est inclus dans V par définition.

- p est application ouverte.

Soit V un voisinage de $\alpha(1)$

$p\,\langle\alpha V\rangle$ est la composante connexe par arcs de $\alpha(1)$ dans V . Comme X est localement connexe, les composantes par arcs sont ouvertes.

Donc $p\,\langle\alpha V\rangle$ est ouvert.

d) p est un revêtement.

Soit V un voisinage de $\alpha(1)$ connexe par arcs tel que il existe $U \in \mathcal{U}$ et $V \subset U$.

On va montrer que V est admissible pour p .

. $p^{-1}(V) = \{\langle\alpha_1, V\rangle / \alpha_1$ chemin entre x_0 et un point de $U\}$

$\langle\alpha_1, V\rangle \cap \langle\alpha_2, V\rangle \neq \emptyset \implies \langle\alpha_1, V\rangle = \langle\alpha_2 V\rangle$

. $p|\langle\alpha_1 V\rangle$ est un homéomorphisme entre $\langle\alpha_1 V\rangle$ et V .

Pour le voir il suffit de montrer que $p_1 = p|\langle\alpha_1 V\rangle$ est bijective, car c'est une application continue et ouverte et même injective car il est clair qu'elle est surjective.

Soient $\langle\alpha_2\rangle$ et $\langle\alpha_3\rangle$ appartenant à $\langle\alpha_1 V\rangle$

$$\alpha_2 = \alpha_1\beta_2 \qquad\qquad \alpha_3 = \alpha_1\beta_3$$

donc $\alpha_2(1) = \alpha_3(1)$

$$\alpha_2\alpha_3^{-1} = (\alpha_1\beta_2)(\beta_3^{-1}\ \alpha_1^{-1}) = \alpha_1(\beta_2\beta_3^{-1})\ \alpha_1^{-1}$$

Comme V est inclus dans U $[\alpha_2\alpha_3^{-1}] \in H$.

ou $\langle\alpha_2\rangle = \langle\alpha_3\rangle$

e) $\tilde{X}$ est connexe par arcs et $p_{\#}\,\Pi_1(\tilde{X}, x) = H$.

soit $x_0 \in X$, $x_0 = \langle\varepsilon_{x_0}\rangle$.

Lemme : Soit α un chemin dans χ qui commence en x_o .

Définissons $\alpha_\tau \in \Omega$ pour $o \leqslant \tau \leqslant 1$ par $\alpha_\tau(t) = \alpha(t\tau)$

$\tilde{\alpha} : \tau \to \langle\alpha_\tau\rangle$ est un chemin dans $\tilde{X}$ qui commence en $\tilde{x}_o$ et c'est un relèvement de α . $(p\tilde{\alpha} = \alpha)$

$$(p\tilde{\alpha})(t) = p < \alpha_t > = \alpha(t)$$

. $\tilde{X}$ est connexe par arcs :

Soit $\tilde{x}_1 = \langle\alpha_1\rangle \in \tilde{X}$

Le chemin $\tilde{\alpha}_1$ défini dans le lemme à partir de α_1 joint $\tilde{x}_o$ et $\tilde{x}_1$

. $H \subset p_{\#}\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o)$

Soit $[\beta] \in H$, $\tilde{\beta}$ le relèvement de β donné dans le lemme.

$\tilde{\beta}$ est un lacet en $\tilde{x}_o$ car $\tilde{\beta}(1) = \langle\beta\rangle = \langle\varepsilon_{x_o}\rangle$

$(\beta(1) = x_o$ et $[\beta\varepsilon_{x_o}^{-1}] = [\beta] \in H)$

Donc $[\beta] \in p_{\#}\Pi_1(\tilde{X};\tilde{x}_o)$ en posant $[\beta] = p_{\#}[\tilde{\beta}]$.

$p_{\#}\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o) \subset H$.

Soit $[\tilde{\beta}'] \in \Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o)$

posons $p\tilde{\beta}' = \beta$.

Soit $\tilde{\beta}$ le chemin relevé de β donné dans le lemme

$$\tilde{\beta}'(o) = \tilde{\beta}(o) = \tilde{x}_o \quad - \quad \text{donc d'après 2.16} \quad \tilde{\beta} = \tilde{\beta}' \ .$$

En particulier $\tilde{\beta}(1) = \tilde{\beta}'(1) = \tilde{x}_o$.

Or $\tilde{\beta}(1) = \langle\beta\rangle$

Donc on a

$$\beta\rho\ \varepsilon_{x_o} \ .$$

Et

$$[\beta] = p_{\#}[\tilde{\beta}'] = [\varepsilon_{x_o}^{-1}\beta] \in H \ .$$

Ce qui achève la démonstration.

Remarque : Dans le cas où $H = \{1\}$ dans les conditions de l'énoncé, on obtient le revêtement universel de x .

Corollaire 2.36.

Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs, et $\mathfrak{U} = \{U\}$ un recouvrement de X tel que pour tout U de $\mathfrak{U}$

$$\Pi_1(U,x) = \{1\}$$

Alors il existe une correspondance bijective entre les revêtements de X et les classes de conjugaison de $\Pi_1(X,x_o)$

Définition 2.37.

Une variété X de dimension n est un espace topologique tel que pour tout

x de X , il existe un voisinage U de x et un homéomorphisme $Q : U \to \mathbb{R}^n$. On remarquera qu'un tel espace vérifie les conditions du corollaire 2.36 s'il est connexe.

APPLICATION : TRANSFORMATION DE REVETEMENT.

Définition 2.38.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement.

Soit $G(\tilde{X}|X) = \{\lambda : \tilde{X} \to \tilde{X} / \lambda$ homéomorphisme et $p\lambda = p)$,

G est un groupe appelé groupe de transformation du revêtement.

Exemples :

. $\tilde{X} = \mathbb{R} \to S^1$ $\qquad \lambda(x) = x + n$. $(n \in \mathbb{Z})$

. $S^n \to P^n$ $\qquad G(S^n|P^n) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$

$\lambda_1(z) = z$ $\qquad \lambda_2(z) = z$.

. $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ (tore)

$G(\mathbb{R}^2 \,|S^1 \times S^1) = \{\lambda_{m,n} / \ m,n \in \mathbb{Z}^2\}$

$\lambda_{m,n}(x,y) = (x + m, \ y + n)$

A partir de maintenant les théorèmes sont donnés sans démonstration dans le seul but d'illustrer la théorie que l'on vient d'exposer.

Théorème 2.39.

Si X est une variété compacte de dimension 2, homéomorphe ni à S^2, ni a P^2 , il existe $p : \mathbb{R}^2 \to X$ qui est un revêtement.

Théorème 2.40.

Soit $\rho : \tilde{X} \to X$ un revêtement, $\tilde{X}$ connexe. Soient λ_1, $\lambda_2 \in G(\tilde{X}|X)$ telles que $\lambda_1(\tilde{x}) = \lambda_2(\tilde{x})$ pour un $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Alors $\lambda_1 = \lambda_2$

Théorème 2.41.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement, $\tilde{X}$ étant connexe par arcs. Soit N le normalisateur de $H = p_{\neq} \Pi_1(\tilde{X},x)$

$$N = \{a \in \Pi_1(X,x) / \ aHa^{-1} = H\}$$

Alors il existe une injection linéaire φ

$$\varphi : G(\tilde{X}|X) \to N/H \ .$$

De plus, si $\tilde{X}$ est localement connexe par arcs, φ est un isomorphisme.

Théorème (de Jordan) 2.42.

Soit $f ; S^1 \to \mathbb{R}^2$ un plongement (injection continue).
Alors il existe $D \subset \mathbb{R}^2$ tel que

- $\partial D = f(S^1)$
- D soit homéomorphe au disque D^2.

Corollaire 2.43.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement. On suppose $\tilde{X}$ simplement connexe, localement connexe par arcs, $D \subset \tilde{X}$.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $p|D$ est injective

b) Pour tout $\lambda \in G(\tilde{X}|X)$, $\lambda \neq Id$: $\lambda D \cap D = \emptyset$

<u>Preuve</u> :

. $a \Longrightarrow b$

Supposons $p|D$ injective

Soit $\lambda \in G(\tilde{X}|X)$ tel que $\lambda D \cap D \neq \emptyset$. Il existe $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ dans D tels que : $\tilde{y} = \lambda\tilde{x}$

$p\lambda = p \Longrightarrow p\tilde{y} = p\tilde{x}$

$y = x$ car $p|D$ est injective.

Alors $\lambda = Id$ d'après 2.40 .

. $b \Longrightarrow a$. Supposons $p|D$ non injective. Il existe $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2 \in D$ tels que

$$p\tilde{x}_1 = p\tilde{x}_2 = x_o$$

Comme $\tilde{X}$ est simplement connexe : $p_{\#}\ \Pi_1(\tilde{X}\ \tilde{x}_i) = (1)$ $i = 1,2$

D'après 2.25, il existe $\lambda : (\tilde{X},\tilde{x}_1) \to (\tilde{X}\ \tilde{x}_2)$

$\lambda' : (\tilde{X},\tilde{x}_2) \to (\tilde{X},\tilde{x}_1)$

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X},\tilde{x}_2) \arrow[dl, shift left, "\lambda'"] \arrow[d, "p"] \\ (\tilde{X},\tilde{x}_1) \arrow[ur, shift left, "\lambda"] \arrow[r, "p"'] & (X\ x_o) \end{tikzcd}$$

$\lambda'\lambda$ et Id sont deux relèvements de $p : (\tilde{X}\ x_1) \to (Xx_o)$ dans $(\tilde{X},x_1)$

D'après 2.10 $\lambda'\lambda = Id$. De même $\lambda\lambda' = Id$

Donc $\lambda \in G(\tilde{X}/X)$, $\lambda\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$. Ou $\lambda D \cap D \neq 0$, $\lambda \neq Id$

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[d, "p"] \\ (\tilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[ur, "\lambda'\lambda", "Id"'] \arrow[r, "p"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

2.44. <u>APPLICATIONS</u>.

a) <u>Théorème</u> : Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement. On suppose $\tilde{X}$ localement connexe par arcs et simplement connexe

Alors $G(\tilde{X}/X) \approx \Pi_1(X,x_0)$

Par exemple : $G(\mathbb{R}|S^1) \approx \mathbb{Z}$; $G(\mathbb{R}^2|S^1 \times S^1) \approx \mathbb{Z}^2$

b) <u>Théorème</u> : Si X est une variété compacte de dimension 2 $f : S^1 \to X$ un plongement homotope à une constante il existe $D \subset X$ tel que :

. $\partial D = f(S^1)$

. D soit homéomorphe au disque D^2 .

<u>Preuve</u> : (faite dans le cas où X est non homéomorphe à P^2) .

a) <u>X est homéomorphe à S^2</u>

$f : S^1 \to S^2$ - $f(S^1) \neq S^2$ car S^1 n'est pas homéomorphe à S^2 .

Il existe $x_0 \in S^2$, $x_0 \notin f(S^1)$

$S^2 - \{x_0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. Il suffit donc d'appliquer 2.42 .

b) <u>X est homéomorphe ni à S^2 , ni à P^2</u> .

D'après 2.39, il existe $p : \mathbb{R}^2 \to X$ qui est un revêtement

$f_\# \Pi_1(S^1,1)$ est trivial car $f \simeq \varepsilon_1$. D'après 2.20 il existe $\tilde{f} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ telle que $p\tilde{f} = f$.

f étant injectif, $\tilde{f}$ l'est aussi.

D'après 2.42. Il existe $D \subset \mathbb{R}^2$ homéomorphe au disque D^2 tel que :

$\partial D = \tilde{f}(S^1)$.

Montrons que $p|D$ est injectif en utilisant 2.43.

Soit $\lambda \in G(\tilde{X}|X)$ tel que $\lambda D \cap D \neq \emptyset$.

Posons $C = \partial D = f(S^1)$

p est injective sur C car

soit x_1, x_2 appartenant à C tels que $p(x_1) = p(x_2)$.

il existe x'_1, x'_2 appartenant à S^1 tels que $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \tilde{f}(x'_1) \text{ et} \\ x_2 = \tilde{f}(x'_2) \end{array}\right.$

$p\tilde{f} = f$ est injective.

Donc $p\tilde{f}(x'_1) = p\tilde{f}(x'_2) \Longrightarrow x'_1 = x'_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$.

Donc

$$\lambda C \cap C = \emptyset .$$

Comme $\lambda D \cap D \neq \emptyset$ on a nécessairement

$$\lambda D \subset D \quad \text{ou} \quad D \subset \lambda . D$$

On sait que si $h : D^2 \to D^2$ est continue

il existe $x \in D^2$ tel que $h(x) = x$.

il est clair que l'on a la même propriété pour tout espace homéomorphe à D^2.

. $\lambda D \subset D$

$$\lambda : D \to D \text{ est continue.}$$

il existe $x \in D$ tel que $\lambda x = x$.

Donc $\lambda = \mathrm{Id}$ d'après 2.40 .

. $D \subset \lambda D$

$$\lambda^{-1} : \lambda D \to \lambda D \quad \text{est continue}$$

Donc comme ci-dessus $\lambda^{-1} = \mathrm{Id} = \lambda$

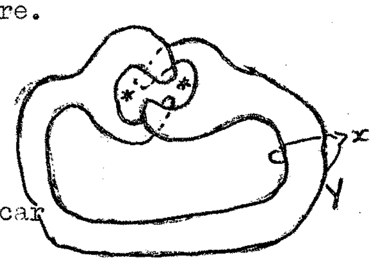
$p|D$ étant injectif, $p(D)$ est homéomorphe au disque D^2

et $$p(\partial D) = \partial(pD) = p\tilde{f}(S^1) = f(S^1) \quad .$$

<u>Position du problème dans $\mathbb{R}^3$ 2.45.</u>

$f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ est un plongement. Existe-t-il $D \subset \mathbb{R}^3$ homéomorphe à D^3 tel que $\partial D = f(S^2)$?

Ce problème longtemps resté en suspens a obtenu sa première réponse (négative) par un contre-exemple d'Alexandre.



On déforme continûment la sphère comme l'indique la figure. Puis on réforme de nouvelles pinces entrecroisées à chaque extrémité de pinces (*) . Ceci étant fait une infinité de fois, on obtient X simplement connexe car cette déformation est un homéomorphisme mais l'image X est le bord de Y qui n'est pas homéomorphe à D^3 car $\mathbb{R}^3 - Y$ n'est pas simplement connexe.

<u>Théorème 2.46.</u> Si $f : S^{n-1} \to R^n$ est un plongement différentiable alors il existe D inclus dans R^n tel que

. $\partial D = f(S^{n-1})$

. D soit homéomorphe à la boule D^n .

<u>Applications</u> : Soit $f : S^2 \to S^2 \times S^1$ un plongement différentiable homotope à une constante, alors $f(S^2)$ est homéomorphe au bord d'une boule.

-::-::-

CHAPITRE 3.

POLYEDRES

-::-

ESPACES AFFINES. ESPACES CONVEXES.

Définition 3.1.

Les points p_o , $p_1 \dots p_k$ appartenant à $\mathbb{R}^n$ sont dits affinement indépendants si pour tout $(\alpha_o , \alpha_1 \dots \alpha_k)$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ tel que $\begin{cases} \Sigma\, \alpha_i p_i = o \\ \Sigma\, \alpha_i = o \end{cases}$

alors $\alpha_i = o$ pour tout i de $[o,1,\dots k]$

Définition 3.2.

a) Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $p,q \in A$.

$$(1 - t)p + tq \in A \qquad (t \in \mathbb{R})$$

b) Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace convexe de $\mathbb{R}^n$ si pour tous $p,q \in A$

$$(1 - t)p + tq \in A \qquad (t \in I)$$

Proposition 3.3.

a) Le sous-espace affine engendré par les points $p_o, p_1 \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble B

$$B = \{q \in \mathbb{R}^n / \ q = \sum_{i=o}^{k} \alpha_i p_i \ , \ \sum_{i=o}^{k} \alpha_i = 1\}$$

b) Le sous-espace convexe engendré par les points $p_o \dots p_k \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble C

$$C = \{q \in \mathbb{R}^n / \; q = \sum_{i=o}^{k} \alpha_i p_i \quad , \quad \sum_{i=o}^{k} \alpha_i = 1 \quad , \quad \alpha_i \geqslant o \;\; \forall_i \}$$

<u>Preuve</u> : (Traitée pour a)

1) B est affine.

Soit p et $q \in B$ $\quad p = \sum_{i=o}^{k} \alpha_i p_i \qquad q = \sum_{i=o}^{k} \beta_i p_i \qquad \Sigma\alpha_i = \Sigma\beta_i = 1$

$$(1 - t)\, p + tq = \sum_{i=o}^{k} [(1 - t)\alpha_i + t\beta_i] p_i \; .$$

$$\Sigma\, [(1 - t)\alpha_i + t\beta_i] = 1 - t + t = 1 \; .$$

2) Si B' est un espace affine qui contient $p_o, p_1 \dots p_k$ alors B' contient B.

On démontre par induction sur k.

. $k = 2$ $\qquad p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \in B \;\; ; \;\; \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

$$p = \alpha_1 p_1 + (1 - \alpha_1) p_2 \in B'$$

. $k > 2$

Supposons que toutes les combinaisons affines de ℓ points p_i ($\ell \leqslant k$) appartiennent à B' .

Soit $p = \sum_{j=o}^{\ell} \alpha i_j \; p_{ij}$

il existe $\alpha_{ij} = o$ soit α_{io}

$$p = \alpha_{i_o} p_{i_o} + (1 - \alpha_{i_o}) \left(\sum_{j=1}^{\rho} \frac{\alpha_{ij}}{1 - \alpha_{i_o}} p_{ij} \right) \in B' .$$

Théorème 3.4.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) $p_0 , p_1 \ldots p_k$ sont affinement indépendants.

b) Tout point p du sous-espace affine engendré par $p_0 ,\ldots p_k$ s'écrit de manière unique

$$p = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i \qquad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 .$$

c) Tout point p du sous-espace convexe engendré par $p_0 \ldots p_k$ s'écrit de manière unique

$$p = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i \quad , \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \quad , \quad \forall i \quad \alpha_i \geqslant 0 .$$

Preuve :

a $\Longrightarrow$ b . Soit $p = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i p_i \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1$

Alors $\sum_{i=0}^{k} (\alpha_i - \beta_i) p_i = 0$. et $\sum_{i=0} (\alpha_i - \beta_i) = 0$

donc $\alpha_i = \beta_i \quad \forall_i$.

– b $\Longrightarrow$ c évident.

– c $\Longrightarrow$ a. $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i p_i = 0$ $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$.

Soit $I = \{i/\alpha_i > 0\}$

et soit $\alpha = \sum\limits_{i \in I} \alpha_i$

Si $\alpha \neq 0$. On a $\sum\limits_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\alpha} p_i = \sum\limits_{i \in CI} (-\frac{\alpha_i}{\alpha}) p_i$

avec $\sum\limits_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\alpha} = \sum\limits_{i \in CI} (-\frac{\alpha_i}{\alpha}) = 1$.

donc $\frac{\alpha_i}{\alpha} = 0 \quad \forall i$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\alpha \neq 0$.

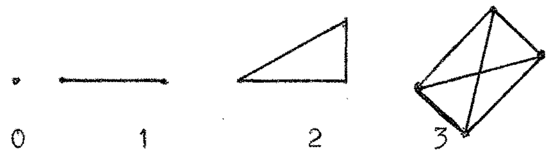
Donc $\alpha = 0$ et $\alpha_i = 0 \quad \forall i$.

SIMPLEXES.

Définition 3.5.

On appelle simplexe de dimension k dans $\mathbb{R}^n$ le sous-espace convexe engendré par $(k+1)$ points $p_0, \dots, p_k$ de $\mathbb{R}^n$ affinement indépendants.

Exemples : Dans $\mathbb{R}^3$

simplexes : 

dimension : 0 1 2 3

Définition 3.6.

Un point p de A $(A \subset \mathbb{R}^n)$ est dit point extrême de A s'il n'existe pas de segment ouvert ℓ $(\ell \subset A)$ tel que $p \in \ell$.

Proposition 3.7.

Soit S le simplexe engendré par $(p_0, p_1 \dots p_k)$. Les points extrêmes de S sont les points $(p_0, p_1 \dots p_k)$. Ceci prouve l'unicité des points engendrant un simplexe ; ces points sont appelés les sommets du simplexe.

Si p appartient à S : $p = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i$, $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$, $\forall_i$ $\alpha_i \geqslant 0$.

Les α_i uniquement déterminés sont appelés coordonnées barycentriques du point p .

Preuve : Evident :

Définitions et notations 3.8.

a) On note $|S|$ l'espace du Simplexe $\langle S \rangle$ le simplexe ouvert :

$$\langle S \rangle = \{q \in \mathbb{R}^n / \ q = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \ , \ \alpha_i > 0 \ \forall_i \ \}$$

(En réalité $\langle S \rangle$ est ouvert dans l'espace affine engendré par $p_0, p_1 \dots p_k$).

b) Si S_1 et S_2 sont deux simplexes de $\mathbb{R}^n$ on dit que S^1 est une face de S_2 si chaque sommet de S_1 est un sommet de S_2.

Ceci définit une relation d'ordre (notée $\leqslant$) dans l'ensemble des simplexes de $\mathbb{R}^n$.

c) on note $\dot{S}$ le bord de S.

$$\dot{S} = \bigcup_i S_i \qquad (S_i : \text{face propre de } S).$$

Proposition 3.9.

Soit S un simplexe de $\mathbb{R}^n$.

a) $|S|$ est réunion disjointes de ses faces ouvertes.

b) Deux faces fermées de S soit sont disjointes, soit se rencontrent en une face fermée de S.

Preuve :

a) Soit $p \in |S|$

$$p = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i \qquad \Sigma\alpha_i = 1 . \qquad \forall i \ \alpha_i \geqslant 0 .$$

Soit $i_0, i_1 \dots i_\ell$ les indices tels que $\alpha_{i_j} > 0$.

Soit S_i le simplexe engendré par $p_{i_0}, p_{i_1} \dots p_{i_\ell}$

p appartient à $\langle S_i \rangle$.

Deux faces sont disjointes ou confondues d'après l'unicité des coordonnées barycentriques.

b) Soit S_1 et S_2 deux faces de S non disjointes. Il existe $p \in |S_1| \cap |S_2|$

$$p = \Sigma \alpha_i p_i \qquad \Sigma \alpha_i = 1 \qquad \forall_i\ \alpha_i \geqslant 0 .$$

Soient $i_0 ,\dots i_\ell$ les indices tels que $\alpha_{i_j} > 0$.

Alors p appartient au simplexe ouvert engendré par $p_{i_0}, p_{i_1} \dots p_{i_\ell}$, qui est une face de S_1 et de S_2 d'après a).

Soit S_3 le simplexe engendré par les sommets communs à S_1 et S_2 (ensemble non vide car il contient $p_{i_0} \dots p_{i_\ell}$).

. On a $|S_3| \subset |S_1| \cap |S_2|$

. Pour tout $p' \in |S_1| \cap |S_2|$

$p' \in |S_3|$ en l'écrivant comme combinaison convexe des points p_i telles que ses coordonnées barycentriques soient strictement positives, comme ci-dessus pour p.

COMPLEXES SIMPLICIAUX ET ABSTRAITS.

Définition (complexe simplicial) 3.10.

Dans $\mathbb{R}^n$, on appelle complexe simplicial K, une collection de simplexes vérifiant les deux conditions suivantes :

a) Les simplexes ouverts sont disjoints deux à deux.

b) Avec chaque simplexe ouvert, la collection comprend toutes ses faces.

On se restreint dans ce cours aux collections finies de simplexes.

Exemples et notations 3.11.

a) Soit un simplexe S de $\mathbb{R}^n$. $\dot{S}$ définit un complexe simplicial.

b) On note $|K|$ l'espace du complexe simplicial K

$$|K| = \bigcup_{S \in K} |S| = \bigcup_{S \in K} \langle S \rangle .$$

c) Si K_1 et K_2 désigne deux complexes simpliciaux de $\mathbb{R}^n$, $K_1 \cap K_2$ est l'ensemble des simplexes communs, $K_1 \cup K_2$ l'ensemble des simplexes de K_1 ou de K_2 (ne pas confondre avec $|K_1| \cap |K_2|$)

d) On appelle dimension d'un complexe K, le nombre : $\dim K = \sup_{S \in K} \dim S$

Proposition 3.12.

Une collection finie K de simplexes de $\mathbb{R}^n$ définit un complexe simplicial si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) Deux simplexes fermés soit sont disjoints, soit se rencontrent en une face fermée de chacun d'eux.

b) Avec chaque simplexe, K comprend toutes ses faces

Preuve :

La condition b) est identique à celle de la définition d'un complexe simplicial et l'équivalence des conditions a) découle immédiatement de 3.9.

Définition (complexe abstrait) 3.13.

Soit $(v_i)_{i \in I}$ un ensemble d'éléments. Un complexe abstrait A est une collection non vide de parties de cet ensemble vérifiant les deux conditions suivantes :

a) A contient toutes les parties réduites à un élément v_i .

b) Avec chaque Σ , A contient toutes les parties de Σ . Les éléments (v_i) sont appelés sommets de A , les parties Σ , simplexes de A .

Comme pour les complexes simpliciaux, on se restreint aux collections finies de parties, dans ce cours.

Exemples et définitions 3.14.

a) Soit K un complexe simplicial. On lui associe le complexe abstrait $A(K)$ défini comme suit :

- L'ensemble de définition de $A(K)$ est l'ensemble des sommets de K .
- Les éléments de $A(K)$ sont les ensembles de sommets situés sur un même simplexe de K .

b) On appelle dimension d'un complexe abstrait A le nombre

$$\dim A = \sup_{\Sigma \in A} (\operatorname{card} \Sigma) - 1 .$$

c) On appelle isomorphisme de deux complexes abstraits A_1 et A_2 une bijection φ entre les ensembles de définition de A_1 et A_2 telle que pour tout $\Sigma_1 \in A_1$ $\varphi(\Sigma_1) \in A_2$ et $\dim \varphi(\Sigma_1) = \dim \Sigma_1$.

Théorème 3.15.

Soient K_1 et K_2 deux complexes simpliciaux. Si $A(K_1)$ et $A(K_2)$ sont isomorphes, alors K_1 et K_2 sont homéomorphes.

Preuve : Soit φ l'isomorphisme entre $A(K_1)$ et $A(K_2)$. Soit $S_1 \in K_1$.

Si $p_0 \dots p_k$ sont les sommets de S_1, on notera

$$< S_1 > = < p_0 ,\dots, p_k > \quad , \quad |S_1| = |< p_0 ,\dots, p_k >|$$

Soit $f_{S_1} : |S_1| \to |K_2|$ défini par : $f_{S_1}(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \varphi(p_i)$

f_{S_1} est une application injective (car $\dim <\varphi(p_0) ,\dots, \varphi(p_K) > = h$) et continue (car les coordonnées barycentriques sont des fonctions continues). Comme $|S_1|$ est compact, f_{S_1} est un homéomorphisme de S_1 sur son image (qui est un simplexe de K_2).

De plus si S_1 et S_2 sont deux simplexes non disjoints, alors

$$f_{S_1}\Big|_{|S_1| \cap |S_2|} = f_{S_2}\Big|_{|S_1| \cap |S_2|}$$

d'après l'unicité des coordonnées barycentriques.

On peut donc recoller les f_{S_1} en $f : |K_1| \to |K_2|$ continue f est un homéomorphisme car elle est injective, continue et surjective (car φ est un isomorphisme) d'un compact $|K_1|$ dans un compact $|K_2|$.

Lemme 3.16.

Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, il existe une suite (q_i) de points telle que chaque sous-ensemble de cardinal en plus égal à $(n+1)$ soit formé de points affinement indépendants.

<u>Preuve</u> :

Soit $q_o \in \mathbb{R}^n$. On va prouver que par induction qu'on peut construire (q_i) à partir de q_o.

Supposons qu'on ait $q_o, q_1, \dots, q_\ell$ tels que chaque sous-ense de ces points de cardinal au plus égal à $n+1$, soit formé de points affinement indépendants.

Alors il existe $q_{\ell+1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $q_o, q_1, \dots, q_{\ell+1}$ vérifie la même condition, car la réunion (finie) de tous les espaces affines engendrés par au -plus n éléments de $\{q_o, q_1, \dots, q_\ell\}$ ne peut recouvrir $\mathbb{R}^n$ (car chacun d'eux étant de dimension $(n-1)$, est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ comme réunion dénombrable des pavés de mesure nulle).

<u>Théorème 3.17 (réalisation d'un complexe abstrait).</u>

Soit A un complexe abstrait de dimension n. Alors il existe un complexe simplicial K de $\mathbb{R}^{2n+1}$ tel que A soit isomorphe à $A(K)$

<u>Preuve</u> :

Soit $(v_o, v_1, \dots, v_p)$ l'ensemble de définition de A, et (q_i) la suite construite en 3.16 dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Soit $f : A \to \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par : $f(v_i) = q_i$.

A chaque simplexe $\Sigma_J = \{v_i \mid i \in J \subset \{0,1,\dots,p\}\}$ on associe le simplexe

S_J de $\mathbb{R}^{2n+1}$ de sommets $\{f(v_i) | i \in J\}$. Ces points sont affinement indépendants d'après 3.16 car card $\Sigma_J \leqslant n + 1$, donc $\dim S_J = \dim \Sigma_J$.

Soit $K = \{S_J | \Sigma_J \in A\}$.

K est un complexe simplicial, à cause de la similitude des conditions b) de définition des complexes simpliciaux et abstraits et aussi car

$S_{J_1}, S_{J_2} \in K \quad < S_{J_1} > \cap < S_{J_2} > \neq \emptyset$

Il existe $z \in < S_{J_1} > \cap < S_{J_2} >$ $\quad z = \sum_{J_1} \alpha_i q_i = \sum_{J_2} \beta_i q_i$, $\sum_{J_1} \alpha_i = \sum_{J_2} \beta_i =$

et $\alpha_i > 0 \ \forall i \in J_1$, $\beta_i > 0 \ \forall i \in J_2$

card $\{q_i | i \in J_1 \cup J_2\} < 2n + 2$. D'après 3.16 ces points sont affinement indépendants, l'écriture de z est donc unique. C'est-à-dire que $J_1 = J_2$ et $\alpha_i = \beta_i \ \forall i \in J_1 = J_2$

donc $< S_{J_1} > = < S_{J_2} >$

Il est trivial maintenant de vérifier que la bijection f (entre $\{v_o, \ldots, v_p\}$ et $\{q_o, \ldots, q_p\}$) est un isomorphisme de complexes abstraits entre A et A(K) .

Définitions (joint - position générale) 3.18.

a) Soient A et B , deux parties de $\mathbb{R}^n$. Si a, $b \in \mathbb{R}^n$ on note $[ab] = \{(1-t)a + tb \mid t \in I\}$ le segment entre a et b . On appelle joint de A et B la partie de $\mathbb{R}^n$ notée $A * B$ et définie par :

$$A * B = \bigcup_{\substack{a\in A \\ b\in B}} [ab]$$

b) Deux simplexes S_1 et S_2 sont en position générale si $|S_1| \cap |S_2| = \emptyset$ et si la réunion des sommets de S_1 et de S_2 est formée de points affinement indépendants.

Théorème 3.19.

Soient S_1 et S_2 deux simplexes de $\mathbb{R}^n$ en position générale. Alors $|S_1| * |S_2|$ est le simplexe engendré par la réunion des sommets de S_1 et de S_2.

Si (ab) désigne le segment ouvert entre a et b, on a de plus la propriété :

$(ab) \cap (a'b') \neq \emptyset$; $a, a' \in S_1$; $b, b' \in S_2 \Longrightarrow a = a'$, $b = b'$

Preuve : $< S_1 > = < p_o,\ldots,p_k >$; $< S_2 > = < q_o,\ldots,q_\ell >$

. $|< p_o,\ldots,p_k , q_o,\ldots ,q_\rho >| \subset |S_1| * |S_2|$

Soit $p = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i + \sum_{j=0}^{\ell} \beta_j q_j$, $\sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1$

Comme $|S_1| \subset |S_1| * |S_2|$, $|S_2| \subset |S_1| * |S_2|$, il n'y a problème que dans le cas $\sum_i \alpha_i > 0$, $\sum_j \beta_j > 0$.

On a alors

$$p = \left(\sum_i \alpha_i\right) \sum_{i=0}^{k} \frac{\alpha_i}{\sum_i \alpha_i} p_i + \left(\sum_j \beta_j\right) \sum_{j=0}^{\ell} \frac{\beta_j}{\sum_j \beta_j} \varphi_j'$$

comme $\sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1$, $\sum_i \frac{\alpha_i}{\sum_i \alpha_i} p_i \in S_1$,

$\sum_j \frac{\beta_j}{\sum_j \beta_j} q_j \in S_2$, $p \in |S_1| * |S_2|$

. $|S_1| * |S_2| \subset |< p_o ,\ldots, p_k, q_o,\ldots, q_\ell >|$

Soit $p \in |S_1| * |S_2|$ $p = (1-t) \sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i + t \sum_{j=0}^{\ell} \beta_j q_j$

$p = \sum_{i=o}^{k} (1-t)\alpha_i p_i + \sum_{j=o}^{\ell} t\beta_j q_j$, $\sum_i (1-t)\alpha_i + \sum_j t\beta_j = 1 - t + t = 1$

. $a = \sum_{i=o}^{k} \alpha_i p_i$, $a' = \sum_{i=o}^{k} \alpha_i' p_i$, $b = \sum_{j=0}^{\ell}$, $b' = \sum_{j=0}^{\ell} \beta_j' q_j$

si $(a,b) \cap (a',b') \neq \emptyset$, on a l'égalité

$$\lambda \sum_i \alpha_i p_i + (1-\lambda) \sum_j \beta_j q_j = \mu \sum_i \alpha_i' p_i + (1-\mu) \sum_j \beta_j' q_j$$

pour $\lambda \in (0,1)$, $\mu \in (0,1)$

ou $\sum_i \lambda\alpha_i p_i + \sum_j (1-\lambda) \beta_j q_j = \sum_i \mu\alpha_i' p_i + \sum_j (1-\mu)\beta_j' q_j$

avec $\sum_i \lambda\alpha_i + \sum_j (1 - \lambda)\beta_j = \sum_i \mu\alpha'_i + \sum_j (1 - \mu)\beta'_j = 1$

Les points $p_0, \ldots, p_k, q_0, \ldots, q_\rho$ sont affinement indépendants. On a donc d'après 3.4 :

$$\begin{cases} \lambda\alpha_i = \mu\alpha'_i & \forall i \\ (1-\lambda)\beta_j = (1-\mu)\beta'_j & \forall j \end{cases}$$

$$\lambda = \sum_i \lambda\alpha_i = \sum_i \mu\alpha'_i = \mu \ .$$

donc $a = a'$, $b = b'$.

Définitions 3.20.

a) Soit un complexe simplicial K. On appelle sous-complexe L de K, un complexe L dont chaque simplexe est simplexe de K $(L \subset K)$.

b) On appelle squelette de dimension r de K (noté $K^{(r)}$) le sous-complexe de K formé de tous les simplexes de K de dimension au plus égale à r

$$K^{(o)} \subset K^{(1)} \subset \ldots \subset K^{(n)} = K \qquad (\dim K = n)$$

Proposition 3.21.

Soient deux complexes K_1 et K_2 de $\mathbb{R}^n$

(a) $K_1 \cap K_2$ est un complexe.

(b) $K_1 \cup K_2$ est un complexe si, et seulement si

$$|K_1| \cap |K_2| = |K_1 \cap K_2|$$

Preuve : On a toujours $|K_1 \cap K_2| \subset |K_1| \cap |K_2|$

(a) évident

(b) Supposons que $K_1 \cup K_2$ est un complexe.

Soit $p \in |K_1| \cap |K_2|$. Il existe $S_1 \in K_1$, $S_2 \in K_2$ tel que

$$p \in < S_1 > \ , \ p \in < S_2 >$$

$S_1 \in K_1 \cup K_2$, $S_2 \in K_1 \cup K_2$, $< S_1 > \cap < S_2 > \neq \emptyset \implies S_1 = S_2$

donc $p \in |K_1 \cap K_2|$

Réciproquement, supposons : $|K_1 \cap K_2| = |K_1| \cap |K_2|$

la condition 3.10 (b) est évidemment vérifiée (a) l'est car si

$< S_1 > \cap < S_2 > \neq \emptyset$, $S_1 \in K_1$, $S_2 \in K_2$, il existe

$p \in < S_1 > \cap < S_2 >$ $p \in |K_1| \cap |K_2| = |K_1 \cap K_2|$. Il existe

$S_3 \in K_1 \cap K_2$, $p \in < S_3 >$

Comme $S_3 \in K_1$, $S_1 \in K_1$ $p \in < S_1 > \cap < S_3 >$ $S_1 = S_3$

$S_3 \in K_2$; $S_2 \in K_2$ $p \in < S_2 > \cap < S_3 >$ $S_2 = S_3$

$S_1 = S_2$

Rappel (cône) 3.22.

Soit X un compact de $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$. On appelle cône sur X de sommet p le cylindre d'application de la fonction constante : $X \to \{p\}$

$$C(X) = \{(x,t) | \ x \in X \ , t \in I \ , \ (x,1) = (x'1) \quad \forall x, x' \in X\}$$

Théorème 3.23.

Soit un complexe S de dimension k de $\mathbb{R}^n$. On a les propriétés :

(a) $$p * |\mathring{S}| = |S| \qquad \forall p \in \langle S \rangle$$

(b) $C(|\mathring{S}|)$ est homéomorphe à $p * |\mathring{S}|$ où $p \in \langle S \rangle$

(c) S est homéomorphe à D^k

Preuve : $\langle S \rangle = \langle p_0 , \ldots , p_k \rangle$

a). Soit $q \in p * |S|$ $\qquad q = tp + (1-t) \sum\limits_i \alpha_i p_i \quad , \quad \sum\limits_i \alpha_i = 1$

$$p = \sum_i \beta_i \rho_i \quad , \quad \sum_i \beta_i = 1$$

$$q = \sum_i [t\beta_i + (1-t)\alpha_i]\beta_i \quad , \quad \sum t\beta_i + (1-t)\alpha_i = t + 1 - t = 1 .$$

Soit $q \in |S|$. Si $q = p$ $\qquad q \in p * |\mathring{S}|$ $\qquad$ sinon

$|S| \cap \{(1 - t)\, p + tq \mid t \in \mathbb{R}\}$ est convexe comme intersection de deux convexes et compact comme fermé dans le compact $|S|$.

Sur la droite tout convexe compact est un segment, donc selui-ci s'écrit $[u,v]$, $u,v \in |\dot{S}|$.

On a $q \in [u\ p]$ ou $q \in [v\ p]$. Dans les deux cas : $q \in p * |\dot{S}|$

b). Soit $f : C(|\dot{S}|) \to p * |\dot{S}|$ définie par

$$f(x,t) = (1 - t)x + tp$$

. f est bien définie car $f(x,1) = p \quad \forall x \in |S|$

. f est injective : soient $(x,t) = f(x',t')$ tels que $f(x,t) = f(x',t')$

si $t = 1$ $\quad f(x1) = p = f(x',t')$ - donc $t' = 1$ et $(x,1) = (x',1)$

si $t \neq 1$ $\quad x = \sum\limits_i \alpha_i p_i \qquad x' = \sum\limits_i \alpha'_i p_i \qquad p = \sum\limits_i a_i p_i$

avec $\sum\limits_i \alpha_i = \sum\limits_i \alpha'_i = \sum a_i = 1$ et $a_i > 0 \ \forall i$

$x, x' \in |\dot{S}|$; dont il existe k_1 , k_2 tels que $\alpha_{k_1} = 0 \quad \alpha'_{k_2} = 0$

$f(x,t) = (1 - t)\, x + tp = f(x't') = (1 - t')x' + t'p$.

$\sum\limits_i [(1 - t)\alpha_i + ta_i]\, p_i = \sum\limits_i [(1 - t')\alpha'_i + t'a_i] p_i$

d'après a) ce point est un point de $|S|$. L'écriture est unique

$$(1 - t)\alpha_i + ta_i = (1 - t')\alpha'_i + t'a_i \qquad \forall i$$

Pour k_1 $\qquad ta_{k_1} = (1 - t')\alpha'_{k_1} + t'a_{k_1}$

Pour k_2 $\qquad (1 - t)\alpha_{k_2} + ta_{k_2} = t'a_{k_2}$

De la première égalité on déduit $t - t' \geqslant 0$; de la seconde $t - t' \leqslant 0$

donc $t = t'$ et $\alpha_i = \alpha'_i$ $\forall i$

$$(x,t) = (x',t')$$

. f est évidemment continue surjective.

Tout ceci allié à la compacité de $C(|\dot{S}|)$ prouve que f est un homéomorphisme.

<u>Remarque et définition.</u>

Chaque point q de S est donc déterminé par la donnée (x,t) où $x \in |\dot{S}|$, $t \in I$. Le couple (x,t) s'appelle coordonnée polaire du point q .

En pratique on considère presque toujours comme p le barycentre de S , noté $b(S)$ et défini par :

$$b(S) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} p_i$$

c) $\langle S \rangle$ est ouvert dans l'espace affine engendré par $p_0,\dots,p_k$ il existe donc une boule B de centre p incluse dans $< S >$ pour cet espace. Soit E la sphère correspondante.

Chaque point de B est défini par un couple (x,t) où $x \in E$ $t \in I$.

Soit g l'homéomorphisme qui au point $x \in E$ associe sa première coordonnée polaire dans S.

Par composition d'homéomorphismes, on obtient l'homéomorphisme

$$\varphi : B \to S$$
$$\varphi(x,t) = f(g(x),t)$$

<u>SUBDIVISION</u>.

<u>Définition 3.24</u>.

On appelle subdivision d'un complexe K, un complexe K' qui vérifie les deux conditions :

a) $|K'| = |K|$

b) A tout simplexe S' de K', il correspond un simplexe S de K tel que : $< S' > \subset < S >$

<u>Remarque</u> : Les sommets de K sont sommets de K'.

<u>Exemple</u> : Soit un simplexe S K' une subdivision du complexe S et $p \in < S >$.

Notons $p * K'$ le complexe dont les simplexes sont les suivants :

$< q_1,\ldots,q_\ell >$ et $<p,q_1,\ldots,q_\ell>$ pour chaque simplexe $<q_1,\ldots,q_\ell>$ de K'.

Définition (subdivision induite) 3.25.

Soit un complexe K , un sous-complexe L de K et une subdivision K' de K .

On appelle subdivision induite sur L par K' , la subdivision L' de L définie par :

$$L' = K'|L = \{S' \in K' \mid \exists\, S \in L \quad \langle S' \rangle \subset \langle S \rangle\}$$

Lemme 3.26.

Soient trois complexes simpliciaux K, K_1 , K_2 vérifiant la condition $K = K_1 \cup K_2$. Si K_1' , K_2' désignent des subdivisions, respectivement, de K_1 et K_2 , alors $K_1' \cup K_2'$ est une subdivision de K si et seulement si :

$$K_1' |\; K_1 \cap K_2 = K_2' | K_1 \cap K_2$$

Preuve :

$\Longrightarrow$ Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ il n'y a pas de condition, sinon soit $S_1' \in K_1' \mid K_1 \cap K_2$ et $p \in \langle S_1' \rangle$. Comme K_2' est une subdivision de K_2, il existe $S_2' \in K_2'$ tel que $p \in \langle S_2' \rangle$

Comme $K_1' \cup K_2'$ est une subdivision de K

$$\langle S_1' \rangle \cap \langle S_2' \rangle \neq \emptyset \quad , \quad S_1' , S_2' \in K_1' \cup K_2' \Longrightarrow S_1' = S_2'$$

$\Longleftarrow$ Supposons $K_1'|K_1 \cap K_2 = K_2' \mid K_1 \cap K_2$ et montrons que $K_1' \cup K_2' = K'$

est un complexe. Pour cela il suffit de voir qu'un simplexe de K'_1 et un simplexe de K'_2 sont disjoints ou confondus.

Soit $S'_1 \in K'_1$, $S'_2 \in K'_2$ $\langle S'_1 \rangle \cap \langle S'_2 \rangle \neq \emptyset$

Il existe $S_1 \in K_1$, $S_2 \in K_2$ tels que $\langle S'_1 \rangle \subset \langle S_1 \rangle$, $\langle S'_2 \rangle \subset \langle S_2 \rangle$

Comme K est un complexe : $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle \neq \emptyset \Longrightarrow S_1 = S_2 = S$.

On a donc $S'_1 \subset S$, $S'_2 \subset S$ pour $S \in K_1 \cap K_2$, c'est-à-dire : $S'_1 \in K'_1|K_1 \cap K_2$, $S'_2 \in K'_2|K_1 \cap K_2$, $\langle S'_1 \rangle \cap \langle S'_2 \rangle \neq \emptyset$ donc $S_1 = S_2$.

Le complexe K' est une subdivision de K car il vérifie les conditions :

a) $|K'| = |K'_1 \cup K'_2| = |K'_1| \cup |K'_2| = |K_1 \cup K_2| = |K|$.

b) Soit $S' \in K'$, $S' \in K'_1$ par exemple. Il existe $S \in K_1$ (donc $S \in K$) tel que $\langle S' \rangle \subset \langle S \rangle$.

<u>Théorème et définition 3.27.</u>

Il existe une unique subdivision d'un complexe K notée sdK vérifiant les deux conditions :

a) Pour tous sous-complexe L de K , $sdL = sdK \mid L$

b) Pour tout simplexe S de K , $sdS = b(S) * sd\,\dot{S}$

Cette subdivision est appelée subdivision barycentrique de K .

<u>Preuve</u> :

1) Unicité : Supposons qu'il existe deux subdivisions sd_1 et sd_2

satisfaisant à a) et b) . On va prouver par induction sur la dimension que pour tout simplexe S $sd_1(S) = sd_2(S)$ dim $S = 0$. Les deux subdivisions coïncident dim $S > 0$. Supposons que pour tout simplexe de dimension au plus égale à $(n - 1)$ les deux subdivisions coïncident. Soit $s \in K$, dim $S = n$. Comme $\dot{S}$ est réunion de simplexes de dimension au plus égale à $(n - 1)$, la condition b) affirme que $sd_1 S = sd_2 S$

2) Existence : Il suffit de construire la suite des squelettes

$$K^{(0)} \subset K^{(1)} \subset \dots \subset K$$

$sdK^{(0)} = sdK|K^{(0)}$ est bien définie puisque $K^{(0)}$ ne possède qu'une subdivision : lui-même.

Supposons $sdK^{(p)}$ définie. Pour chaque simplexe S de dimension $(p + 1)$ la condition b) permet de définir sdS à partir de $dsK^{(p)}$. La réunion de $sdK^{(p)}$ et des sdS pour tous les simplexes S de dimension $(p + 1)$ est une subdivision d'après 3.26 qui vérifie a) et b) jusqu'à la dimension $(p + 1)$.

Cette réunion est donc $sdK^{(p+1)}$ et l'existence est prouvée par induction.

Théorème 3.28.

Soit un complexe simplicial K , et $S_1, \dots, S_k$ des simplexes de K . Alors $\{b(S_1), \dots, b(S_k)\}$ est l'ensemble des sommets d'un simplexe de la subdivision barycentrique de K si et seulement si $\{S_1, \dots, S_k\}$ forme un ensemble totalement ordonné (pour la relation : $S_1 < S_2 \Longleftrightarrow S_1$ est une face de S_2) .

<u>Preuve</u> :

1) Supposons $S_1 \leqslant S_2 \leqslant \dots \leqslant S_k$

$b(S_1)$ est un simplexe de sdK . Supposons que $\{b(S_1),\dots,b(S_i)\}$ soit l'ensemble des sommets d'un simplexe de sdK . D'après la condition b) de définition de sdK , $\{b(S_1),\dots, b(S_{i+1})\}$ est l'ensemble des sommets d'un simplexe de sdK .

2) La réciproque est évidente puisqu'on sait que tout simplexe de sdK est de la forme $b(S) * s$ où $S \in K$, $s \in sdS$.

<u>Définition (maille d'un complexe) 3.29.</u>

a) On appelle diamètre d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\| \ \|$ le nombre : $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,y \in A} \|x - y\|$

b) On appelle maille d'un complexe simplicial K de $\mathbb{R}^n$, $\| \ \|$ désignant la norme de $\mathbb{R}^n$, le nombre :

$$\text{maille } K = \sup_{S \in K} \operatorname{diam} |S|$$

<u>Lemme 3.30.</u>

Soit C un compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Le nombre diam C est atteint par $\|x - y\|$ pour un couple (x,y) de points extrèmes de C .

Remarque :

Pour un simplexe S , diam $|S|$ est atteint par $\| p_i - p_j \|$ où p_i , p_j désignent deux sommets du simplexe.

Preuve : Il existe une suite $\{(x_n , y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\| x_n - y_n \| \xrightarrow[n \to \infty]{} \text{diam } C$$

De la suite x_n on peut extraire une sous-suite $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergente et de la suite $(y_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$, on peut extraire la sous-suite $(j_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ convergente

$$x_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} x \quad , \quad y_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} y \quad , \ x \in C \quad , \quad y \in C$$

donc $\| x_\nu - y_\nu \| \to \| x - y \| = \text{diam } C$

Théorème 3.31.

Soit K un complexe simplicial de dimension m dans $\mathbb{R}^n$. On a la relation : maille $(\text{sd}K) \leqslant \frac{m}{m+1}$ maille K

Preuve : D'après 3.30 , si $S \in K$, $\langle S \rangle = \langle p_0, \dots, p_k \rangle$

$$\text{diam } |S| = \sup_{i < j \leqslant k} \| p_i - p_j \|$$

On aura donc majoré le diamètre d'un simplexe Σ de sdK en majorant la distance entre deux de ses sommets. Or d'après 3.28 deux tels sommets sont de la forme $b(S_1)$ et $b(S_2)$ avec $S_1 \leqslant S_2$.

Posons $\langle S_1 \rangle = \langle p_0, \ldots, p_k \rangle$; $\langle S_2 \rangle = \langle p_0, \ldots, p_k, \ldots, p_\ell \rangle$

$$\| b(S_1) - b(S_2) \| < \sup_{i \leqslant k} \| p_i - b(S_2) \|$$

or $\| p_i - b(S_2) \| = \| p_i - \frac{1}{\ell+1} \sum_{j=0}^{\ell} p_j \| \sum_{j=0}^{\ell} (p_i - p_j) \|$

$$\leqslant \frac{1}{\ell+1} \sum_{j=0}^{\ell} \| p_i - p_j \| < \frac{\ell}{\ell+1} \operatorname{diam}|S_2| \leqslant \frac{m}{m+1} \operatorname{diam}|S_2|$$

donc $\operatorname{diam}|\Sigma| \leqslant \frac{n}{n+1}$ maille K

Comme le second membre ne dépend pas de Σ, on a le résultat cherché :

$$\sup_{\Sigma \in sdK} \operatorname{diam} |\Sigma| < \frac{n}{n+1} \text{ maille } K$$

Corollaire 3.32.

Soit un complexe simplicial K et définissons la subdivision barycentrique itérée par les relations

$$\begin{cases} sd^1 K = sdK \\ sd^p k = sd\ (sd^{p-1} K) \end{cases}$$

On a : maille $(sd^p K) \leqslant (\frac{m}{m+1})^p$ maille K

Remarque : la maille de la subdivision barycentrique itérée décroit vers 0 .

APPLICATION SIMPLICIALE.

Définition (étoile) 3.33.

Soit un complexe simplicial K et S un simplexe de K. On appelle étoile de S le sous-ensemble de K défini par

$$\text{et}(S) = \cup\{ < S' > \in K | \; S \leqslant S' \}$$

Cas particulier : Soit p un sommet de K.

$$\text{et } p = \cup\{ < S' > \in K | \; p \text{ est sommet de } S' \}$$

Proposition 3.34.

Soit un complexe simplicial K, et $\{p_0, \ldots, p_k\}$ un ensemble de sommets de K

Les deux propriétés suivantes sont ésuivalentes :

a) $p_0, \ldots, p_k$ sont les sommets d'un simplexe de K

b) $\bigcap\limits_{i=0}^{k}$ et $(p_i) \neq \emptyset$

Preuve :

a $\Longrightarrow$ b . Soit S le simplexe de sommets $p_0, \ldots, p_k$

$$< S > \subset \bigcap_{i=0}^{k} \text{ et } (p_i)$$

b $\Longrightarrow$ a $\quad \bigcap\limits_{i=0}^{k}$ et $p_i = \cup\{< S > \in K | \; p_0, \ldots, p_K$ sont sommets de $S\}$.

Cet ensemble n'étant pas vide comprend au moins un $< S > \in K$ donc

$< p_0,\dots,p_k > \in K$ comme face de S .

Définition (nerf 3.35).

Soit un espace topologique X et $U = (U_1, U_2,\dots,U_n)$ un recouvrement fini de X par des ouverts non vides. On appelle nerf de U le complexe abstrait $N(U)$ dont les sommets sont les U_i et les simplexex les ensembles $\{U_{i_1},\dots, U_{i_k}\}$ tels que $\bigcap_{j=1}^{k} U_{i_j} \neq \emptyset$.

Proposition 3.36.

Soit un complexe simplicial K et le recouvrement $U = \{$ et $(p) \mid p$ est sommets de $K\}$.

Alors $N(U)$ est isomorphe à $A(K)$.

Preuve : Soit φ la bijection entre les sommets de $N(U)$ et $A(K)$ définie par $\varphi(etp) = p$.

C'est un isomorphisme de complexes abstraits d'après 3.34.

Définition (application simpliciale) 3.37.

Soient K_1 et K_2 deux complexes (abstraits ou simpliciaux) et une application φ définie entre les sommets des deux complexes. Alors φ est appelée application simpliciale de K_1 dans K_2 si pour tout simplexe (ou ensemble des sommets d'un simplexe) $\{p_0,\dots,p_k\}$, $\varphi(p_o),\dots, \varphi(p_k)$ sont les sommets d'un simplexe de K_2 .

Remarque :

Si K_1 et K_2 sont deux complexes simpliciaux, on prolonge φ par linéarité de $|K_1|$ dans $|K_2|$

$$x = \Sigma\, \alpha_i p_i \qquad \varphi(x) = \Sigma\, \alpha_i \varphi(p_i)$$

Cette application est continue car les coordonnées barycentriques sont des fonctions continues.

Définition (approximation simpliciale) 3.38.

Soient deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 et une application continue $f : |K_1| \to |K_2|$

Une application $\varphi : K_1 \to K_2$ est appelée approximation simpliciale de f, si φ est une application simpliciale vérifiant la condition :

$$\forall x \in |K_1| \quad f(x) \in < S_2 > \text{ (simplexe de } K_2) \Longrightarrow \varphi(x) \in |S_2|$$

Remarques :

a) La condition est équivalente à : $\forall x \in |K_1| \quad f(x) \in |S_2| \Longrightarrow \varphi(x) \in |S_2|$.

b) Si p est sommet de K_1 et si $f(p)$ est sommet de K_2 , on a nécessairement :

$$f(p) = \varphi(p)$$

Théorème 3.39.

Soient K_1 , K_2 deux complexes simpliciaux et L un sous-complexe de K_1 . Soient aussi une application continue $f : |K_1| \to |K_2|$ telle que $f|L : L \to K_2$ soit une application simpliciale, et φ une appromation simpliciale de f

Alors $f \simeq \varphi$ rel L

$$\text{et} \quad d(f,\varphi) = \sup_{x\in|K_1|} \|f(x) - \varphi(x)\| \leqslant \text{maille } K_2$$

Preuve :

On a $f|L = \varphi|L$ d'après 3.38 b).

Soit l'homotopie $F : |K_1| \times I \to |K_2|$ définie par

$$F(x,t) = (1 - t)\, f(x) + t\varphi(x)$$

qui est bien définie et continue car pour tout x de $|K_1|$ $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont dans un même simplexe fermé de K_2 et car f et φ dont deux applications continues

$$F : f \simeq \varphi \text{ rel } L$$

Théorème 3.40.

Soient deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 , une application continue $f : |K_1| \to |K_2|$ et une application simpliciale $\varphi : K_1 \to K_2$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) φ est approximation simpliciale de f .

b) Pour tout sommet p de K_1 $f(\text{et } p) \subset \text{et } \varphi(p)$

Preuve :

$a \Longrightarrow b$. Soit un sommet p de K_1 et $x \in \text{et}\ p$; il existe $S_1 \in K_1$ $S_2 \in K_2$ tels que : $x \in \langle S_1 \rangle$, $f(x) \in \langle S_2 \rangle$. $\varphi(\langle S_1 \rangle)$ est un simplexe ouvert de K_2 . Comme φ est approximation simpliciale de f on a : $\varphi(x) \in \varphi(\langle S_1 \rangle)$ et $\varphi(x) \in |S_2|$. Comme $|S_2|$ est réunion disjointe de ses faces ouvertes, on a $\varphi(x) \in \langle S_3 \rangle$, $S_3 \leqslant S_2$

$$\varphi(x) \in \varphi(\langle S_1 \rangle) \text{ et } \varphi(x) \in \langle S_3 \rangle \Longrightarrow \varphi(\langle S_1 \rangle) = \langle S_3 \rangle \leqslant \langle S_2 \rangle$$

Mais p est sommet de S_1 , donc $\varphi(p)$ est sommet de $\varphi(S_1) \leqslant S_2$ $\varphi(p)$ est sommet de S_2 et $f(x) \in \text{et}\ \varphi(p)$

$b \Longrightarrow a$. Soit $x \in |K_1|$. Il existe $S_1 \in K_1$ tel que $x \in \langle S_1 \rangle$ Soit $\langle S_1 \rangle = \langle p_0,\ldots,p_k \rangle$

$x \in \text{et}\ p_i$ pour $i = 0,1,\ldots,k$

$$f(x) \in f(\bigcap_{i=0}^{k} \text{et}\ p_i) \subset \bigcap_{i=0}^{k} f(\text{et}\,p_i) \subset \bigcap_{i=0}^{k} \text{et}\ \varphi(p_i)$$

c'est dire que $f(x) \in \langle S_2 \rangle$ tel que $\varphi(p_0),\ldots,\varphi(p_k)$ sont sommets de S_2

$$\varphi(x) \in \varphi(\langle p_0,\ldots,p_k \rangle) \qquad \text{donc} \qquad \varphi(x) \in |S_2|$$

Corollaire 3.41.

Soient trois complexes simpliciaux K_1 , K_2 , K_3 et deux applications continues $f : |K_1| \to |K_2|$, $g : |K_2| \to |K_3|$

Soient aussi $\varphi : K_1 \to K_2$ approximation simpliciale de f et $\psi : K_2 \to K_3$ une approximation simpliciale de g.

Alors $\psi \circ \varphi$ est une approximation simpliciale de $g \circ f$.

Preuve :

$\psi \circ \varphi$ est évidemment une application simpliciale et

$g \circ f(\text{et } p) \subset g(\text{et } \varphi(p)) \subset \text{et } \psi \circ \varphi(p)$ pour tout sommet p de K_1 .

Corollaire 3.42.

Soient deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 , f une application continue : $|K_1| \to |K_2|$ et $\varphi : K_1 \to K_2$ une application entre sommets de K_1 et K_2 (non nécessairement simpliciale). Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) φ est approximation simpliciale de f .

b) Pour tout sommet p de K_1 , $f(\text{et } p) \subset \text{et } \varphi(p)$

Preuve :

Seule b $\Longrightarrow$ a est nouvelle

Soit $\langle S \rangle = \langle p_0, \ldots, p_k \rangle$ un simplexe de K_1 .

D'après 3.34 $\bigcap\limits_{i=0}^{k}$ et $p_i \neq \emptyset$

$$\emptyset \neq f \bigcap_{i=0}^{k} (\text{et } p_i) \subset \bigcap_{i=0}^{k} f(\text{et } p_i) \subset \bigcap_{i=0}^{k} \text{ et } \varphi(p_i) .$$

A nouveau d'après 3.34, $\varphi(p_0), \ldots, \varphi(p_k)$ sont les sommets d'un simplexe de K_2 , donc φ est simpliciale.

Théorème 3.43.

Soient deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 et une application continue $f : |K_1| \to |K_2|$.

Alors il existe une subdivision K_1' de K_1 et une application $\varphi : K_1' \to K_2$ qui est une approximation simpliciale de f .

Preuve : nous démontrerons d'abord :

1) Lemme :

Soit un compact C muni de la métrique d .

Si pour $A \subset C$ on définit $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,y \in A} d(x,y)$

Alors à chaque recouvrement $U = \{U_i\}_{i \in I}$, il correspond $\lambda > 0$ (nombre de Lebesgue) tel que :

$$\forall A \subset C \quad \operatorname{diam} A < \lambda \Longrightarrow \exists i \in I : A \subset U_i$$

Preuve du lemme :

Supposons que ce soit faux.

$$\forall n \quad \exists A_n \subset C \quad \operatorname{diam} A_n < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \forall i \quad A_n \not\subset U_i \quad .$$

Alors il existe des boules $B(x_n, r_n) \supset A_n$ et $r_n \leqslant \frac{1}{2n}$.

Comme C est compact, de la suite (x_n) on extrait (x_{n_j}) convergente dans C vers x .

$x \in C$. Donc il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$ et $r > o$ tel que $B(x,r) \subset U_i$.

Il existe J tel que pour $j > J$ $d(x,x_{n_y}) < \frac{r}{2}$ et $r_{n_j} < \frac{r}{2}$.

Donc pour $j > J$ $A_{n_j} \subset B(x_{n_j}, r_{n_j}) \subset U_i$

Ce qui est contraire à l'hypothèse.

2) Soit le recouvrement ouvert de $|K_1|$, $U = \{f^{-1}(\text{et } q) | q$ est sommet de $K_2\}$. D'après le lemme il existe un nombre de Lebesgue λ car $|K_1|$ est métrique compact.

Soit une subdivision K_1' de K_1 telle que : maille $(K_1') < \frac{\lambda}{2}$ (ce qui existe d'après 3.32).

Soit p un sommet de K_1' : diam (et p) $< \lambda$. Donc il existe un sommet q de K_2 tel que : et $p \subset f^{-1}(\text{et } q)$.

Définissons φ comme l'application qui à chaque sommet p de K_1' associe un sommet q de K_2 tel que et $p \subset f^{-1}(\text{et } q)$ (il est possible de choisir q car il existe un nombre fini non nul de tels sommets pour chaque p). $\varphi : K_1' \to K_2$.

D'après 3.42 φ est approximation simpliciale de f.

Remarque :

On aurait pu dire dans l'énoncé du théorème.

Alors il existe N tel que pour $n > N$ il existe une approximation simpliciale $\varphi_n : sd^n K_1 \to K_2$, de f.

Corollaire 3.44.

Soient deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 et une application continue $f : |K_1| \to |K_2|$.

Pour tout $\varepsilon > o$, il existe des subdivisions K'_1 de K_1 et K'_2 de K_2 et $\varphi : K'_1 \to K'_2$ une approximation simpliciale de f tels que :

$$d(f\varphi) < \varepsilon$$

Preuve :

$$d(f,\varphi) = \sup_{x\in|K_1|} \|f(x) - \varphi(x)\| \leqslant \text{maille}\ (K_2)$$

Application 3.45.

Soit un complexe simplicial K de dimension $k < n$ et une application continue $f : |K| \to S^n$.

Alors f est homotope à une constante.

Preuve :

Soit un simplexe S de dimension n - S^n est homéomorphe à $|\dot{S}|$.

En composant avec cet homéomorphisme, on a $f' : |K| \to |\dot{S}|$ continue.

Il existe donc une approximation simpliciale $\varphi : K' \to \dot{S}$, de f' ou K' est une subdivision de K .

D'après 3.39 $f' \simeq \varphi$

$\varphi(|K'|)$ est compris dans le squelette de dimension k de S qui n'est pas S . Il existe donc $x_o \in |S| - \varphi(|K'|)$

$|\dot{S}| - \{x_o\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (car S^n est le complété de $\mathbb{R}^n$) .

En composant avec cet homéomorphisme , on obtient $\varphi' : |K'| \to \mathbb{R}^n$ et comme $\mathbb{R}^n$ est contractile $\varphi' \simeq C_{y_o}$

Par composition d'homéomorphismes et d'homotopies, on a

$$f \simeq C^{te}$$

Remarque : S^n est $(n-1)$ connexe.

Car $f : S^m \to S^n$, $m < n$ est homotope à une constante, donc s'étend à D^{m+1} .

CONTIGUITE - EQUIVALENCE.

Définition (contiguité) 3.46.

a) Soient deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 , et deux applications simpliciales φ et $\varphi' : K_1 \to K_2$.

φ et φ' sont dites contigues si pour tout simplexe S de K_1 $\varphi(S) \cup \varphi'(S)$ est un simplexe de K_2 .

Propriétés.

C'est une relation symétrique et reflexive.

b) On définit une relation d'équivalence (car transitive) entre φ et φ' simpliciales : $K_1 \to K_2$ par :

$\varphi \sim \varphi'$ s'il existe $\varphi_o = \varphi$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi'$ telles que φ_{i-1} et φ_i soient contigues pour $i = 1,2,\dots,n$.

c) Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées classes de contiguité.

Lemme 3.47.

Soient deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 et une application continue $f : |K_1| \to |K_2|$.

Alors deux approximations simpliciales φ , $\varphi' : K_1 \to K_2$ de f sont contigues.

Preuve : soit $s \in K_1$ $\langle S \rangle = \langle p_o, \dots, p_k \rangle$

D'après 3.34 $\bigcap\limits_{i=o}^{k}$ et $p_i \neq \emptyset$

Donc $\emptyset \neq f(\bigcap \text{et } p_i) \subset \bigcap f(\text{et } p_i) \subset$ (et $\varphi(p_i) \cap$ et $\varphi'(p_i)$)

car φ et φ' étant approximations simpliciales de f

$$f(\text{et } p_i) \subset \text{ et } \varphi(p_i) \cap \text{ et } \varphi'(p_i) \quad .$$

A nouveau d'après 3.34 $\{\varphi(p_o), \dots, \varphi(p_k), \ \varphi'(p_o), \dots, \varphi'(p_k)\}$ est l'ensemble des sommets d'un simplexe de K_2 .

Théorème 3.48.

Soient deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 et $f, f' : |K_1| \to |K_2|$ deux applications continues homotopes.

Alors il existe N tel que f et f' aient des approximations simpliciales φ et $\varphi' : sd^N K_1 \to K_2$ dans la même classe de contiguité.

Preuve : $F : f \simeq f'$ $F : |K_1| \times I \to |K_2|$

1) $\{F_\alpha^{-1}(\text{et } p) |$ p sommet de $K_2\}$ où $F_\alpha(t) = F(\alpha t)$, $F_t(\alpha) = F(\alpha t)$ est un recouvrement ouvert de I compact. Il existe donc un nombre de

Lebesgue λ_α tel que :

$\forall t, t' \in J \; |t - t'| < \lambda_\alpha \Longrightarrow F_\alpha(t)$ et $F_\alpha(t') \in$ et p_α (p_α sommet de K_2).

Soit $V_\alpha = \{\alpha' \in |K_1| / \forall t, t' \in I, \; |t - t'| < \lambda_\alpha \quad F(\alpha' t)$ et $F(\alpha' t') \in$ et$p\}$

V_α est ouvert car $\quad V_\alpha = \bigcup_{\substack{t, t \in I \\ |t-t'| < \lambda_\alpha}} F_t^{-1}(\text{et } p_\alpha) \cap F_{t'}^{-1}$ et p_α

$\{V_\alpha | \; \alpha \in |K_1|\}$ est un recouvrement de $|K_1|$ compact. On en peut extraire un sous-recouvrement fini $V_{\alpha_1} \ldots V_{\alpha_k}$.

Soit $\lambda = \inf\limits_{o < i \leqslant k} \lambda_{\alpha_i}$, et $o = t_o < t_1 < \ldots < t_n = 1$ telle que

$(t_i - t_{i-1}) < \lambda$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$

Alors pour tout $\alpha \in |K_1|$ et $i < 1, 2, \ldots, n$, il existe un sommet p de K_2 tel que $F(\alpha, t_{i-1})$ et $F(\alpha, t_i) \in$ et p.

2) Posons $\quad f_i : |K_1| \to |K_2| \cap \; f_i(\alpha) = F(\alpha, t_i)$

$f = f_o \quad , \quad f_n = f'$.

Soit $U_i = \{f_i^{-1}$ (et $p_2) \cap f_{i-1}^{-1}$ (et p) $|$ p_2 sommet de $K_2\}$

$U = \{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de $|K_1|$ compact. Il lui correspond un nombre de Lebesgue μ.

Soit N tel que maille $Sd^N K_1 < \frac{\mu}{2}$. Alors pour tout sommet p de K_1

diam et $p < \mu$. Donc il existe i_p tel que et $p \in U_i$ (On dit alors que $sd^N K_1$ est plus fin que U).

On peut définir $\varphi_i : sd^N K_1 \to K_2$ application entre sommets telle que pour $p \in K_1$, $(et(p) \in U_{i_p})$ $\varphi_i(p)$ est le sommet dd K_2 intervenant dans U_{i_p}

Alors $f_i(\text{et } p) \cup f_{i-1}(\text{et } p) \subset \text{et } \varphi_i(p)$ pour tout sommet p de K_1 .

3) Ceci montre que φ_i est approximation simpliciale de φ_i et φ_{i-1} . Donc φ_i et φ_{i+1} sont approximations simpliciales de f_i . D'après 3.47 elles sont contigues et $\varphi_1 \sim \varphi_N$ (qui sont approximations simpliciales de $f = f_o$ et $f' = f_N$) .

Définitions (équivalence) 3.49.

a) Soit K un complexe simplicial. Un chemin d'arête ξ est une suite finie (non vide) $e_1 e_2 \ldots e_r$, où e_i est une arête de K $e_i = (p_i\ p_{i+1})$ p_i et p_{i+1} sommets d'un même simplexe (Il existe un seul chemin de p_i à p_{i+1} dans $|\langle p_i , p_{i+1}\rangle|$ à une homotopie près. On note ce chemin $(\overrightarrow{p_i , p_{i+1}}))$.

b) Deux chemins d'arête ξ et ξ' sont dits simplement équivalents s'il existe des sommets p, p', p'' de K tels que le couple non ordonné (ξ, ξ') ait une des formes suivantes :

- $((pp''), (pp')(p'p''))$
- $(\xi_1(pp'') , \xi_1(pp')(p'p''))$
- $((pp'')\xi_2 , (pp')(p'p'')\xi_2)$
- $(\xi_1(pp'')\xi_2 , \xi_1(pp')(p'p'')\xi_2)$.

Où ξ_1 et ξ_2 désignent des chemins d'arêtes l'un finissant en p l'autre commençant en p" .

c) Deux chemins d'arête ξ et ξ' sont dits équivalents s'il existe $\xi_o = \xi, \xi_1, \dots, \xi_n = \xi'$ tous chemins d'arête tels que ξ_{i-1} et ξ_i soient simplement équivalents pour $i = 1,2,\dots,n$.

<u>Remarque</u> : C'est bien une relation d'équivalence, notée $\sim$

d) Soit un chemin d'arête $\xi = e_1 e_2 \dots e_r$. Soit I_r le complexe simplicial $I_r = \{\{\frac{i}{r}\} \; i = 0,1,\dots,r\} \cup \{[\frac{i-r}{r}, \frac{i}{r}] \; i = 1,2,\dots,r\}$.

On associe a ξ l'application simpliciale φ_ξ définie par :

$$\varphi_\xi(\frac{i}{r}) = \begin{cases} \text{origine } e_{i+1} & i = 0,1,\dots,(r-1) \\ \text{fin } e_i & i = 1,2,\dots,r \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Si $\xi \sim \xi'$ $\quad \varphi_\xi \simeq \varphi_{\xi'}$ rel ∂I

<u>Lemme 3.50.</u> Soit un complexe simplicial K et $S \in K$.

Deux chemins d'arête de même origine et même extrémité, dans S , sont équivalents.

<u>Preuve</u> : Il suffit de montrer que ξ chemin d'arête dans S tel que origine $\xi = p$, fin $\xi = q$ vérifie $\xi \sim (pq)$.

On le montre facilement par induction sur le nombre d'arêtes de ξ .

<u>Théorème 3.51.</u>

Soient ξ et ξ' deux chemins d'arêtes, à r arêtes dans le complexe simplicial K.

Si φ_ξ, $\varphi_{\xi'} : I_r \to K$ sont contigues, alors $\xi \sim \xi'$.

Preuve :

$$\xi = e_1 e_2 \dots e_r \quad , \quad e_i = (p_{i-1}, p_i) \; ; \; \xi' = e'_1 e'_2 \dots e'_r \quad , \quad e'_i = (p'_{i-1}, p'_i) .$$

Posons $\overline{e}_i = (p_i p'_i)$. C'est une arête car φ_ξ et $\varphi_{\xi'}$ sont contigues et car $p_i = \varphi_\xi(\frac{i}{r})$, $p'_i = \varphi_{\xi'}(\frac{i}{r})$

Par définition : $\xi \sim e_1 \overline{e}_1 \overline{\overline{e}}_1 e_2 \overline{e}_2 \dots \overline{e}_{r-1}^{-1} e_r$.

Comme φ_ξ et $\varphi_{\xi'}$ sont contigues, il existe $S_i \in K$ tel que $e_i e'_i \overline{e}_{i-1}$ soient arêtes de S_i (car $e_i = \varphi_\xi([\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r}])$, $e'_i = \varphi_{\xi'}([\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r}])$). D'après 3.50 $e_1 \overline{e}_1 \sim e'_1$ et $\overline{e}_{i-1}^{-1} e_i \; e_i \sim e'_i$ $i = 2, 3, \dots, (r-1)$ et $\overline{e}_{r-1}^{-1} e_r \sim e'_r$

$$\xi \sim e_1 \overline{e}_1 \overline{e}_1^{-1} e_r \dots \overline{e}_{r-1}^{-1} er \sim \xi'$$

Théorème 3.52.

Soit $\xi = e_1 e_2 \dots e_r$ un chemin d'arête dans le complexe simplicial K, et soit $\lambda : I_{2r} \to I_2$ une approximation simpliciale de l'identité $|I_{2r}| \subset |I_r|$.

Alors il existe un chemin d'arête $\xi' = e'_1 e'_2 \dots e'_{2r}$ tel que $\varphi_\xi \lambda = \varphi_{\xi'} : I_{2r} \to K$ et $\xi \sim \xi'$.

Preuve :

1) Existence de λ :

Le 2) de la preuve de 3.43 ou (3.48) montre que $f : |K_1| \to |K_2|$ admet une approximation simpliciale $\varphi : K_1 \to K_2$ si et seulement si K_1 est plus fin que $\{f^{-1}(\text{et } p) \mid p$ est sommet de $K_2\}$.

On en déduit : (à l'aide de 3.42).

<u>Lemme.</u> Soit K' une subdivision de K . Une application entre sommets $\varphi : K' \to K$ est une approximation simpliciale de l'identité $|K'| \subset |K|$ si et seulement si : $p' \in$ et $\varphi(p')$ pour tout sommet p' de K' .

En particulier, ce lemme affirme l'existence d'approximations simpliciales de l'identité : $K' \to K$ pour toute subdivision K' de K .

2) Définition de ξ'

Soit $e_i = (p_{i-1}, p_i)$ $i = 0,1,\ldots,r$

Posons $e'_{2i-1}\, e'_{2i} = (p_{i-1}, \bar{p}_i)\,(\bar{p}_i, p_i)$ où $\bar{p}_i$ vaut soit p_{i-1}, soit p_i .(cette valeur est définie par λ) .

D'après 3.50 $e_{2i-1}\, e'_{2i} \sim e_i$ et $\xi \sim \xi'$

Le contenu de ce paragraphe sert à démontrer 3.59.

<u>GRAPHES.</u>

<u>Définitions 3.53.</u>

a) Un espace topologique X est un polyèdre, s'il existe un complexe simplicial K et un homéomorphisme $f : |K| \to X$ (K,f) est alors appelé triangulation de X .

b) On appelle graphe un complexe simplicial de dimension 1.

c) On appelle arbre un graphe simplement connexe.

Théorème 3.54.

Soit K un graphe connexe . On a équivalence des propriétés.

a) K est un arbre.

b) $|K|$ est contractile.

Remarque : Le livre de Spanier donne ce résultat sur des graphes infinis. Il est faux car on va définir F sur $|S| \times I$ pour chaque simplexe $S \in K$. On ne pourra affirmer que ces applications se recollent sur $|K| \times I$ en une application continue que si les simplexes sont en nombre fini. (comme contre exemple on pourra prendre le double peigne qui est un arbre non contractile).

Preuve : Il suffit de montrer $a \Longrightarrow b$.

Soit p un sommet de K . Pour chaque sommet q de K , soit α_q un chemin de p à q : $\alpha_q(o) = p$, $\alpha_q(1) = q$.

Posons $F(q,t) = \alpha_q(t)$.

Soit $S \in K$ un simplexe de dimension 1, $\langle S \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle$. On définit $F(x,o) = p$ $x \in S$

$$F(q_1,t) = \alpha_{q_1}(t) \quad ; \quad F(q_2,t) = \alpha_{q_2}(t) \quad ; \quad F(x,1) = x \quad .$$

F est défini sur $|S| \times 0 \cup |S| \times 1 \cup |\dot{S}| \times I$ homéomorphe à S^1 .

Comme K est simplement connexe, F s'étend de façon continue à $|S| \times I$ (homéomorphe à D^2) .

Pour $S \in K$, on a $F : |S| \times I \to |K|$.

Comme on a un nombre fini de fermés $|S| \times I$ et que les définitions de F coïncident aux intersections, on peut recoller en $F : |K| \times I \to |K|$ et $F : C_p \simeq 1_{|K|}$

Théorème 3.55.

Soit un complexe simplicial K, connexe. Alors K contient un arbre maximal, et chaque arbre maximal de K contient tous les sommets de K.

Preuve :

1) Les arbres de K sont partiellement ordonnés par inclusion. Ils sont en nombre fini donc admettent un élément maximal.

2) Supposons que T soit un arbre maximal tel que le sommet $q \notin T$. Soit p un sommet de T et $\alpha : I \to |K|$ un chemin de p à q. I est un complexe et $\alpha|\partial I$ est simpliciale. Il existe donc r et α' simpliciale : $I_r \to |K|$ telle que $\alpha' \simeq \alpha$ rel ∂I (d'après 3.39).
Il existe $i \in 0,1,2,\ldots(r-1)$ tel que $p_i=\alpha'(\frac{i}{r}) \in T$, $p_{i+1}=\alpha'(\frac{i+1}{r}) \notin T$ soit le graphe $T \cup \{\langle p_i , p_{i+1}\rangle , \langle p_{i+1}\rangle\} = T'$.
T est un rétract de déformation fort de T', donc T' est 1. connexe. Ce qui est en contradiction avec le fait que T est maximal.

Définition (Caractéristique d'Euler) 3.56.

Soit un complexe (simplicial ou abstrait) K ka caractéristique d'Euler de K est le nombre :

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\dim K} (-1)^i \alpha_i \qquad \alpha_i = \mathrm{card}\{S \in K / \dim S = i\}$$

<u>Proposition 3.57.</u>

Soit T un arbre. Alors $\chi(T) = 1$.

<u>Preuve</u> : On la fait par induction sur le nombre de sommets de T $n = 1$

$T = \{<p>\}$ $\chi(T) = 1$

$n > 1$ supposons que tout arbre T' à au-plus $(n-1)$ sommets vérifie $\chi(T') = 1$.

Le lecteur vérifiera, à titre d'exercice difficile, que tout arbre possède une extrémité, c'est-à-dire un sommet n'appartenant qu'à un simplexe S_p de dimension 1.

Soit p une extrémité de T . Alors $T - \{< S_p> \cup <p>\}$ est un arbre T' qui est un rétract de déformation fort de T

$\chi(T') = 1$ car T' a $(n-1)$ sommets.

$$\chi(T) = \alpha_0(T) - \alpha_1(T) \quad \text{et} \quad \alpha_0(T) = \alpha_0(T') + 1 \ ; \ \alpha_1(T) = \alpha_1(T')+1$$

$$\text{donc} \quad \chi(T) = \chi(T') = 1 \ .$$

<u>Définitions 3.58.</u>

Soit un complexe simplicial connexe K et T un arbre maximal de K .

a) Une arête est un couple (p,q) où p et q sont sommets d'un même simplexe de K .

$(\overrightarrow{pq})$ est un chemin dans $|K|$ de p à q, qui reste dans $|< p,q>|$ (cf. 3.49).

b) Tout groupe G est quotient d'un groupe libre L par un sous-groupe

L' normal : $G = L/L'$.

On peut considérer G comme le groupe L où tout élément de L' est réduit à 1 . Aussi on parlera de G en disant :le groupe L avec la relation $x = 1$; $\forall x \in L'$.

c) Soit G le groupe libre engendré par les éléments (p,q) (arêtes de K) avec les relations

1) Si $\langle pq \rangle \in T$ $(p,q) = 1$

2) Si $\langle p,q,q' \rangle$ est un simplexe, $(pq)(qq') = (pq')$.

<u>Théorème 3.59.</u>

Soit K un complexe simplicial connexe et p_o un sommet de K

alors $\Pi_1(|K|,p_o) \approx G$

<u>Preuve</u> : a) pour chaque sommet p , il existe un chemin α_p et p_o à p dans T .

A chaque arête (pq), on associe $[\tilde{\alpha}_p(\overrightarrow{pq})\ \alpha_q^{-1}] \in \Pi_1(|K|,p_o)$

Ceci définit $\varphi : G \to \Pi_1(|K|,p_o)$ homomorphisme car

1) si $\langle p,q \rangle \in T$ $\alpha_p(\overrightarrow{pq})\alpha_q^{-1}$ est un lacet dans T 1 connexe

$$[\alpha_p(\overrightarrow{pq})\alpha_q^{-1}] = 1 .$$

2) si $\langle p,q,q' \rangle$ simplexe de K

$$[\alpha_p(\overrightarrow{pq})\alpha_q^{-1}]\ [\alpha_q(\overrightarrow{qq'})\ \alpha_q^{-1}] = [\alpha_p(\overrightarrow{pq})\ (\overrightarrow{qq'})\ \alpha_{q'}^{-1}]$$

$$= [\alpha_p(\overrightarrow{pq'})\ \alpha_{q'}^{-1}]$$

car $(\overrightarrow{pq})\ (\overrightarrow{qq'}) \sim (\overrightarrow{pq'})$ rel I d'après 3.50 et 3.49.

b) Soit $\psi : \Pi_1|K|,p_o) \to G$ défini par :

$a \in \Pi_1(|K|),p_o)$. Il existe un lacet $\alpha \in a$ tel que $\alpha(I) \subset |K^{(1)}|$.

D'après 3.43, il existe n et $\alpha' : I_{2^n} \to K$ approximation simpliciale de α. Posons $\alpha'(\frac{i}{2^n}) = p_i$

$$\psi(a) = (p_o p_1(p_1 p_2) \dots (p_{2^n-1}, p_o) .$$

c) ψ est bien définie : soient $\alpha_1, \alpha_2 \in a$ $\alpha_1 \sim \alpha_2$ rel ∂I.

Soit N défini dans 3.48. Soient $\alpha_1' : I_{2^n} \to K$, $\alpha_2' : I_{2^m} \to K$ des approximations simpliciales de α_1 et α_2. Posons $n_o = \sup(N,n,m)$

$\alpha_1'(\frac{i}{2^n}) = p_i$, $\alpha_2'(\frac{i}{2^m}) = p_i'$.

$$\xi_1 = (p_o p_1)(p_1 p_2) \dots (p_{2^n-1} p_o) \qquad \varphi\xi_1 = \alpha_1'$$

$$\xi_2 = (p_o' p_i')(p_1' p_2') \dots (p'_{2^m-1} p_o') \qquad \varphi\xi_2 = \alpha_2'$$

D'après 3.52 il existe $\xi_1' \sim \xi_1$ $\xi_2' \sim \xi_2$ tels que $\varphi_{\xi_1'}$, $\varphi_{\xi_2'} : I_{2^{n_o}} \to K$ soient approximations simpliciales de α_1 et α_2. Alors 3.47 et 3.48 permettent d'affirmer que

$$\varphi_{\xi_1'} \sim \varphi_{\xi_2'}$$

Enfin d'après 3.51 $\xi_1' \sim \xi_2'$. Il reste à voir maintenant, ce qui est facile, que si $\xi_1 \sim \xi_2$ ils sont égaux dans G (intérprétés comme produit d'arêtes) ψ est un homomorphisme évident.

d) φ et ψ sont inverses

$$\varphi\psi(a) = \varphi[(p_o p_1)(p_1 p_2)\ldots(p_{2^n-1}\, p_o)]$$

$$= [\alpha_{p_o}(\overrightarrow{p_o p_1})\,\alpha_{p_1}^{-1}]\ldots[\alpha_{p_{2^n-1}}(\overrightarrow{p_{2^n-1}\, p_o})\,\alpha_{p_o}^{-1}]$$

$$= [\alpha_{p_o}(\overrightarrow{p_o p_1})\ldots(\overrightarrow{p_{2^n-1}\, p_o})\,\alpha_{p_o}^{-1}]$$

$[\alpha p_o] = 1$ car T est 1. connexe et $[(\overrightarrow{p_o p_1})\ldots(\overrightarrow{p_{2^n-1}\, p_o})] = a$ d'après 3.39.

$$\varphi\psi(a) = a$$

$$\psi\varphi(pq) = \psi\,[\alpha_p(\overrightarrow{pq})\,\alpha_q^{-1}]$$

$\alpha_p(I) \subset T$. Par approximation simpliciale $[\alpha_p]$ s'écrit $[(\overrightarrow{p_o p_1})\ldots(\overrightarrow{p_n p})$ avec $p_i \in T$ (et $[\alpha_q]$ de même avec $q_i \ldots q_m$)

$$\psi\varphi(pq) = (p_o p_1)(p_1 p_2)\ldots(p_n p)(pq)\,(qq_1)\ldots(q_m q_o) \quad .$$

D'après 3.58 $\qquad \psi\varphi(pq) = (pq)$

Corollaires 3.60.

a) Soit un polyèdre X . $\Pi_1(X,x_o)$ est de type fini.

b) Si K est un graphe connexe, alors $\Pi_1(|K|,p_o)$ est libre et le nombre de ses générateurs est : $1 - \chi(K)$.

Preuve :

b) Les générateurs de $G \approx \Pi_1(|K|,p_o)$ sont les (pq) tels que $\langle pq\rangle \in K - T$.

Ce groupe est libre car si $\langle p,q,q'\rangle$ est un simplexe $p = q$ ou $q = q'$

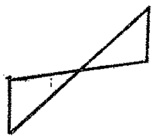
si $p = q \qquad (pq)(qq') = (pq') = (qq')$

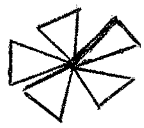
si $q = q'$ $(pq)(qq') = (pq') = (pq)$

On voit que les relations de définition de G sont vides.

De plus : $1 - \chi(K)$ = nombre de simplexes de dimension 1 de $K - T$.

Exemples :

a) le huit  $\Pi_1(X,x_0) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

b) le bouquet de n cercles  $\Pi_1(X,x_0) \approx \underbrace{\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}}_{n \text{ fois}}$

(extension possible à un bouquet infini) .

APPLICATIONS.

Lemme 3.61.

Soit un complexe simplicial K et $p \in |K|$. Alors il existe une subdivision K' de K ayant p pour sommet.

Preuve :

Il existe $S \in K$ $p \in \langle S \rangle$. Soit SdS , la subdivision barycentrique de $\dot{S}$. $p * sd\dot{S}$ est une subdivision de S . Pour tout autre simplexe de K de dimension au plus égale à dim S on prend la subdivision barycentrique. On construit ensuite les squelettes d'ordre supérieur à n comme en 3.27.

Proposition 3.62.

Pour un polyèdre X on a les propriétés :

a) X est localement contractile.

b) Si X est connexe, il est connexe par arcs.

c) Chaque sous-groupe de $\Pi_1(\tilde{X},x_o)$ est image du groupe fondamental d'un revêtement de X.

d) Soit $\Pi : \tilde{X} \to X$ un revêtement de $\tilde{X}$. Alors $\tilde{X}$ est un polyèdre de même dimension que X et Π induit une application simpliciale.

Preuve :Soit (Kf) une triangulation de X.

a) Soit K' une subdivision de K tel que $p \in |K|$ soit sommet de K'. Dans K', et p est un voisinage de p dans $|K|$ contractile.

b) D'après a) $|K|$ est localement connexe par arcs. S'il est connexe alors il est connexe par arcs.

c) Application de 2.36.

d) $\Pi' : \tilde{X} \to |K|$. Soit $S \in K$ $i : |S| \hookrightarrow |K|$ se relève en $\tilde{i}$ d'après 2.25 tel que $\tilde{i}(\rho) = \tilde{\rho}$ $(\Pi'(\tilde{p}) = \rho)$. Soit A le complexe abstrait défini comme suit :

Les sommets de A sont $\{\Pi^{-1}(p) | p \text{ sommet de } K\}$.

Les simplexes de A sont les $\{\tilde{p}_o,\dots,\tilde{p}_k\}$ tels que $\{p_i = \Pi'(\tilde{p}_i)\}$ est l'ensemble des sommets d'un simplexe S de K et tels qu'il existe $\tilde{i}$ relèvement de $i : |S| \to |K|$ avec $\tilde{p}_i = \tilde{i}(p_i)$ $i = 0,1,\dots, k$.

Soit $\tilde{K}$ une réalisation de A dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Il est évident que $|\tilde{K}|$ est un revêtement de $|K|$ et que Π induit une application simpliciale. Il reste au lecteur à montrer, grâce aux relèvements qu'il existe un homéomorphisme : $|\tilde{K}| \to \tilde{X}$.

Corollaire 3.63.

Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

Preuve :

Soit F un groupe libre de base $(e_i)_{i\in I}$.

Le groupe fondamental d'un bouquet X de card I cercles, est isomorphe à F. Ce bouquet est un polyèdre (si card I est infini on a la même théorie). D'après 3.62 c) à H sous-groupe de F correspond un revêtement $\tilde{X}$ de X. C'est un polyèdre de dimension 1 comme X donc un graphe. D'après 3.60 b) H est libre.

Définition 3.64.

On dit qu'on a attaché le disque D^n à l'espace topologique A par f et qu'on a obtenu l'espace topologique X (noté $X = A +_f D^n$) si

a) f est une fonction continue : $\partial D^n \to A$.

b) $X = \dfrac{A + D^n}{R}$, où $+$ désigne la somme disjointe et R l'identification : $x = f(x) \quad \forall x \in S^{n-1} = \partial D^n$

Il résulte de cette définition qu'on obtient naturellement deux plongements

$$A \hookrightarrow X \quad \text{et} \quad \mathrm{int} D^n \hookrightarrow X \ .$$

Exemple : Si $A = \{x_o\}$ et $f : S^{n-1} \to \{x_o\}$ l'application constante l'espace obtenu en attachant D^n à A par f est homéomorphe à S^n

Théorème 3.65.

Soit $X = A +_f D^2$ et $x = f(1)$. Soit N le sous-groupe normal de $\Pi_1(A,x)$ engendré par $f_\#[\Pi_1(S^1,1)]$

a) $i : A \hookrightarrow C$ induit un épimorphisme $i_\# : \Pi_1(A,x) \to \Pi_1(X,x)$.

b) Si A est un polyèdre connexe : $\mathrm{Ker}\ i_\# = N$.

<u>Preuve</u> : a) soit $a \in \Pi_1(X,x)$ et $\alpha \in a$ un lacet en x dans X.

D'après la compacité de I, on peut le découper en

$o = t_o < t_1 < \dots < t_n = 1$ tel que $\alpha([t_i\ t_{i+1}])$ est soit dans A

soit dans D^2. On sait que tout chemin dans D^2 est homotope (rel∂I)

à un chemin non surjectif. Comme de plus A est retract de déformation

fort de $X - \{x_o\}$ où $x_o \in \mathrm{int}D^2$, on peut former un lacet α' dans

A tel que $i(\alpha') \simeq \alpha$ rel ∂I.

b) On a $i_{\#}(N) = 1$.

Soit $(\tilde{A}p)$ un revètement de A connexe par arcs tel que $x_o = p(\tilde{x}_o)$ et

$p_{\#}[\Pi_1(\tilde{A},\tilde{x}_o)] = N$. D'après 2.20, f se relève en

$\tilde{f} : S^1 \to \tilde{A}$. Soit $\tilde{X}$ obtenu en attachant des disques

$$\begin{tikzcd} & \tilde{A} \arrow[d, "p"] & \subset & \tilde{X} \arrow[d] \\ S^1 \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & A & \subset & X \end{tikzcd}$$

D^2 à $\tilde{A}$ par les $\tilde{f}$, relèvements de f. On voit qu'on peut étendre

p en $p' : \tilde{X} \to X$ qui est un revêtement.

Soit un lacet α dans A tel que $i(\alpha) \simeq \varepsilon_{x_o}$ rel ∂I, et $\tilde{\alpha}$ le relèvement de α qui commence en $\tilde{x}_o$ dans $\tilde{X}$. D'après 2.17 $\tilde{\alpha}$ est un

lacet en $\tilde{x}_o$. D'après a) $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\alpha}'$ rel ∂I où $\tilde{\alpha}'$ est un lacet

en $\tilde{x}_o$ dans $\tilde{A}$.

$$[\alpha] = p_{\#}[\tilde{\alpha}'] \quad \text{donc} \quad [\alpha] \in N$$

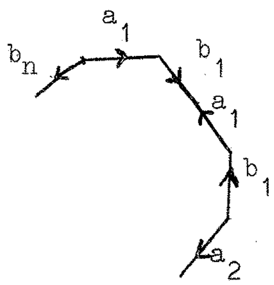
<u>Variétés de dimension 2. 3.66.</u>

Il a été démontré qu'on peut classer les variétés de dimension 2 en deux catégories : variétés orientables et non orientables et qu'on obtient toutes ces variétés par identifications sur des polygones de R^2.

<u>Variétés orientables.</u>

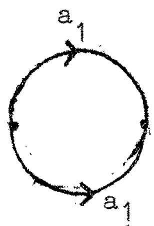
Pour $n \geq 1$ on a la variété à n anses en prenant un polygone à $4\,n$

côtés et en identifiant ces côtés comme l'indique la figure



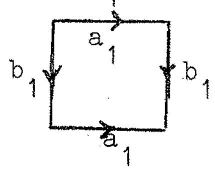
. On définit la variété à 0 anse par

c'est S^2



. $n = 1$

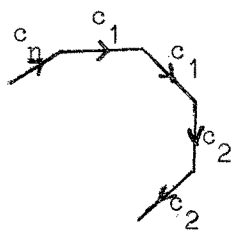
c'est le tore



. $n \geqslant 2$ On obtient une sphère

à laquelle on a ajouté n anses comme suit :

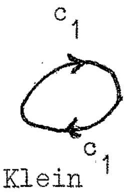
Variétés non orientables.



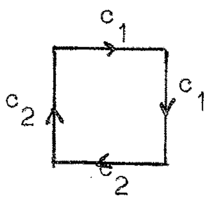
Pour $n \geqslant 1$ on prend un polygone à $2n$

côtés et on identifie comme l'indique

la figure

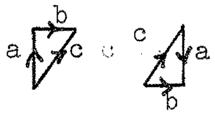


$n = 1$. On obtient P^2 .



$n = 2$. On obtient la bouteille de Klein

(pour retrouver la définition il suffit de

faire :  puis l'identification a).

Groupe fondamental des variétés de dimension 2. 3.67.

Pour les deux catégories de variétés, on ôte un petit disque S de l'intérieur du polygone, puis on applique 3.65.

Variétés orientables.

Soit M la variété à n anses et $A = M - S$.

A a pour rétract de déformation un bouquet de $2n$ cercles donc

$$\Pi_1(A,x) \approx \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{2n}$$

D'après 3.65 et 3.58.

$$\Pi_1(M,x) = \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{2n} \quad \text{avec la relation} \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 \dots b_n^{-1} = 1 .$$

Variétés non orientables.

Soit M la $n^{\text{ième}}$ variété et $A = \Pi - S$

A a pour rétract de déformation un bouquet de n cercles donc

$$\Pi_1(A,x) \approx \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n}$$

D'après 3.65 et 3.58.

$$\Pi_1(M,x) \approx \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n} \quad \text{avec la relation} \quad c_1^2\, c_2^2 \dots c_n^2 = 1$$

Exemples :

- $M = T^2$ $\qquad \Pi_1(M,x) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ avec la relation $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = 1$

  donc $a_1 b_1 = b_1 a_1$ $\qquad$ donc $\Pi_1(M,x) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

- $M = P^2$ $\qquad \Pi_1(M_1x) \approx \mathbb{Z}$ avec la relation $c_1^2 = 1$

  donc $\Pi_1(M,x) \approx \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2$.

Définition (amalgame) 3.68.

Soient trois groupes G_1 , G_2 , H et deux homomorphismes

$$f_1 : H \to G_1 \qquad\qquad f_2 : H \to G_2$$

On appelle amalgame de G_1 et G_2 par H le groupe, noté $G_1 * G_2/_{[H]}$, le produit libre de G_1 et G_2 avec la relation

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad \text{si} \quad x \in H \quad .$$

Théorème de Van Kampen 3.69.

Soient X_1 et X_2 deux polyèdres connexes tels que $X_1 \cap X_2$ soit connexe. On suppose que $X = X_1 \cup X_2$ est un polyèdre.

Soit $x \in X_1 \cap X_2$.

Alors $\Pi_1(X,x) \approx \Pi_1(X_1 x) * \Pi_1(X_2,x) / \mathcal{L}[\Pi_1(X_1 \cap X_2,x)]$

avec pour homomorphismes :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \Pi_1(X_1 x) \\ \Pi_1(X_1 \cap X_2,x) \arrow[ur, "i_{1\#}"] \arrow[dr, "i_{2\#}"'] & \\ & \Pi_1(X_2 x)\end{tikzcd}$$

-::-::-

CHAPITRE 4.

ALGEBRE

-:-

Le lecteur trouvera, consignés dans ce chapitre, les résultats algébriques dont il a besoin pour comprendre la suite du cours. Le début sera consacré à la structure des groupes abéliens, sans démonstration (le lecteur est renvoyé à "Algebra" de S. LANG par exemple) et à la définition des foncteurs $\varinjlim$, $\otimes$, Hom , Tor , Ext , à leur incidence sur les suites exactes, à leurs diverses commutations. La seconde partie définit l'algèbre homologique et ses différentes propriétés.

EXACTITUDE DES SUITES.

Définition (suite exacte) 4.1.

a) Une suite de modules et d'homomorphismes

$$\ldots \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to \ldots$$

est dite exacte en M_2 si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

b) Une suite de modules et d'homomorphismes est exacte si elle est exacte en chaque module.

c) On appelle petite suite exacte, une suite exacte de la forme :

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

Remarques 4.2.

a) si la suite $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ est exacte

$$\mathrm{Coker}\, f = N/_{\mathrm{Im} f} = N/_{\mathrm{Ker}\, g} \approx \mathrm{Im}\, g$$

b) si la suite $M_1 \xrightarrow{g} M_2 \xrightarrow{f} M_3 \xrightarrow{h} M_4$ est exacte

$$\mathrm{Coker}\, g \approx \mathrm{Ker}\, h$$

c) un homomorphisme $f : M_1 \to M_2$ définit la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f \xhookrightarrow{i} M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{p} \mathrm{coker}\, f \to 0$$

i et p étant les injections et projection canoniques.

Proposition 4.3.

Si M_1 et M_2 sont deux sous-modules d'un module M $M_1 + M_2$ désignant le module engendré par $M_1 \cup M_2$, on a l'isomorphisme

$$M_1/_{M_1 \cap M_2} \approx M_1 + M_2/_{M_2}$$

Définition 4.4.

Une petite suite exacte : $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ est dite scindable si on a l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

a) Il existe un homomorphisme $\rho : M_3 \to M_2$ tel que $g\rho = 1_{M_3}$.

b) Il existe un homomorphisme $\sigma : M_2 \to M_1$ tel que $\sigma f = 1_{M_1}$.

c) $M_2 \approx M_1 \oplus M_3$

Proposition 4.5.

Soit la petite suite exacte : $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$.

Si M_3 est un module libre, la suite est scindable.

Preuve : soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de M_3 .

Pour chaque i , il existe $x_i \in M_2$ tel que $g(x_i) = e_i$.

On définit $\rho(e_i) = x_i$.

STRUCTURE DES GROUPES ABELIENS.

Tous les groupes sont abéliens dans la suite du chapitre.

Théorème 4.6.

Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre et de rang au plus égal en rang du groupe.

Preuve : elle est traitée par Lang quand le rang est fini Cartan donne une preuve générale.

Définition (torsion) 4.7.

a) On appelle torsion du groupe G , le sous-groupe $\tau(G)$ défini par :

$$\tau(G) = \{x/x \in G \ , \ \exists n \in \mathbb{N}^* \ , nx = 0\} \qquad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} \ .$$

b) Un groupe G est dit sans torsion si $\tau(G) = \{0\}$

i.e. $(n \in \mathbb{Z} \ , \ x \in G \ , \ nx = 0) \Longrightarrow (x = 0 \ \text{ ou } \ n = 0)$.

Théorème 4.7. bis.

Tout groupe G sans torsion, de type fini, est libre.

Preuve : Soit $(x_i)_{i\in I}$, card $I = n$ un système fini de générateurs de G .

Soit $J \subset I$ tel que $(x_i)_{i\in J}$ soit une famille libre maximale.

On a donc pour $i \in I - J$ $\quad \lambda_i x_i = \sum_{j\in J} \lambda_{ij} x_j \ , \ \lambda_i \neq 0$ et soit

$\lambda = \prod_{I-J} \lambda_i$. $\lambda \neq 0$.

Soit $f : G \to G$ définie par $f(x) = \lambda x$.

Cette application est injective par hypothèse (G sans torsion) $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-groupe du groupe libre G' engendré par $(x_i)_{i \in J}$, donc $\mathrm{Im}\, f$ est libre d'après 4.6.

f est donc un isomorphisme de G et $\mathrm{Im}\, f$, donc G est libre.

Proposition 4.8.

Soit un groupe G . Alors $G/_{\tau(G)}$ est sans torsion. En particulier, si G est de type fini , $G/_{\tau(G)}$ est libre.

Preuve : Soit $\bar{x} \in G/_{\tau(G)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et x un représentant de $\bar{x}$ $nx = 0$ signifie $nx \in \tau(G)$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\rho(nx) = (\rho n)\, x = 0 \quad . \text{ Donc } \quad x \in \tau(G) \quad \text{et} \quad \bar{x} = 0 \quad .$$

Corollaire 4.9.

Si G est de type fini, on a l'isomorphisme :

$$G \approx \tau(G) \oplus G/_{\tau(G)}$$

Preuve : La suite $0 \to \tau(G) \to G \to G/_{\tau(G)} \to 0$ est scindable car $G/_{\tau(G)}$ est libre, d'après 4.5.

Définition 4.10.

On appelle rang d'un groupe G de type fini, le rang du groupe libre $G/_{\tau(G)}$

$$\rho(G) = rg(G/_{\tau(G)})$$

Théorème 4.11.

Soit un groupe fini G .

Alors il existe une suite a_1 , a_2 ,...., a_n $(a_i \in \mathbb{N}^*)$, unique si a_i divise a_{i+1} pour tout i, telle que

$$G \approx \mathbb{Z}/_{a_i\mathbb{Z}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/_{a_n\mathbb{Z}}$$

Preuve : voir Lang page 232.

Définition 4.12.

a) Un groupe G est dit de torsion, si $G = \tau(G)$.

b) On appelle composante p. primaire d'un groupe de torsion G le sous-groupe défini pour $p \in \mathbb{N}$, premier par :

$$G_p = \{x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \ , \ p^n x = 0\}$$

Proposition 4.13.

Un groupe est somme directe de ses composantes p-primaires.

Preuve : Voir Lang page 46.

Structure des groupes abéliens de type fini 4.14.

Soit un groupe G de type fini.

a) Il existe n, $a_1,\dots,a_p$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$G \approx \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/_{a_1\mathbb{Z}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/_{a_p\mathbb{Z}}$$

cette décomposition est unique si a_i divise a_{i+1} pour tout i .

b) Il existe n , n_1^1 ,.... $n_1^{k_1}$, n_2^1 ,.... $n_\ell^{k_\ell}$ dans $\mathbb{N}^*$, et p_1 ,...., p_ℓ

premiers tels que

$$G \approx \mathbb{Z}^n + \left(\mathbb{Z}/_{\rho_1^{n_i}\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/_{\rho_1^{n_{k_1}}\mathbb{Z}}\right) \oplus \left(\mathbb{Z}/_{\rho_2^{n'_2}\mathbb{Z}} \oplus \cdots\right) \oplus \cdots \left(\cdots \mathbb{Z}/_{\rho_\ell^{n_{k_\ell}}\mathbb{Z}}\right)$$

et la décomposition est unique.

__Preuve__ : $G/_{\tau(G)}$ est libre de type fini ; il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$G/_{\tau(G)} \approx \mathbb{Z}^n$

a) D'après 4.11 , $\tau(G) \approx \mathbb{Z}/_{a_1\mathbb{Z}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/_{a_p\mathbb{Z}}$ et le résultat suit 4.9.

b) D'après 4.13, il existe $p_1, \ldots, p_\ell$ premiers tels que

$$\tau(G) \approx G_{\rho_1} \oplus \cdots \oplus G_{\rho_\ell}$$

(seul un nombre fini de G_ρ est non nul car $\tau(G)$ est fini) . On applique 4.11 à G_{ρ_i} et le résultat suit 4.9.

__LIMITES INDUCTIVES.__

__Définitions 4.15.__

a) Un ensemble I est dit préordonné, filtrant à droite, s'il est muni d'une relation $\leqslant$ vérifiant

- $\forall i \in I \quad i \leqslant i$
- $(i \leqslant j \ , \ j \leqslant k) \Longrightarrow (i \leqslant k)$
- $\forall i, j \in I$ il existe k tel que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$.

b) I étant un ensemble préordonné filtrant à droite, un système inductif de groupes est une famille de groupes $(G_i)_{i \in I}$ et un ensemble d'homomorphismes $\varphi_{ij} : G_i \to G_j$ tels que :

- φ_{ij} est défini si $i \leqslant j$
- $\varphi_{ii} = Id_{G_i}$
- si $i \leqslant j \leqslant k$ $\qquad \varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$

Proposition et définition (limite inductive) 4.16.

a) On définit un homomorphisme $(\varphi_i)_{i\in I}$ du système inductif $(G_i, \varphi_{ij})_{i\in I}$ dans un groupe H , comme une famille vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall_i$ $\quad \varphi_i : G_i \to H$ est un homomorphisme
- $\forall_{ij}$, $i \leqslant j$ $\qquad \varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_y$

b) Etant donné le système inductif $(G_i , \varphi_{ij})_{i\in I}$, il existe un groupe G et un homomorphisme $(g_i)_{i\in I}$ dans G tel que pour tout groupe H et tout homomorphisme $(h_i)_{i\in I}$ dans H , il existe un unique homomorphisme (de groupes) $h : G \to H$ tel que : $\forall i$, $h_i = h \circ g_i$.

c) Ce couple $(G,(g_i)_{i\in I})$ unique à un isomorphisme près est appelé limite inductive du système $(G_i, \varphi_{ij})_{i\in I}$ et noté : $(G,g_i) = \varinjlim (G_i \varphi_{ij})$

Preuve :

Existence : soit $r = \bigoplus_{i\in I} G_i$, γ_i l'injection canonique $G_i \to r$, R le sous-groupe engendré par les éléments

$$\gamma_i(x_i) - \gamma_j \circ \varphi_{ij}(x_i) \quad (i,j \in I \; , \; i \leqslant j \; , \; x_i \in G_i)$$

Posons $G = r/R$ et soit ρ la projection canonique : $r \to G$.

La solution au problème est $(G, p \circ \gamma_i)$

1) $(p \circ \gamma_i)_{i\in I}$ est un homomorphisme :

$$\gamma_i(x_i) - \gamma_j \circ \varphi_{ij}(x_i) \in R \quad \text{, donc : } p \circ \gamma_i(x_i) - (p \circ \gamma_i(x_i) \circ \varphi_{ij}(x_i) = 0$$

donc

$$(p \circ \gamma_i) - (p \circ \gamma_j) \circ \varphi_{ij} = 0$$

2) Soit (h_i) un homomorphisme : $(G_i\ ,\ \varphi_{ij}) \to H$

Il existe un unique $h_1 : r \to H$ tel que

$$h_i = h_1 \gamma_i$$

Or $h_1(\gamma_i(x_i) - \gamma_j \cdot \varphi_{ij}(x_i)) = h_i(x_i) - h_j \circ \varphi_{ij}(x_i) = 0$

Donc h_1 passe au quotient par G

(car $\operatorname{Ker} h_1 \supset R$)

$$\begin{tikzcd} r \arrow[rr, "h_1"] \arrow[dr, "\rho"'] & & H \\ & G \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$$h_i = h_1 \gamma_i = h(p \circ \gamma_i) = h \circ g_i$$

h est donc définie. Elle est unique car $h \circ g_i(x_i) = h_i(x_i)$.

Or les $g_i(x_i)$ engendrent G et H est défini sur ces générateurs.

Unicité.

Si on a deux solutions (G, g_i) et (G', g'_i) , d'après les propriétés universelles, il existe $g : G \to G'$ et $g' : G' \to G$ commutant avec les g_i et les g'_i .

$g'g : G \to G$ et $Id_G : G \to G$ sont deux solutions au problème universel de G dans G

d'après l'unicité $g'g = Id_G$ et de même $gg' = Id$

donc $g : G \approx G'$

Théorème 4.17.

Pour que $(G,(g_i)_{i\in I})$ soit limite inductive du système inductif $(G_i, \varphi_{ij})_{i\in I}$ il faut et il suffit d'avoir les trois conditions suivantes :

a) $g_i = g_j \circ \varphi_{ij}$

b) $\bigcup_{i\in I} g_i(G_i) = G$

c) $(g_i(x_i) = 0) \Longrightarrow (\exists\, j \geqslant i \mid \varphi_{ij}(x_i) = 0)$

Exemples 4.18.

a) Tout groupe est limite inductive de ses sous-groupes de type fini.

I est l'ensemble des parties finies de G ordonné par inclusion G_i est le sous-groupe engendré par la partie i

$$\varphi_{ij} : G_i \subset G_j$$

b) Toute somme directe est limite inductive des sommes directes finies.

Proposition 4.19.

a) la limite inductive commute avec les sommes directes :

$$\underset{\rightarrow}{\mathrm{Lim}}\left(\bigoplus_{\alpha\in A} G_i^\alpha , \left(\bigoplus_{\alpha\in A} \varphi_{ij}^\alpha\right)\right)_{i\in I} = \bigoplus_{\alpha\in A} \underset{\rightarrow}{\mathrm{Lim}}\, (G_i^\alpha , \varphi_{ij}^\alpha)_{i\in I}$$

b) Etant donnés deux systèmes inductifs $(G_i , \varphi_{ij})_{i\in I}$ et $(H_i, \psi_{ij})_{i\in I}$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'homomorphismes $u_i : G_i \to H_i$ telle que

$$\forall i, j\in I \quad , \quad i \leqslant j \qquad\qquad \psi_{ij} \circ u_i = u_j \circ \varphi_{ij}$$

$(u_i)_{i\in I}$ induit un homomorphisme $u = \varinjlim a_i : \varinjlim G_i \to \varinjlim H_i$.

c) Si on a trois systèmes inductifs (G_i, φ_{ij}) , (H_i, ψ_{ij}) (K_i, θ_{ij}) et deux familles $(u_i) : (G_i , \varphi_{ij}) \to (H_i, \psi_{ij})$ et $(v_i)(H_i, \psi_{ij}) \to (K_i \, \theta_{ij})$ vérifiant b) et telles que pour tout i : $G_i \xrightarrow{u_i} H_i \xrightarrow{v_i} K_i$ soit exacte.

Alors $\varinjlim G_i \xrightarrow{u} \varinjlim H_i \xrightarrow{v} \varinjlim K_i$ est exacte.

Preuve : laissée au lecteur.

PRODUIT TENSORIEL.

Définition (produit tensoriel) 4.20.

a) Etant donnés deux groupes G_1 et G_2 , on appelle produit tensoriel de G_1 et G_2 , le couple $(G_1 \otimes G_2 , j)$ formé d'un groupe (appelé aussi produit tensoriel de G_1 et G_2) et d'une application bilinéaire $j : G_1 \times G_2 \to G_1 \otimes G_2$, solution (unique à un isomorphisme près) du problème universel suivant : Pour tout groupe H et toute application bilinéaire $f : G_1 \times G_2 \to H$ il existe une application $\bar{f} : G_1 \otimes G_2 \to H$ linéaire telle que

$$\bar{f} = f \circ j$$

b) Etant données deux applications linéaires $f_1 : G_1 \to H_1$ et $f_2 : G_2 \to H_2$, on appelle produit tensoriel de f_1 et f_2 l'unique application $f_1 \otimes f_2 : G_1 \times G_2 \to H_1 \otimes H_2$ qui vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

. $j' \circ (f_1 \times f_2) = (f_1 \otimes f_2) \circ j$ $\quad (j : G_1 \times G_2 \to G_1 \otimes G_2 \; ; \; j' : H_1 \times H_2 \to H_1 \otimes H_2)$

. $f_1 \otimes f_2 (a \otimes b) = f_1(a) \otimes f_2(b)$ $\quad (a \otimes b = j(a,b))$

Preuve :

a) Existence : le lecteur vérifiera que le quotient du produit $G_1 \times G_2$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme

$$(a + a',b) - (ab) - (a'b')$$

ou

$$(a, b + b') - (a,b) - (a,b')$$

répond à la question (comme dans 4.16).

Unicité : pour tous les problèmes universels, elle est celle de 4.16

b) $j' o (f_1 \times f_2)$ est bilinéaire $G_1 \times G_2 \to H_1 \otimes H_2$

Il existe donc une unique $f_1 \otimes f_2 : G_1 \otimes G_2 \to H_1 \otimes H_2$ telle que

$$j' o (f_1 \times f_2) = (f_1 \otimes f_2) \text{ o } j$$

Proposition 4.21.

a) On a les isomorphismes :

- $\mathbb{Z} \otimes G \approx G$
- $G \otimes H \approx H \otimes G$
- $(G_1 \otimes G_2) \otimes G_3 \approx G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3)$

b) le produit tensoriel de fonctions possède les propriétés :

- $(f_1 + f_2) \otimes g = f_1 \otimes g + f_2 \otimes g$
- $(f_1 \otimes f_2) \text{ o } (g_1 \otimes g_2) = (f_1 \text{ o } g_1) \otimes (f_2 \text{ o } g_2)$

Preuve :

a) Le lecteur montrera à l'aide de la propriété universelle que les applications suivantes sont des isomorphismes

- $a \to 1 \otimes a$ (inverse : $n \otimes a \to na$)
- $a \otimes b \to b \otimes a$
- $(a \otimes b) \otimes c \to a \otimes (b \otimes c)$

b) $(f_1 + f_2) \otimes g(a \otimes b) = (f_1 + f_2)(a) \otimes g(b) = f_1(a) \otimes g(b) + f_2(a) \otimes g(b)$

et de même pour l'autre propriété.

Proposition 4.22.

a) Si on a des familles de groupes $(G_i)_{i\in I}$, $(H_j)_{j\in J}$, on a

$$(\bigoplus_{i\in I} G_i) \otimes (\bigoplus_{j\in J} H_j) = \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} G_i \otimes H_j$$

b) Si on a deux systèmes, inductifs (G_i, φ_{ij}) et (H_i , ψ_{ij}) le système $(G_i \otimes H_i , \varphi_{ij} \otimes \psi)$ est inductif et :

$$\varinjlim G_i \otimes \varinjlim H_i = \varinjlim (G_i \otimes H_i)$$

c) Plus généralement, si on a deux systèmes inductif s$(G_i, \varphi_{ij})_{i\in I}$ $(H_{i'}, \psi_{i'j'})_{i'\in J}$ pour l'ensemble préordonné filtrant $I \times J$ défini par :

$$(ij) \leqslant (i'j') \Longleftrightarrow i \leqslant i' \quad \text{et} \quad j \leqslant j'$$

on a le système inductif $(G_i \times H_{i'} , \varphi_{ij} \times \psi_{i'j'})_{(i,i')\in I \times J}$ et

$$\varinjlim (G_i \otimes H_{i'} , \varphi_{ij} \otimes \psi_{i'j'}) = \varinjlim (G_i, \varphi_{ij}) \otimes \varinjlim (H_{i'}, \psi_{i'j'})$$

Preuve :

Il suffit à nouveau d'appliquer la propriété universelle (ainsi que 4.17).

Théorème 4.23. Pour chaque suite exacte :

$$G_1 \xrightarrow{\alpha} G_2 \xrightarrow{\beta} G_3 \longrightarrow 0$$, et chaque groupe H la suite :

$$G_1 \otimes H \xrightarrow{\alpha\otimes 1} G_2 \times H \xrightarrow{\beta\otimes 1} G_3 \otimes H \longrightarrow 0 \quad \text{est exacte.}$$

<u>Preuve</u> :

a) $\beta \otimes 1$ est surjective :

$G_3 \otimes H$ est engendré par $\{g_3 \otimes h \mid g_3 \in G_3 \ , \ h \in H\}$ ou par

$\{\beta(g_2) \otimes h \mid g_2 \in G_2 \ , \ h \in H\}$ car β est surjective

Or $\beta(g_2) \otimes h = (\beta \otimes 1)(g_2 \otimes h)$.

b) $(\beta \otimes 1) \circ (\alpha \otimes 1) = (\beta \circ \alpha) \otimes 1 = 0$ car $\beta \circ \alpha = 0$.

c) $G_3 \approx G_2{}_{\,\mathrm{Im}\alpha}$ donc $G_3 \times H \approx G_2 \times H/_{\mathrm{Im}(\alpha\times 1)}$.

Toute application bilinéaire $fG_3 \times H \to C$ s'identifie à $f : G_2 \times H \to C$ nulle sur $\mathrm{Im}\alpha \times H$

donc il existe $\bar{f} : G_2 \otimes H \to c$ unique telle que $f = \bar{f} \circ j$ donc $\bar{f}$ s'annule sur $\mathrm{Im}(\alpha \otimes 1)$ et passe au quotient par f'

$$\begin{tikzcd}
G_2 \otimes H \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & C \\
& G_2 \otimes H/_{\mathrm{Im}(\alpha \otimes 1)} \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

Donc pour toute $f : G_3 \times H \to C$, il existe une unique f'

$G_2 \times H/_{\mathrm{Im}(\alpha \times 1)} \to C$ telle que $f = f' \circ \gamma$ où γ est l'application

bilinéaire canonique : $G_2 \times H/_{\mathrm{Im}(\alpha \times 1)} \to G_2 \otimes H/_{\mathrm{Im}(\alpha \otimes 1)}$

donc $G_2 \otimes H/_{\mathrm{Im}(\alpha \otimes 1)} \approx G_3 \otimes H \approx G_2 \otimes H/_{\ker(\beta \otimes 1)}$

donc $\mathrm{Ker}(\beta \otimes 1) = \mathrm{Im}(\alpha \otimes 1)$

Théorème 4.24.

Si H est un groupe sans torsion, et si $f : G_1 \to G_2$ est injectif, $f \otimes 1 : G_1 \otimes H \to G_2 \otimes H$ est injectif. Par suite, pour la suite exacte : $0 \to G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \to 0$ on a la suite exacte :

$$0 \to G_1 \otimes H \xrightarrow{f \otimes 1} G_2 \otimes H \xrightarrow{g \otimes 1} G_3 \otimes H \to 0$$

Preuve :

Si H est libre, $H = \mathbb{Z}^{(I)}$ et $G_1 \otimes H = G_1^{(I)}$, $G_2 \otimes H = G_2^{(I)}$ et $f \otimes 1 = f^{(I)}$. Le résultat est évident.

Sinon d'après 4.18 a) H est limite inductive de ses sous-groupes de type fini qui sont sans torsion donc libres. Le résultat suit 4.17 et 4.22.

LE FONCTEUR HOM.

Définition (Hom) 4.25.

a) Etant donnés deux groupes A et B, on note Hom(A,B) l'ensemble des homomorphismes de A dans B. C'est un groupe abélien muni de + défini par :

$$(f + g)a = f(a) + g(a) \quad a \in A$$

b) A étant fixé, à toute $f : B \to B'$ linéaire on associe

$$\mathrm{Hom}(Af) : \mathrm{Hom}(AB) \to \mathrm{Hom}(AB')$$
$$\varphi \to f \circ \varphi$$

On a aussi défini un foncteur contravariant additif

i.e. $\quad\cdot\ \mathrm{Hom}\,(g_1 + g_2,B) = \mathrm{Hom}(g_1,B) + \mathrm{Hom}(g_2,B)$

$\cdot\ \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Id}_A,B) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(AB)}$

. $\mathrm{Hom}(f \circ g, B) = \mathrm{Hom}(g,B) \circ \mathrm{Hom}(f,B)$

Proposition 4.26.

a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},B) \approx B$

b) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} X_i , Y) \approx \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i,Y)$

c) $\mathrm{Hom}(X , \prod_{j\in J} Y_j) \approx \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}(X,Y_j)$

d) En combinant b) et c)

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i\in I} X_i , \prod_{j\in J} Y_j\right) \approx \prod_{(i,j)\in I \times I} \mathrm{H\,om}\,(X_i, Y_j) \quad .$$

Preuve :

a) $f : \mathbb{Z} \to B$ est défini par $f(1)$.

b) $f : \bigoplus X_i \to Y$ est déterminée par les $f_i = f \circ j_i$ où

$j_i : X_i \to \bigoplus X_i$ est l'inculsion canonique.

Réciproquement f détermine les fi par : $f(x_i) = f_i(x_i)$ $(x_i \in X_i)$.

On peut donc résumer en :

Propriété universelle de la somme directe :

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de groupes. Le couple $(\bigoplus X_i , j_i)$ est l'unique solution du problème universel :

Trouver un groupe G et des homomorphismes $j_i : X_i \to G$ tels que pour tout groupe H et toute famille (h_i) d'homomorphismes : $X_i \to H$, il existe un homomorphisme unique $h : G \to H$ tel que : $h_i = h o j_i$ $(i\in I)$

c) Le raisonnement dual conduit à :

Propriété universelle du produit.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de groupes. Le couple $(\Pi X_i, \Pi_i)$ où $\Pi_i : \Pi X_i \to X_i$ est la projection canonique, est l'unique solution au problème universel :

Trouver un groupe G et des homomorphismes : $\Pi_i : G \to X_i$ tels que pour tout groupe H et toute famille d'homomorphismes (h_i) $h_i : H \to X_i$ il existe un homomorphisme unique $h : H \to G$ tel que $h_i = \Pi_i \circ h$ $(i \in I)$

Proposition 4.27.

a) Si la suite : $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ est exacte la suite

$$\mathrm{Hom}(A_1B) \leftarrow \mathrm{Hom}(A_2B) \leftarrow A_3 \leftarrow 0 \quad \text{est exacte .}$$

b) Si de plus A_1 est facteur direct dans A_2 , en particulier si A_3 est libre, la suite

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(A_1B) \leftarrow \mathrm{Hom}(A_2B) \leftarrow \mathrm{Hom}(A_3B) \leftarrow 0 \quad \text{est exacte}$$

Preuve :

a) $A_3 \approx A_2/A_1$. Donc les homomorphismes de A_3 dans B s'identifie à ceux de A_2 dans B qui sont nuls sur A_1 .

b) $A_2 = A_1 \oplus A_3$. Donc $f : A_1 \to B$ se prolonge à A_2 .

Proposition 4.28.

a) Si la suite : $0 \to B_i \xrightarrow{i} B_2 \xrightarrow{\rho} B_3 \longrightarrow 0$ est exacte alors la suite :
$0 \to \mathrm{Hom}(AB_1) \to \mathrm{Hom}(AB_2) \to \mathrm{Hom}(A\,B_3)$ est exacte.

b) Si de plus A est libre, ou si B_3 est facteur direct dans B_2 (ce qui est vérifié dès que B_3 est libre) on a la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}(AB_1) \to \mathrm{Hom}(AB_2) \to \mathrm{Hom}(AB_3) \to 0$$

Preuve :

a) . $\mathrm{Hom}(Ai)$ est injectif car $(f : A \to B_1)$ tel que $i \circ f = o) \Longrightarrow (f = 0)$ car i est injectif.

. $p(iof) = (poi)f = 0$

. $g : A \to B_2$ tel que $p \circ g = 0$ $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im}\, i$

donc g se relève en $f = i^{-1} \circ g$

b) Si A est libfe on peut relever dans B_2 $f_3 : A \to B_3$ en relevant les éléments de la base de A.

Si $B_2 = B_1 \oplus B_3$ $f_3 : A \to B_3$ peut se relever en $f_2 : A \to B_2$ (en composant avec $B_3 \subset B_2$) .

HOMOLOGIE.

Définitions (groupes différentiels gradués) 4.29.

a) Un groupe différentiel est un groupe abélien muni d'un endomorphisme d de carré nul : $d^2 = 0$

b) Un groupe différentiel gradué est un groupe abélien G somme directe d'une famille $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muni d'un endomorphisme d , appelé opérateur bord, de degré r

i.e. $\forall n$ $d : G_n \to G_{n+r}$

c) Un complexe de chaînes est un groupe différentiel gradué dont l'opérateur bord est de degré -1 . On peut donc le représenter comme une suite de groupes (C_p) :

$$\to C_{p+1} \xrightarrow{d} C_p \xrightarrow{d} C_{p-1} \xrightarrow{d}$$

telle que $d^2 = 0$ (i.e. : $d(C_{p+1}) \subset \operatorname{Ker} d$) .

d) C' est dit sous-complexe de chaînes du complexe de chaînes C si C'_p est un sous-groupe de C_p ($p \in Z$), si C' est un complexe de chaînes et si $d' = d|C'$.

e) Un complexe de chaînes C est dit non négatif si

$$C_p = 0 \qquad \text{pour tout } p < 0$$

f) Un complexe de chaînes C est dit libre si c'est un groupe gradué libre, ou (ce qui est équivalent) si tous les C_p sont libres.

<u>Définitions (homologie) 4.30.</u>

a) Etant donné un complexe de chaînes C , on appelle groupe des cycles de C le groupe gradué

$$Z(C) = \operatorname{Ker} d$$

donc : $Z(C) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} Z_p(C) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ker}(d|C_p)$.

b) On appelle groupe des bords de C , le groupe gradué

$$B(C) = \operatorname{Im} d$$

donc $B(C) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} B_p(C) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \operatorname{Im}(d|C_{p+1})$

c) On appelle groupe d'homologie de C , le groupe gradué

$$H(C) = Z(C)/_{B(C)}$$

donc $H(C) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H_p(C) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} (Z_p(C)/_{B_p(C)})$.

<u>Définition (transformation de chaînes) 4.31.</u>

Etant donnés deux complexes de chaînes C et C', on appelle transformation de chaînes, un homomorphisme $\tau : C \to C'$ de degré 0

i.e. : $\forall p : \tau : C_p \to C'_p$

qui commute avec l'opérateur bord :

i.e. $\forall_p \quad d'\tau = \tau d : C_p \to C'_{p-1}$

Proposition 4.32.

Soient deux complexes de chaînes C et C' et une transformation de chaînes $\tau : C \to C'$

Alors $\tau(Z(C)) \subset Z(C')$

$\tau(B(C)) \subset B(C')$

et τ induit un homomorphisme de degré 0 :

$\tau_* : H(C) \to H(C')$

i.e. $\tau_* : H_p(C) \to H_p(C') \qquad \forall p$

la correspondance étant fonctorielle (covariante et additive)

i.e. . $Id_C{}^* = Id_{H(C)}$

. $(\tau'\tau)_* = \tau'_* \tau_*$

. $(\tau + \tau')_* = \tau_* + \tau'_*$

Preuve : évidente.

Proposition 4.33.

Le foncteur homologie commute avec :

a) Les produits : $H(\prod_{i \in I} C_i) = \prod_{i \in I} H(C_i)$

b) les sommes directes : $H(\bigoplus_{i \in I} C_i) = \bigoplus_{i \in I} H(C_i)$

c) les limites inductives :

si (C_i , φ_{ij}) est un système inductif de complexes de chaînes tels que :

$$\forall ij \in I \quad i \leq j \qquad \varphi_{ij} \circ d_i = d_j \circ \varphi_{ij}$$

alors $(H(C_i) , \varphi_{ij*})$ est un système inductif et :

$$\varinjlim (H(C_i) , \varphi_{ij*}) = H\,[\varinjlim (C_i , C_{\varphi ij})]$$

Preuve :

a) $Z(\Pi C_i) = \Pi Z(C_i)$; $B(\Pi C_i) = \Pi B(C_i)$

b) $Z(\oplus C_i) = \oplus Z(C_i)$; $B(\oplus C_i) = \oplus B(C_i)$

c) $(C_i \; \varphi_{ij})$ est un système inductif. Il lui correspond donc une limite inductive: C qui est un groupe différentiel gradué muni de $\varinjlim d_i$ (voir 4.19 b)) donc le second membre de l'égalité ci-dessus à un sens.

Pour tout i , on a la suite exacte :

$$0 \to Z(C_i) \to C_i \to B(C_i) \to 0$$

D'après 4.19 c) la suite :

$$0 \to \varinjlim Z(C_i) \to \varinjlim C_i \to \varinjlim B(C_i) \to 0$$

est exacte

$$\text{donc} \quad Z(C) = \varinjlim Z(C_i) \; ; \; B(C) = \varinjlim B(C_i)$$

Pour tout i , on a la suite exacte :

$$0 \to B(C_i) \to Z(C_i) \to H(C_i) \to 0$$

D'après 4.19 c) la suite :

$$0 \to B(C) \to Z(C) \to \varinjlim H(C_i) \to 0$$

est exacte. D'où $\varinjlim H(C_i) = Z(C)/_{B(C)} = H(C)$

Définition (Homologie relative) 4.34.

Soit un complexe de chaînes C et un sous-complexe C'

a) $i : C' \subset C$ est une transformation de chaînes.

b) C/C' est un groupe différentiel gradué muni de

$$d : C_p / C'_p \to C_{p-1} / C'_{p-1}$$

opérateur bord induit par celui de C.

c) La projection canonique $p : C \to C/C'$ est une transformation de chaînes.

d) Le groupe d'homologie de C/C' est dit groupe d'homologie relative de C par rapport à (ou modulo) C' ; il est noté

$$H(C,C') = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(C,C')$$

Théorème (suite exacte d'homologie) 4.35.

Soit une suite exacte de complexes de chaînes

$$0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$$

Alors on a la suite exacte :

$$\to H_p(C') \xrightarrow{f^*} H_p(C) \xrightarrow{g^*} H_p(C'') \xrightarrow{d^*} H_{p-1}(C') \to$$

et la correspondance est fonctorielle au sens suivant :

au diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p'"'] & C_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "p"'] & C''_1 \arrow[r] \arrow[d, "p''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_2 \arrow[r, "f_2"] & C_2 \arrow[r, "g_2"] & C''_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

correspond le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
\to H_p(C'_1) \arrow[r, "f_{1*}"] \arrow[d, "p'_*"'] & H_p(C_1) \arrow[r, "g_{1*}"] \arrow[d, "p_*"'] & H_p(C''_1) \arrow[r, "d_{1*}"] \arrow[d, "p''_*"'] & H_{p-1}(C'_1) \to \arrow[d, "p'_*"'] \\
\to H_p(C'_2) \arrow[r, "f_{2*}"] & H_p(C_2) \arrow[r, "g_{2*}"] & H_p(C''_2) \arrow[r, "d_{2*}"] & H_{p-1}(C'_2) \to
\end{tikzcd}$$

En particulier si C' est un sous-complexe du complexe de chaînes C , on a la suite exacte :

$$\to H_p(C') \xrightarrow{i_*} H_p(C) \xrightarrow{p_*} H_p(C,C') \xrightarrow{d_*} H_{p-1}(C') \to$$

<u>Preuve</u> :

1) <u>Définition de d_*</u>

Soit $\{x''\} \in H_p(C'')$ $\quad x'' \in Z_p(C'')$ $\quad x''$ est défini à $B_p(C'')$ près comme g est surjective, il existe $x \in C$ tel que $g(x) = x''$ $\quad x$ est déterminé à $g^{-1}(B_p(C''))$ près, donc dx à $dg^{-1}[B_p(C'')]$ près. Or $dg^{-1}[B_p(C'')] = d(\mathrm{Ker} g)$ car

$$\{x \mid x = dy \quad g(y) = dz\} = \{x \mid x = dy' \quad g(y') = 0\}$$ (pour C on prend $y' = y - dz$)

$g(dx) = dx'' = 0$ donc $dx \in \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f$. $\quad dx = f(x')$

x' est défini à f^{-1} $d(\ker g) = f^{1}df(C'_p) = f^{-1}f(dC'_p) = B_{p-1}(C')$ près car f est injectif

$$f(dx') = df(x') = ddx = 0 \implies dx' = 0 \text{ car } f \text{ est injectif}$$

$x' \in Z_{p-1}(C')$ et $\{x'\}$ est parfaitement déterminée. Le lecteur vérifiera que $d_* : \{x''\} \to \{x'\}$ est un homomorphisme de groupes.

2) <u>Exactitude en $H_p(C)$</u> .

. $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$ car $g \circ f = 0$

. $g_*(k) = 0$ i.e. $g(x) \in B(C''_p)$ pour $x \in h$

donc il existe $x'' \in C''_p$ tel que $g(x) = dx''$, et $x_1 \in C_p$ tel que $x'' = g(x_1)$ (car g est surjective)

$$g(x - dx_1) = dx'' - dx'' = 0$$

donc $(x - dx_1) \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Il existe $x' \in C'$ tel que

$$f(x') = x - dx_1$$

et $f(dx') = df(x') = dx - ddx_1 = 0$ donc $dx' = 0$ car f est injective

et $x' \in Z(C'_p)$ $f_*\{x'\} = \{f(x')\} = h$.

3) <u>Exactitude en $H_p(C')$</u> .

. $d_*(h'') = \{x'\}$ tel que $f(x') = dx$ et $g(x) \in h''$

donc $f(x') \in B_p(C)$ et $f_* \circ d_* = 0$

. si $f_*(h') = 0$ et $x' \in h'$, ceci signifie $f(x') = dx$

$x'' = g(x) \in Z_{p+*}(C'')$ car $dx'' = dg(x) = gdx = gof(x') = 0$ et

$d_*\{x''\} = h'$.

4) <u>Exactitude en $H_p(C'')$</u> .

. $g_*\{x\} = \{g(x)\}$

$d_* \circ g_*\{x\} = d_*\{g(x)\} = \{x'\}$ tel que

$$x' \in Z_{p-1}(C') \qquad f(x') = dx = 0$$

f est injective, donc $x' = 0$ et $d_* \circ g_* = 0$

. Soit $d_*\{x''\} = 0$ donc il existe $x \in C_p$, $x' \in Z(C'_{p-1})$ tels que $g(x) = x''$, $dx = f(x')$ et x' soit un bord $x' = dx'_1$, $x'_1 \in C'_p$

$$dx = f(dx'_1) = df(x'_1) \quad \text{ou} \quad d(x - f(x'_1)) = 0$$

$$(x - f(x'_1)) \in Z_p(C) \quad \text{et} \quad x'' = g(x) = g(x - f(x'_1))$$

$$\text{ou} \qquad \{x''\} = g_*\{x - f(x'_1)\}$$

5) Propriétés fonctorielles.

La seule chose à vérifier est la commutativité du diagramme suivant ce qui est laissé au lecteur

$$\begin{tikzcd} H_p(C''_1) \arrow[r, "d_{1*}"] \arrow[d, "p''_*"'] & H_{p-1}(C'_1) \arrow[d, "p'_*"] \\ H_p(C''_2) \arrow[r, "d_{2*}"] & H_{p-1}(C'_2) \end{tikzcd}$$

Lemme de cinq 4.36.

Si dans le diagramme de groupes suivants :

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & G_2 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q"'] & G_3 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & G_4 \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "s"'] & G_5 \arrow[d, "t"'] \\ H_1 \arrow[r, "i'"] & H_2 \arrow[r, "j'"] & H_3 \arrow[r, "h'"] & H_4 \arrow[r, "\ell'"] & H_5 \end{tikzcd}$$

les lignes sont exactes, s'il est commutatif et si p,q,s,t sont des isomorphismes, alors r est aussi un isomorphisme.

Preuve :

1) $\operatorname{Ker} r = 0$

$rx_3 = 0 \implies k'rx_3 = skx_3 = 0 \implies kx_3 = 0$

donc il existe x_2 tel que $x_3 = jx_2 - rj(x_2) = j'qx_2 = 0$

il existe x'_1 et x_1 tels que $qx_2 = i'\, x'_1 = i'px_1$

d'où $x_2 = q^{-1}i'px_1 = ix_1$ et $x_3 = jix_1 = 0$

2) <u>r est surjectif.</u>

$x'_3 \in H_3$; il existe $x_4 \in G_4$ tel que $k'x'z = sx_4$

$i'k'x'_3 = i'sx_4 = tix_4 = 0$ donc $ix_4 = 0$. Il existe $x_3 \in G_3$

tel que $x_4 = kx_3$. $k'x'_3 = sx_4 = skx_3 = k'rx_3$

$x'_3 - rx_3 \in \ker k' = \operatorname{Im} j' = \operatorname{Im} j'q \subset \operatorname{Im} r$

Il existe $y_3 \in G_3$ tel que $ry_3 = x'_3 - rx_3$

et $x'_3 = r(x_3 + y_3)$

<u>Définition (augmentation) 4.37.</u>

a) Soit un complexe de chaînes C non négatif. Une augmentation de C est un épimorphisme $\varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$ tel que $0 = \varepsilon d : C_1 \to \mathbb{Z}$.

b) Une telle application n'existe pas toujours. Lorsqu'elle existe, on dit que C est un complexe de chaînes augmenté.

c) ε définit une transformation de chaînes entre le complexe augmenté C et $C' = \{C'_p \mid C'_p = 0 \quad p \neq 0 \ ; \ C'_0 = \mathbb{Z}\}$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_p \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "0"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d) Une transformation de chaînes $\tau : C \to C'$ entre complexes augmentés préserve l'augmentation si

$$\varepsilon' \tau = \varepsilon \quad : \quad C_0 \to \mathbb{Z}$$

e) Si C est un complexe de chaînes augmenté, on peut définir le complexe

$\tilde{C} : \tilde{C}_\rho \quad \rho \neq -1 \quad ; \quad \tilde{C}_{-1} = Z$

$$\to \tilde{C}_\rho \xrightarrow{d} \cdots \longrightarrow \tilde{C}_1 \xrightarrow{d} \tilde{C}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

L'homologie $\tilde{H}(C)$ de ce complexe est appelée groupe d'homologie réduite de C.

Proposition 4.38.

Soit un complexe de chaînes augmenté C.

Alors $$H_q(C) = \begin{cases} \tilde{H}_q(C) & q \neq 0 \\ \tilde{H}_0(C) \oplus \mathbb{Z} & q = 0 \end{cases}$$

Preuve : $0 \to \operatorname{Ker} \varepsilon \to C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ est scindable car Z est libre ; donc

$C_0 = \operatorname{Ker} \varepsilon \oplus \mathbb{Z}$

$Z_q(C) = Z_q(\tilde{C}) \quad q \neq 0, -1 \quad , \quad Z_0(C) = Z_0(\tilde{C}) + Z \; ; \quad Z_{-1}(\tilde{C}) = Z$

$B_q(C) = B_q(\tilde{C}) \quad q \neq -1 \quad , \quad B_{-1}(\tilde{C}) = Z$

Définition (complexe acyclique) 4.39.

a) Un complexe de chaînes C est dit acyclique si

$$H_q(C) = 0 \qquad \text{pour tout } q .$$

b) Un complexe de chaînes augmenté C n'est jamais acyclique car Z est facteur direct de $H_0(C)$. Cependant, par abus de langage nous dirons qu'il est acyclique si $\tilde{C}$ l'est.

Définition (homotopie) 4.40.

a) Soient deux transformations de chaînes $\tau, \tau' : C \to C'$. Une homotopie D entre τ et τ' , notée

$$D : \tau \simeq \tau'$$

est un homomorphisme de degré 1 de C dans C'

$$\text{i.e.} \qquad D : C_p \to C'_{p+1}$$

tel que $\quad dD + Dd = \tau - \tau'$

b) τ et τ' sont dits homotopes, s'il existe une homotopie de τ à τ' . Cette relation est une équivalence.

Lemme 4.41.

Soient les transformations de chaînes :

$$\tau_1 , \tau'_1 : C_1 \to C_2 \quad ; \quad \tau_2 , \tau'_2 : C_2 \to C_3$$

si $\quad D_1 : \tau_1 \simeq \tau'_1 \qquad$ et $\quad D_2 : \tau_2 \simeq \tau'_2$

Alors $\quad \tau_2 D_1 + D_2 \tau'_1 : \tau_2 \circ \tau_1 \simeq \tau'_2 \circ \tau'_1$

Théorème 4.42.

Soient deux transformations de chaînes $\tau, \tau' ; C \to C'$ homotopes

Alors $\tau_* = \tau'_*$

<u>Preuve</u> : $D : \tau \simeq \tau'$

$$\tau_*\{x\} - \tau'_*\{x\} = \{\tau(x) - \tau'(x)\} = \{dD(x) + Ddx\} = \{dD(x)\} = 0$$

car $x \in Z(C)$ $(dx = 0)$ et $dD(x) \in B(C')$.

<u>Définitions (équivalence de chaînes contractilité).</u>

a) On dit que deux complexes de chaînes C et C' sont équivalents s'il existe des transformations de chaînes $\tau : C \to C'$ et $\tau' : C' \to C$ telles que :

$$\tau'\tau \simeq Id_C \quad \text{et} \quad \tau\tau' \simeq Id_{C'} \quad .$$

Les groupes d'homologie de C et C' sont alors isomorphes car

$$\tau'_* \tau_* = (\tau'\tau)_* = Id_{H(c)} \quad \text{et} \quad \tau_*\tau'_* = (\tau\tau')_* = Id_{H(C')} \quad .$$

b) On dit qu'un complexe de chaînes C est contractile s'il existe D (appelée contraction) $D : Id_c \simeq 0_c$.

<u>Théorème 4.44.</u>

a) Un complexe de chaînes C contractile est acyclique.

b) Un complexe de chaînes libre C acyclique est contractile.

<u>Preuve</u> :

a) $Id_c \simeq 0_c \implies (Id_c)_* = Id_{H\ (C)} = (0_c)_* = 0_{H(C)}$

donc $H(C) = 0$

b) C est libre et $H_p(C) = 0$ pour tout p

La suite exacte : $0 \to Z_p(C) \to C_p \to B_{p-1}(C) \to 0$ est scindable car

$B_{p-1}(C) = Z_{p-1}(C)$ est libre. Il existe donc $sp : Z_p(C) \to C_p$ tel que

$dS = Id_{Z(C)}$ (plus précisément : $d_p S_{p-1} = Id_{Z_{p-1}(c)}$)

Soit $D_p = S_p(Id_{C_p} - S_{p-1} d_p) : C_p \to Z_{p+1}$

(bien défini car : $Id_{C_p} - S_{p-1} d_p : C_p \to Z_p(C)$)

dρμ $D_\rho + D_{\rho-1}\, d_p = Id_{C_p} - s_{p-1}\, d_p + s_{p-1}(Id_{C_{p-1}} - s_{p-2} d_{p-1}) = Id_{C_p}$

$$D = \{D_p\} : Id_c \simeq 0_c$$

<u>Corollaire 4.45.</u>

Soit un complexe de chaînes augmenté C .

a) Si la transformation de chaînes ε :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_p \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "0"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est une équivalence de chaînes, C est acyclique.

b) Si C est un complexe de chaîne libre augmenté acyclique alors ε est une équivalence de chaînes.

LE FONCTEUR TOR.

Définition (résolution libre) 4.46.

Etant donné un groupe A , on appelle résolution libre de A toute suite exacte :

$$0 \to G_1 \to G_0 \to A \to 0$$

où G_1 et G_0 sont libres.

On remarquera qu'une résolution libre existe toujours car tout groupe est quotient d'un groupe libre.

On remarquera aussi que : $0 \to G_1 \to G_0 \to 0$ est un complexe de chaînes libre dont l'homologie en degré 0 est A .

Lemme 4.47.

Etant données deux résolutions libres, l'une de A ;

$$0 \to G_1 \to G_0 \to A \to 0$$

l'autre de B : $0 \to H_1 \to H_0 \to B \to 0$ et un homomorphisme $f : A \to B$, il existe des homomorphismes $f_0 : G_0 \to H_0$ et $f_1 : G_1 \to H_1$ tels qu'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_1"] & G_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_1 \arrow[r, "i'"] & H_0 \arrow[r, "p'"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, il existe une transformation de chaînes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G_1 & \to & G_o & \to & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_o & & \\ 0 & \to & H_1 & \to & H_o & \to & 0 \end{array}$$

qui "prolonge" f. Cette transformation est unique à une homotopie près.

Preuve :

1) Pour définir f_o, il suffit d'associer à chaque élément de base e_i de G_o un élément de $p'^{-1}(f \circ p(e_i))$ f_1 sera la restriction de f_o à G_1.

2) Soient (f_o, f_1) et (f'_o, f'_1) deux prolongements de f

$$(f'_o - f_o)(x_o) \in \operatorname{Ker} p' = \operatorname{Im} i' .$$

On pose $D(x_o) = i'^{-1}((f'_o - f_o)x_o$ car i' est injectif

D est une homotopie entre (f_o, f_1) et (f'_o, f'_1)

Lemme 4.48.

Si $D : \tau \simeq \tau'$ pour $\tau, \tau' : C \to C'$

alors $D \otimes \mathrm{Id}_G : \tau \otimes \mathrm{Id}_G \simeq \tau' \otimes \mathrm{Id}_G : C \otimes G \to C' \otimes G$.

Définition (Tor) 4.49.

a) Aux groupes A et B, on associe le complexe de chaînes C

$$0 \to G_1 \otimes B \xrightarrow{i \otimes \mathrm{Id}_B} G_o \otimes B \longrightarrow 0$$

ou $0 \to G_1 \xrightarrow{i} G_o \xrightarrow{p} A \to 0$ est une résolution libre quelconque de A.

L'homologie de ce complexe ne dépend pas du choix de la résolution (d'après 4.47 appliqué à Id_A et 4.48) . Elle ne possède que deux groupes non nuls :

$$H_o(C) = A \times B$$

$$H_1(C) = \mathrm{Tor}(A,B) = \mathrm{Ker}(i \otimes Id_B)$$

On a donc la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Tor}(AB) \to G_1 \otimes B \to G_o \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

b) A $f : B \to B'$ correspond la transformation de chaînes $Id_A \otimes f$ de C dans C' (associé à B') .

On définit donc : $\mathrm{Tor}(A,f) : \mathrm{Tor}(AB) \to \mathrm{Tor}(AB')$ par

$$\mathrm{Tor}(A,f) = (Id_A \otimes f)_* : H_1(C) \to H_1(C')$$

et la correspondance est fonctorielle (covariante et additive)

i.e. • $\mathrm{Tor}(A,f_1 + f_2) = \mathrm{Tor}(Af_1) + \mathrm{Tor}(A,f\ )$

• $\mathrm{Tor}(A, Id_B) = Id_{\mathrm{Tor}(AB)}$

• $\mathrm{Tor}(A\ fog) = \mathrm{Tor}(Af)\ o\ \mathrm{Tor}(A,g)$

Proposition 4.50.

Le foncteur Tor commute avec les sommes directes et les limites inductives par rapport à la seconde variable :

i.e. $$\mathrm{Tor}(A, \bigoplus_{i \in I} B_i) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Tor}(A,B_i)$$

$$\mathrm{Tor}(A, \underrightarrow{\mathrm{Lim}}(B_i, \varphi_{ij}àà = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\,[\mathrm{Tor}(A,B_i), \mathrm{Tor}(A,\varphi_{ij})]$$

Preuve : laissée au lecteur.

Proposition 4.51.

a) Si on a une suite exacte :

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0 \quad \text{et un groupe } B$$

Alors on a la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Tor}(A'B) \to \mathrm{Tor}(AB) \to \mathrm{Tor}(A''B) \to A' \otimes B \to A \otimes B \to A'' \otimes B \to 0$$

b) Si on a une suite exacte :

$0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ et un groupe A alors on a la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Tor}(AB') \to \mathrm{Tor}(AB) \to \mathrm{Tor}(AB'') \to A \otimes B' \to A \otimes B \to A \otimes B'' \to 0$$

Preuve :

a) Le lecteur vérifiera qu'en prolongeant f et g comme en 4.47 , on obtient une suite exacte de complexes de chaînes

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

où G^* est le complexe $0 \to G_1^* \to G_0^* \to 0$ défini en 4.47.

La suite exacte est la suite exacte d'homologie correspondante.

b) Soit $0 \to G_1 \to G_0 \to A \to 0$ une résolution libre de A , et G le complexe libre $0 \to G_1 \to G_0 \to 0$. Comme G est libre, on a la suite exacte :

$$0 \to G \otimes B' \to G \otimes B \to G \otimes B'' \to 0 \quad \text{d'après 4.24.}$$

La suite exacte est la suite exacte d'homologie correspondante.

Proposition 4.52.

$\mathrm{Tor}(AB)$ est symétrique.

i.e. $\operatorname{Tor}(AB) \approx \operatorname{Tor}(BA)$

Preuve :

Soit $0 \to G_1 \to G_o \to B \to 0$ une résolution libre de B. On a la suite exacte :

$$0 \to \operatorname{Tor}(AG_1) \to \operatorname{Tor}(AG_o) \to \operatorname{Tor}(AB) \to A \otimes G_1 \to A \otimes G_o \to A \otimes B \to 0$$

Or $\operatorname{Tor}(AG_1) = \operatorname{Tor}(AG_o) = 0$ d'après 4.24 car G_o, G_1 sont libres.

Par définition : $0 \to \operatorname{Tor}(BA) \to G_1 \otimes A \to G_o \otimes A \to B \otimes A \to 0$ est exacte.

On déduit que $\operatorname{Tor}(AB) \approx \operatorname{Tor}(BA)$ du lemme des cinq appliqué à :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to \operatorname{Tor}(AB) & \to & A \otimes G_1 & \to & A \otimes G_o & \to & A \otimes B & \to & 0 \\
 & & \downarrow \approx & & \downarrow \approx & & \downarrow \approx & & \\
0 \to \operatorname{Tor}(BA) & \to & G_1 \otimes A & \to & G_o \otimes A & \to & B \otimes A & \to & 0
\end{array}$$

Théorème 4.53.

Si A ou B est sans torsion $\operatorname{Tor}(A,B) = 0$

Preuve : suit immédiatement 4.24.

Corollaire 4.54.

$$\operatorname{Tor}(A,B) = \operatorname{Tor}(\tau(A), \tau(B))$$

Preuve : $A = \tau(A) \oplus A/\tau(A)$, $B = \tau(B) \oplus B/\tau(B)$

$A/\tau(A)$ et $B/\tau(B)$ sont sans torsion et Tor commute avec la somme directe.

Applications 4.55.

D'après ce qui précède et 4.14 , on connaît Tor(AB) pour A et B sont de type fini si on a les résultats suivants qui sont laissés en exercice au lecteur

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \, , \, \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}/_{(m,n)\mathbb{Z}} \qquad (m,n) = \mathrm{pgcd}(m,n)$$

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, B) = \{x \in B \mid nx = 0\}$$

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}} \, , \, B) = \tau(B)$$

LE FONCTEUR EXT.

Définition (complexe de cochaînes) 4.56.

a) Un complexe de cochaînes C^* est un groupe différentiel gradué dont l'opérateur bord est de degré 1.

On peut donc le représenter par :

$$\to C^{p-1} \xrightarrow{d} C^p \xrightarrow{d} C^{p+1} \to$$

b) On définit $Z(C^*) = \mathrm{Ker}\ d$; $B(C^*) = \mathrm{Im} d$

soit $Z^p(C^*) = \mathrm{Ker}(d|C^p)$; $B^p(C^*) = \mathrm{Im}(d|C^{p-1})$

$Z(C)$ est le groupe des cocycles, $B(C)$ le groupe des cobords. La cohomologie de C est le groupe

$$H(C^*) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^p(C^*) = Z(C^*)/_{B(C^*)} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} (Z^p(C^*)/_{B^p(C^*)})$$

c) Au complexe de cochaînes C^* on associe le complexe de chaînes

$C_* = \{C_p , d'\}$ où $C_p = C^{-p}$ et

$$d'_p : C_p \to C_{p-1} \quad \text{tel que} \quad d'_p = d^{-p} : C^{-p} \to C^{-p+1} \quad .$$

On peut donc transformer en cohomologie tout ce qu'on a défini et démontré pour l'homologie.

En particulier si $0 \to C_1^* \xrightarrow{f} C_2^* \xrightarrow{g} C_3^* \to 0$ est exacte on a la suite exacte

$$\to H^p(C_3^*) \xrightarrow{d^*} H^{p+1}(C_1^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(C_2^*) \xrightarrow{g^*} H^{p+1}(C^*) \to$$

d) Au complexe de chaînes C correspond le complexe de cochaînes $\mathrm{Hom}(C\ B)$

car $\to C_p \xrightarrow{d} C_{p-1} \to$

et $\longleftarrow \mathrm{Hom}(C_p B) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(dB)} \mathrm{Hom}(C_{p-1}\ B) \longleftarrow$.

<u>Lemmme 4.57.</u>

Soient deux complexes de chaînes C et C' et deux transformations de chaînes $\tau, \tau' : C \to C'$ homotopes

$$D : \tau \simeq \tau'$$

Alors les transformations de cochaînes $\mathrm{Hom}(\tau B)$, $\mathrm{Hom}(\tau' B)$ $\mathrm{Hom}(C'B) \to \mathrm{Hom}(CB)$ sont homotopes et

$$\mathrm{Hom}(D,B) : \mathrm{Hom}(\tau B) \sim \mathrm{Hom}(\tau' B) \quad .$$

<u>Preuve</u> : évidente lorsqu'on a compris les propriétés fonctorielles de Hom .

<u>Définition (Ext) 4.58.</u>

a) Etant donnés deux groupes A et B , on peut associer à A une résolution libre :

$$0 \to G_1 \xrightarrow{f} G_0 \to A \to 0$$

et au complexe de chaîne $C : 0 \to G_1 \to G_0 \to 0$ unique à une homotopie près d'après 4.47, le complexe de cochaînes C^* :

$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(G_1B) \leftarrow \mathrm{Hom}(G_0B) \leftarrow 0$ unique lui aussi à une homotopie près d'après 4.57. Les deux seuls groupes de cohomologie de C^* sont :

$$H^0(C^*) = \mathrm{Hom}(AB)$$

$$H^1(C^*) = \mathrm{Ext}(AB) = \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}(f,B))$$

$\mathrm{Ext}(AB)$ rend donc exacte la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(AB) \to \mathrm{Hom}(G_0B) \to \mathrm{Hom}(G_1B) \to \mathrm{Ext}(AB) \to 0 \quad .$$

b) Etant donnés des groupes A,A',B et l'homomorphisme $f : A \to A'$, on définit l'homomorphisme :

$$\mathrm{Ext}(fB) : \mathrm{Ext}(A'B) \to \mathrm{Ext}(AB)$$

comme $\quad [\mathrm{Hom}(fB)]^* = \mathrm{Ext}(f,B)$

où $\mathrm{Hom}(fB) : \mathrm{Hom}(C',B) \to \mathrm{Hom}(C,B)$ est défini d'après 4.47 $\mathrm{Ext}(.,B)$ est un foncteur contravariant additif

i.e. $\quad \mathrm{Ext}(f_1 + f_2, B) = \mathrm{Ext}(f,B) + \mathrm{Ext}(f_2B)$

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{Id}_A,B) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ext}(AB)}$$

$$\mathrm{Ext}(f \circ g\ B) = \mathrm{Ext}(gB) \circ \mathrm{Ext}(fB)$$

c) Etant donnés ABB' et l'homomorphisme $f : B \to B'$ on définit l'homomorphisme :

$$Ext(Af) : Ext(AB) \to Ext(AB')$$

par $$Ext(Af) = [Hom(A,f)]^*$$

où $Hom(Af) : Hom(CB) \to Hom(CB')$ est défini d'après 4.47

$Ext(A,.)$ est un foncteur covariant additif

i.e. $$Ext(A,f_1 + f_2) = Ext(A,f_1) + Ext(Af_2)$$

$$Ext(A\ Id_B) = Id_{Ext(AB)}$$

$$Ext(A, fog) = Ext(Af) \circ Ext(A,g)$$

<u>Proposition 4.59.</u>

a) Si on a une suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ et un groupe B , on a la suite exacte

$$0 \to Hom(A''B) \to Hom(AB) \to Hom(A'B) \to Ext(A''B) \to Ext(AB) \to Ext(A'B) \to 0$$

b) Si on a une suite exacte $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ et un groupe A , on a la suite exacte :

$$0 \to Hom(AB') \to Hom(AB) \to Hom(AB'') \to Ext(AB') \to Ext(AB) \to Ext(AB'') \to 0 .$$

<u>Preuve</u> :

a) c'est la suite exacte d'homologie des complexes de résolution libre de A', A, A'' .

b) C étant le complexe libre associé à la résolution libre de A , la suite suivante est exacte

$$0 \to Hom(CB') \to Hom(CB) \to Hom(CB'') \to 0$$

d'après 4.28 b). Il suffit d'en prendre la suite exacte d'homologie.

Proposition 4.60.

$$\mathrm{Ext}\left(\bigoplus_{i\in I} A_i \,,\, \prod_{j\in I} B_j\right) = \prod_{i,j\in I\times I} \mathrm{Ext}(A_i, A_j)$$

Preuve :

On a la propriété analogue avec Hom (4.26) .

4.26 et la définition de Ext donnent donc immédiatement le résultat.

Théorème 4.61.

Etant donné un groupe H , les conditions suivantes sont équivalentes :

a) H est divisible ($H \xrightarrow{xn} H$ est surjective pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$)

i.e : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $\forall h \in H$ $\exists h' \in H$ tel que $h = nh'$.

b) Pour tout groupe G $\mathrm{Ext}(GH) = 0$

c) Pour toute résolution libre : $0 \to G_1 \xrightarrow{f} G_0 \to G \to G_0$

$\mathrm{Hom}(G_0H) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,H)} \mathrm{Hom}(G_1H)$ est surjective

i.e. : $/g : G_1 \to H$ homomomorphisme, il existe $\tilde{g} : G_0 \to H$ tel que

$g = g \circ f$.

Preuve :

c $\Longrightarrow$ b Hom est donc exact, i.e. la suite

$0 \to \mathrm{Hom}(GH) \to \mathrm{Hom}(G_0H) \to \mathrm{Hom}(G_1H) \to 0$ est exacte

donc $\mathrm{Ext}(GH) = 0$

b $\Longrightarrow$ a

Soit la suite exacte : $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{xn} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$

Il correspond d'après 4.59 et 4.26 la suite exacte

$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}H) \to H \xrightarrow{xn} H \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},H) \to 0$ où $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},H) = 0$

par hypothèse

donc $H \xrightarrow{xn} H$ est surjective.

a $\Longrightarrow$ c

Supposons $G_1 \subset G_0$ pour simplifier, $g : G_1 \to H$ si $G_1 \neq G_0$

il existe $x \in G_0 - G_1$

On veut prolonger g en g_1 sur $G_1 + \mathbb{Z}x$. Or $G_1 \cap \mathbb{Z}x$ n'est pas nécessairement 0 donc $G_1 + \mathbb{Z}x = \mathbb{Z}(mx)$ pour un $m \in \mathbb{Z}$ donc il faut : $g_1(y + pmx) = g_1(y) + pg_1(mx) = g(y) + pg(mx)$ pour $y \in G_1$ $(mx \in G_1)$

$$\text{donc} \quad mg_1(x) = g(mx)$$

Or $g(mx) \in H$. Comme H est divisible ceci définit $g_1(x)$ donc g_1 sur $G_1 + \mathbb{Z}x$.

Il reste à appliquer le lemme de Zorn aux couples (G',g') où G' G_1 , $g'|G_1 = g$, ordonné par inclusion et prolongement. Il est alors évident qu'un élément maximal est tel que $G' = G_0$

Théorème 4.62.

Si A est un groupe libre, ou si B est un groupe divisible

$$\mathrm{Ext}(A,B) = 0$$

Preuve :

Evident d'après 4.28 et 4.61.

Applications 4.63.

4.60 et 4.62 permettent de calculer Ext pour les groupes de type fini dès qu'on connaît les résultats suivants qui sont laissés en exercice au lecteur

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\ ,\ \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}/_{(m,n)\mathbb{Z}}$$

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\ ,\ B) = B/_{nB}$$

$$\mathrm{Ext}(G,\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}) = 0 \quad .$$

HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE.

Remarque 4.64.

a) Pour le lecteur connaissant le langage des foncteurs, il sera facile de comprendre la proposition suivante :

Etant donné un foncteur F covariant (ou F' contravariant) additif il transforme toute suite exacte scindable en une suite exacte scindable donc à la suite exacte scindable : $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ correspondent les suites exactes scindables :

$$0 \to F(A') \xrightarrow{F(f)} F(A) \xrightarrow{F(g)} F(A'') \to 0$$

$$0 \to F'(A) \xrightarrow{F'(g)} F'(A) \xrightarrow{F'(f)} F'(A') \to 0$$

Ceci résulte directement des définitions de F et F' i.e :

. $F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2)$	. $F'(f_1 + f_2) = F'(f_1) + F'(f_2)$
. $F(Id_A) = Id_{F(A)}$	. $F'(Id_A) = Id_{(F'(A))}$
. $F(fog) = F(f) \circ F(g)$	. $F'(fog) = F'(g) \circ F'(f)$

b) Pour tous, il sera facile de vérifier que les foncteurs Hom , Tor, Ext, $\otimes$, H (.) (ce dernier étant défini par $\tau : C \to C'$, $H(\tau) = \tau_*$) étant additifs, la propriété énoncée ci-dessus est vraie pour chacun d'eux.

Remarque 4.65.

Soient trois complexes de chaînes C_1 , C_2 , C_3 tels que

$$C_1 \subset C_2 \subset C_3$$

Alors la suite : $0 \to \frac{C_2}{C_1} \xrightarrow{i} \frac{C_3}{C_1} \xrightarrow{p} \frac{C_3}{C_2} \to 0$ est exacte. On en déduit la suite exacte :

$$\to H_p(C_2 , C_1) \xrightarrow{i*} H_p(C_3 , C_1) \xrightarrow{p_*} H_p(C_3, C_2) \xrightarrow{d_*} H_{p-1}(C_2 , C_1) \to$$

Et on peut factoriser d_* en :

$H_p(C_3/ C_2) \xrightarrow{d_{1*}} H_{p-1}(C_2) \xrightarrow{p_{1*}} H_{p-1}(C_2 / C_1)$ où p_{1_*} se déduit de la projection $p_1 : G_2 \to C_2/ C_1$ et d_{1*} obtenu à partir de la suite exacte :

$$0 \to C_2 \to C_3 \to C_3/ C_2 \to 0$$

Définition (Homologie à coefficients dans G) 4.66.

a) Etant donné un complexe de chaînes $C = (\bigoplus_{p\in Z} C_p , d)$ on définit le complexe de chaînes $C \otimes G =(\bigoplus_{p\in Z} (C_p \otimes G) , d \otimes Id_G$ G désignant un groupe.

L'homologie de ce complexe est appelée homologie de C à coefficients dans G et est notée :

$$H(C \otimes G) = H(C\ ;\ G)$$

b) Etant donnée une transformation de chaînes $\tau : C \to C'$, elle induit un homomorphisme sur les groupes d'homologie :

$$\tau_* : H(C\ ;\ G) \to H(C'\ ;\ G)$$

et la correspondance est fonctorielle (covariante et additive) .

c) Etant donné un homomorphisme $f : G \to G'$, il induit un homomorphisme :

$$f_* : H(C\ ;\ G) \to H(C\ ;\ G')$$

et la correspondance est fonctorielle (covariante et additive) .

d) Dans le cas de l'homologie relative de (C,C') soit de l'homologie de C/C' , la définition est identique et on note

$$H(C/C'\ ;\ G) = H(C,C'\ ;\ G)$$

Lemme 4.67.

Si on a un complexe de chaînes C et un groupe G , il existe un homomorphisme

$$\mu : H(C) \otimes G \to H(C,G)$$

qui vérifie :

$$\mu(\{c\} \otimes g) = \{c \otimes g\}$$

Preuve :

Il existe une application bilinéaire $\tilde{\mu} : H(C) \times G \to H(C,G)$ définie par

$\tilde{\mu}(\{c\},g) = \{c \otimes g\}$. μ est induit par $\tilde{\mu}$

Théorème (des coefficients universels en homologie) 4.68.

Soit un complexe de chaînes libre C et un groupe G alors on a la suite exacte scindable

$$0 \to H_q(C) \otimes G \xrightarrow{\mu} H_q(C] G) \to \mathrm{Tor}(H_{q-1}(C), G) \to 0$$

En particulier

$$H_q(C ; G) \approx H_q(C) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(C) , G)$$

Preuve :

Soient les sous-complexes de $C = \{C_q , d\}$

$$Z = \{Z_q = Z_q(C) , d\} \quad \text{et} \quad B = \{B_q = B_{q-1}(C) , d\} .$$

Ce sont des complexes de chaînes libres et pour tous deux d se réduisent à l'homomorphisme nul.

On a la suite exacte : $0 \to Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \to 0$ où $\alpha(z) = z$ et $\beta(c) = d(c)$.

Comme B est libre, elle est scindable et

$0 \to Z \otimes G \to C \otimes G \to B \otimes G \to 0$ est exacte et scindable. Il lui correspond la suite exacte :

$$\to H_q(Z ; G) \xrightarrow{\alpha_*} H_q(C ; G) \xrightarrow{\beta_*} H_q(B ; G) \xrightarrow{d_*} H_{q-1}(Z G) \to$$

Comme l'opérateur bord de Z et de B est nul, on a

$$H_q(Z, G) = Z_q \otimes G \quad ; \quad H_q(B,G) = B_q \otimes G = B_{q-1}(C) \otimes G$$

D'après la définition de d_* , $d_* = \gamma \otimes 1$ où

$$\gamma_q : B_q(C) \subset Z_q(C) .$$

La suite exacte s'écrit donc :

$$\to B_q(C) \otimes G \xrightarrow{\gamma_q \otimes 1} Z_q(C) \otimes G \to H_q(C\ ;\ G) \to B_{q-1}(C) \otimes G \xrightarrow{\gamma_{q-1} \otimes 1} Z_{q-1}(C) \otimes G$$

D'après 4.2 b) il en résulte la suite exacte :

(*) $$0 \to \operatorname{coker}(\gamma_q \otimes 1) \to H_q(C,G) \to \ker(\gamma_{q-1} \otimes 1) \to 0$$

D'autre part, on a la résolution libre

$$0 \to B_q(C) \to Z_q(C) \to H_q(C) \to 0$$

donc la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Tor}(H_q(C),G) \to B_q(C) \otimes G \xrightarrow{\gamma_q \otimes 1} Z_q(C) \otimes G \to H_q(C) \otimes G \to 0$$

dont nous déduisons

$$\operatorname{coker}(\gamma_q \otimes 1) \approx H_q(C) \otimes G$$

$$\ker(\gamma_q \otimes 1) \approx \operatorname{Tor}(H_q(C),G)$$

qu'il suffit de remplacer dans (*) pour obtenir la suite de l'énoncé

$$0 \to H_q(C) \otimes G \to H_q(C,G) \to \operatorname{Tor}(H_{q-1}(C),G) \to 0$$

et on vérifiera aisément que le premier homomorphisme est μ défini en 4.67.

Il reste à vérifier que la suite est scindable.

La suite exacte : $0 \to Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \to 0$ est scindable car B est libre.

Donc $\beta_q(d_q)$ admet un inverse à droite h_q $\quad d_q h_q = Id_{B_{q-1}(C)}$

$$h_q \otimes 1 : B_{q-1}(C) \otimes G \to C_q \otimes G$$

si $$d_q c \otimes g \in \mathrm{Ker}(\gamma_{q-1} \otimes 1) \subset B_{q-1}(C) \otimes G$$

$$(h_q \otimes 1)\ (d_q c \otimes g) = h_q d_q (c) \otimes g = c \otimes g$$

donc $$(h_q \otimes 1) | \mathrm{Ker}(\gamma_{q-1} \otimes 1) : \mathrm{Ker}(\gamma_{q-1} \otimes 1) \to Z_q(C \otimes G)$$

et cette application composée avec la projection : $Z_q(C \otimes G) \to H_q(C,G)$ est une inverse à droite de : $H_q(C,G) \to \mathrm{Ker}(\gamma_{q-1} \otimes 1)$ dans (*) .

Remarques 4.69.

D'après ce que nous avons dit en 4.56 , le théorème précédent peut se transcrire pour un complexe de cochaînes.

Soit un complexe de cochaînes libre C^* et un groupe G . Alors on a la suite exacte scindable :

$$0 \to H^q(C) \otimes G \to H^q(C^* \otimes G) \to \mathrm{Tor}(H^q(C^*)\ ,\ G) \to 0$$

i.e. : $$H^q(C^* \otimes G) \approx H^q(C^*) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H^q(C^*),\ G)\ .$$

Définition (cohomologie à valeurs dans G) 4.70.

Nous avons signalé en 4.56 qu'au complexe de chaînes C on pouvait associer le complexe de cochaînes $\mathrm{Hom}(C,G)$. La fin de ce paragraphe est consacré à l'étude de Hom(CG)

a) Au complexe de chaînes $C = \{C_q, d_q\}$ on associe le complexe de cochaînes $\mathrm{Hom}(C,G)$ (G étant un groupe) défini par

$$\mathrm{Hom}(CG) = \{\mathrm{Hom}(C_q G)\ ,\ d^q)$$

ou $d^q : Hom(C_q, G) \to Hom(C_{q+1}, G)$ est l'homomorphisme qui à $f \in Hom(C_q G)$ associe $d^q f$ défini par :

$$\forall c \in C_{q+1} \qquad d^q f(c) = f(d_{q+1}(c))$$

La cohomologie de ce complexe est appelée cohomologie de C à valeurs dans G et est notée :

$$H^*(Hom(CG) = H^*(C ; G) = \bigoplus_{q \in \mathbf{Z}} H^q(C ; G)$$

b) à la transformation de chaînes $\tau : C \to C'$ correspond la transformation de cochaînes $\bar{\tau} : Hom(C',C) \to Hom(C,G)$ définie par

$$\bar{\tau}(f') = f' \circ \tau_q \qquad f' \in Hom(C'_q ; G)$$

et τ induit un homomorphisme τ^* sur les groupes de cohomologie

$$\tau^* : H^*(C'; G) \to H^*(C,G)$$

et la correspondance $\tau \to \tau^*$ est fonctorielle (contravariante additive) ;

i.e. $\quad \circ\ (\tau_1 + \tau_2)^* = \tau_1^* + \tau_2^*$

$\circ\ (Id_C)^* = Id_{H*(C,G)}$

$\circ\ (\tau \circ \tau')^* = \tau'^* \circ \tau^*$

c) A l'homomorphisme de groupes $\varphi : G \to G'$ correspond la transformation de cochaînes : $Hom(C,\varphi) : Hom(C,G) \to Hom-C,G')$ qui induit un homomorphisme φ^* sur les groupes de cohomolohie.

$$\varphi^* : H^*(C , G) \to H^*(C , G')$$

et la correspondance $\varphi \to \varphi^*$ est fonctorielle (covariante additive) i.e. $\quad\circ\ (\varphi_1 + \varphi_2)^* = \varphi_1^* + \varphi_2^*$

$\circ\ Id_G^* = Id_{H^*(CG)}$

$\circ\ (\varphi \circ \varphi')^* = \varphi^* \circ \varphi'^*$

d) <u>Remarque</u> : il sera parfois utile, pour distinguer homologie et cohomologie de noter : $H(C\ ;\ G) = H_*(C\ ;\ G)$.

<u>Lemme 4.71.</u>

Il existe un homomorphisme

$$h : H^*(C,G) \to Hom(H(C),G)$$

défini par $\quad h\{f\}\ \{c\} = f(c)$

$$\{f\} \in H^q(C,G) \quad , \{c\} \in H_q(C)$$

<u>Preuve</u> : Il suffit de démontrer que la définition de h est bonne , i.e. qu'elle ne dépend ni du choix de f, ni du choix de c

Soient $\quad f,f' \in \{f\} \quad , \quad c,c' \in \{c\}$

donc $\quad f - f' = d^{q-1}\varphi \ , \quad c - c' = d_{q+1}z \quad$ et $\quad d^q f = d^q f' = 0 = d_q c = d_q c'$

$$\begin{aligned} f(c) - f'(c') &= f(c - c') + (f - f')\, c' \\ &= f(d_{q+1}z) + (d^{q-1}\varphi)\, c' \\ &= (d^q f)z + \varphi(d_q C') = 0 \end{aligned}$$

<u>Théorème (des coefficients universels en cohomologie) 4.72.</u>

Etant donnés un complexe de chaînes libre et un groupe G , on a la suite exacte scindable :

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{q-1}(C),G) \to H^q(C;G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(H_q(C),G) \to 0$$

i.e. $\quad H^q(C\ ;\ G) \approx \mathrm{Hom}(H_q(C)\ ;\ G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{q-1}(C)\ ;\ G)$

Preuve : Le lecteur ayant bien compris 4.68 n'aura aucune peine à comprendre celui-ci. Les notations étant les mêmes, on a la suite exacte scindable :

$$0 \to Z \to C \to B \to 0$$

donc la suite exacte scindable :

$$0 \to \mathrm{Hom}(B,G) \to \mathrm{Hom}(CG) \to \mathrm{Hom}(ZG) \to 0$$

et la suite exacte de cohomologie :

$$\to H^{q-1}(Z;G) \xrightarrow{d^*} H^q(B;G) \to H^q(C;G) \to H^q(Z;G) \xrightarrow{d^*}$$

Comme $d|Z$ et $d|B$ sont nuls, on a :

$$H^q(Z\ ;\ G) = \mathrm{Hom}(Z_q(C)\ ;\ G)$$

$$H^q(B\ ;\ G) = \mathrm{Hom}(B_{q-1}(C)\ ,\ G)$$

et $\quad d^* = \mathrm{Hom}(\gamma_q\ ,\ G) : \mathrm{Hom}(Z_q(C)\ ;\ G) \to \mathrm{Hom}(B_q(C)\ ;\ G)$

(ce dont le lecteur s'assurera : ce sera un excellent exercice pour la compréhension de la dualité entre homologie et cohomologie). On en déduit (comme en 4.68) la suite exacte :

$$(*) \qquad 0 \to \mathrm{coker}[\mathrm{Hom}(\gamma_{q-1},G)] \to H^q(C\ ;\ G) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(\gamma_q,G)] \to 0$$

A la résolution libre

$$0 \to B_q(C) \to Z_q(C) \to H_q(C) \to 0$$

correspond la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}(H_q(C),G) \to \mathrm{Hom}(Z_q(C),G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\gamma_q G)} \mathrm{Hom}(B_q(C);G) \to \mathrm{Ext}(H_q(C),G) \to 0$$

dont on déduit

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(\gamma_q,G)] \approx \mathrm{Hom}(H_q(C) , G)$$

$$\mathrm{coker}\ [\mathrm{Hom}(\gamma_q,G)] \approx \mathrm{Ext}(H_q(C),G)$$

ce qu'il suffit de remplacer dans (*)

Il reste à vérifier (ce qui est facile) que $H^q(C;G) \to \mathrm{Hom}(H_q(C) ; G)$ est h défini en 4.71 , et que la suite est scindable ce qui se fait comme dans 4.68 à l'aide de h_q .

Corollaires 4.73.

a) Si $H_{i-1}(C)$ est libre

$$H^i(C ; b) \approx \mathrm{Hom}(H_i(C) , G)$$

b) Si $H_i(C)$ est de type fini pour tout i

$$H^i(C) = F_i \oplus T_i \qquad (T_i = \tau(H_i(C)) , \quad F_i = H_i(C)/T_i)$$

Alors $$H^i(C) = H^i(C ; \mathbb{Z}) \approx F_i \oplus T_{i-1}$$

Preuve : évidente car

$$\mathrm{Ext}(H_i(C) , \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}(T_{i-1} , \mathbb{Z}) \approx T_{i-1}$$

$$\mathrm{Hom}(H_i(C) , \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(F_i,\mathbb{Z}) \approx F_i$$

APPLICATION : TRACE D'UNE TRANSFORMATION DE CHAINES.

Définition (trace d'une matrice) 4.74.

Etant donné une matrice $A(n,n)$, on définit sa trace par :

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad\qquad A = (a_{ij})$$

Proposition 4.75.

Etant données deux matrices A et B carrées (n,n), on a

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$$

en particulier : $\operatorname{Tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{Tr}(A)$

Preuve : $\operatorname{Tr}(AB) = \sum_k a_{ik}\, b_{ki} = \operatorname{Tr}(BA)$

$$\operatorname{Tr}[B^{-1}(AB)] = \operatorname{Tr}[(AB)B^{-1}] = \operatorname{Tr}(A)$$

Définition (trace d'un endomorphisme d'espace vectoriel) 4.76.

Etant donné un espace vectoriel de dimension finie E et un endomorphisme

$$f : E \to E$$

on appelle trace de f le nombre $\operatorname{Tr} f$ obtenu en représentant f par une matrice M dans une base de E et en prenant

$$\operatorname{Tr} f = \operatorname{Tr} M$$

Si on change de base, on sait que f s'exprime par une matrice $M' = N^{-1}MN$ pour une certaine matrice inversible N

Alors $\operatorname{Tr}(M') = \operatorname{Tr}(M)$ d'après 4.75.

donc $\operatorname{Tr} f$ ne dépend pas de la base choisie.

Lemme 4.77.

Soient trois espaces vectoriels A_1, A_2, A_3 de dimension finie et le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A_1 & \to & A_2 & \to & A_3 & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\ 0 & \to & A_1 & \to & A_2 & \to & A_3 & \to & 0 \end{array}$$

Alors $\mathrm{Tr} f_2 = \mathrm{Tr} f_1 + \mathrm{Tr} f_3$

Preuve : A_3 est libre et $A_2 = A_1 \oplus A_3$

On choisit une base réunion d'une base de A_1 et d'une base de A_3

Définition (trace d'un endomorphisme et groupes) 4.78.

a) Au groupe A on associe la suite exacte

$$0 \to \tau(A) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/\tau(A) \to 0$$

donc la suite exacte (car Q est libre)

$$0 \to \tau(A) \otimes Q \to A \otimes Q \xrightarrow{p \otimes 1} A/\tau(A) \otimes Q \to 0$$

Or $\tau(A) \otimes Q = 0$ car espace vectoriel " de torsion", donc $p \otimes 1$ est un isomorphisme

b) Soit $f : A \to A$ un endomorphisme, et f_1 l'endomorphisme de $A/\tau(A)$ induit par $p \otimes 1$. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A \otimes Q & \xrightarrow{p \otimes 1} & A/\tau(A) \otimes Q & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f \times 1} & & \downarrow{\scriptstyle f_1 \otimes 1} & & \\ 0 & \to & A \otimes Q & \xrightarrow{p \otimes 1} & A/\tau(A) \otimes Q & \to & 0 \end{array}$$

répond à 4.77 donc

$$\mathrm{Tr}(f \otimes 1) = \mathrm{Tr}(f_1 \otimes 1)$$

c) f_1 est un endomorphisme de groupe libre donc s'exprime par une matrice M à coefficients entiers dans une base (e_i). La matrice de $f_1 \times 1$ dans la base $(e_i \otimes 1)$ est aussi M donc

$$\mathrm{Tr}(f_1 \otimes 1) \in \mathbf{Z}$$

d) On définit la trace d'un endomorphisme $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$

par $$\mathrm{Tr}f = \mathrm{Tr}(f_1 \otimes 1)$$

Définition (endomorphisme de chaînes) 4.79.

a) On appelle endomorphisme de chaînes, une transformation de chaînes d'un complexe C dans lui-même

$$\tau : C \to C$$

b) Etant donnés un complexe de chaînes C de type fini (i.e. C_q de type fini pour tout q et nul sauf pour un nombre fini d'indices et un endomorphisme de chaînes

$\tau : C \to C$, on définit sa trace par :

$$\mathrm{Tr}\tau : \sum_{p \in \mathbf{Z}} (-1)^p \, \mathrm{Tr}(\tau_p)$$

Théorème 4.80.

Etant donnés un complexe de chaînes de type fini C et un endomorphisme de chaînes $\tau : C \to C$, l'homologie $H(C)$ est aussi de type fini et on a :

$$\mathrm{Tr}\ \tau = \mathrm{Tr}\ \tau_*$$

<u>Preuve</u> :

Nous reprenons les notations de 4.68 et trouvons la suite exacte

$$0 \to Z_p(C) \otimes Q \to C_p \otimes Q \to B_{p-1}(C) \otimes Q \to 0$$

(car Q est sans torsion)

$\tau_p \otimes 1$ induit φ_p et ψ_p tels que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_p(C) \otimes Q \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_p"] & C_p \otimes Q \arrow[r] \arrow[d, "\tau_p \otimes 1"] & B_{p-1}(C) \otimes Q \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{p-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_p(C) \otimes Q \arrow[r] & C_p \otimes Q \arrow[r] & B_{p1}(C) \otimes Q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

D'après 4.77 $\quad \mathrm{Tr}(\tau_p \otimes 1) = \mathrm{Tr}\varphi_p + \mathrm{Tr}\psi_{p-1}$

On a d'autre part le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_p(C) \otimes Q \arrow[r] \arrow[d, "\psi_p"] & Z_p(C) \otimes Q \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_p"] & H_p(C\ ;\ Q) \arrow[r] \arrow[d, "H_p(\tau, R)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_p(C) \otimes Q \arrow[r] & Z_p(C) \otimes Q \arrow[r] & H_p(C\ ;\ Q) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

l'endomorphisme $H_p(\tau, Q)$ étant induit par φ_p

D'après 4.77.

$$\mathrm{Tr}\varphi_p = \mathrm{Tr}\psi_p + \mathrm{Tr}H_p(\tau, Q)$$

En combinant nos deux résultats, nous obtenons

$$\mathrm{Tr}(\tau) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \ \mathrm{Tr}(\tau_p \otimes 1) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \ (\mathrm{Tr}\varphi_p + \mathrm{Tr}\ \psi_{p-1})$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \ \mathrm{Tr}\ \psi_p + \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^{p+1} \ \mathrm{Tr}\ \psi_p + \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \ \mathrm{Tr} H_p(\tau,\mathbb{Q})$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \ \mathrm{Tr} H_p(\tau,\mathbb{Q})$$

Ceci car la sommation est finie par hypothèse.

Comme $\mathbb{Q}$ est sans torsion, $\mu : H_p(C) \otimes \mathbb{Q} \to H_p(C,\mathbb{Q})$ est un isomorphisme et comme le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H_p(C) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\tau_* \otimes 1"] & H_p(C\ ;\ \mathbb{Q}) \arrow[d, "H_p(\tau,\mathbb{Q})"] \\
H_p(C) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "\mu"] & H_p(C\ ;\ \mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Donc d'après 4.77

$$\mathrm{Tr}(\tau_{*p} \otimes 1) = \mathrm{Tr}(H_p(\tau,\mathbb{Q}))$$

donc

$$\mathrm{Tr}\tau = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \ \mathrm{Tr}(\tau_p \otimes 1) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \ \mathrm{Tr}(\tau_{*p} \otimes 1) = \mathrm{Tr}\ \tau_*$$

Remarque :

On aurait eu le même résultat avec un endomorphisme de cochaînes

$$\tau : C^* \to C^*$$

-::-::-